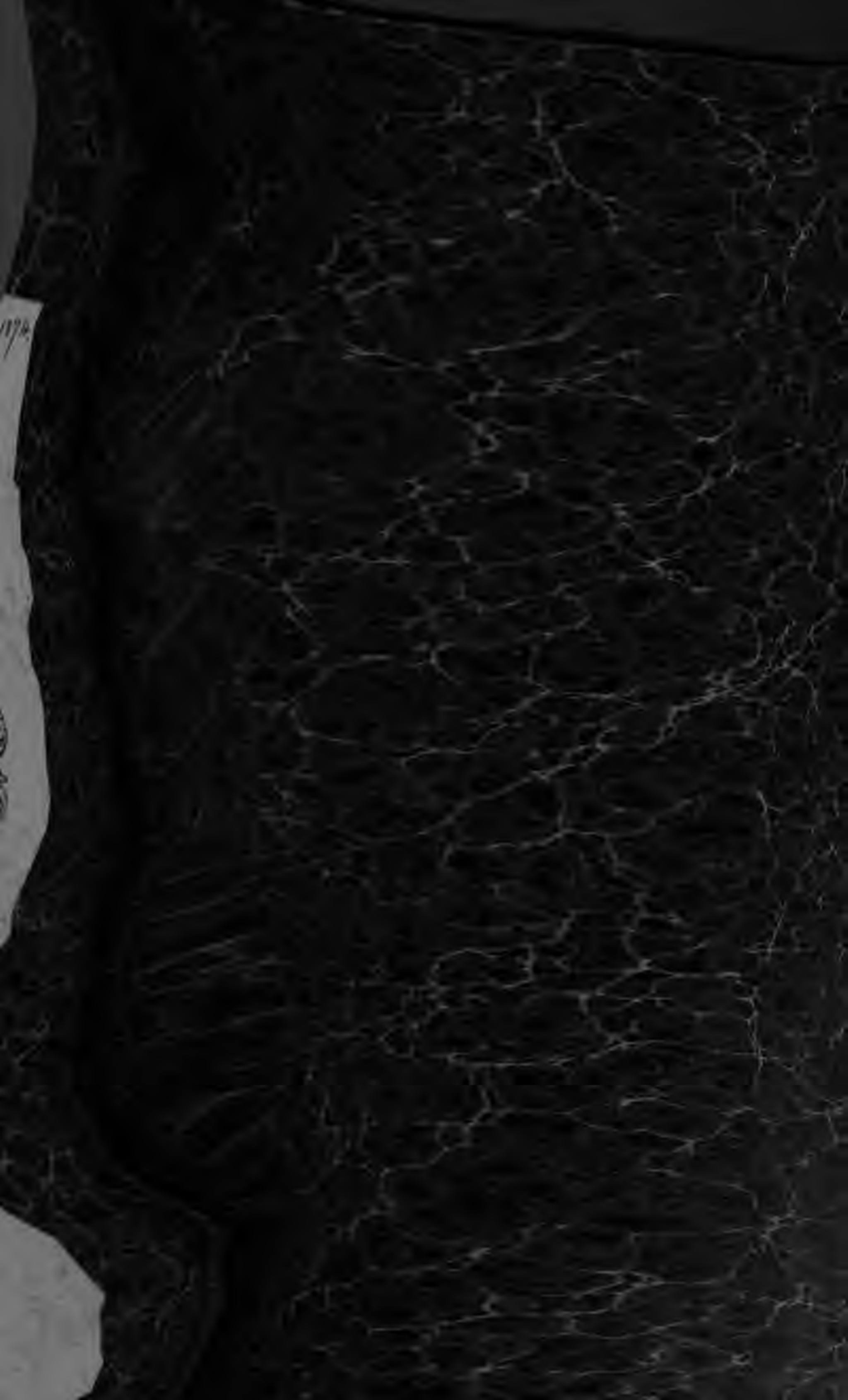
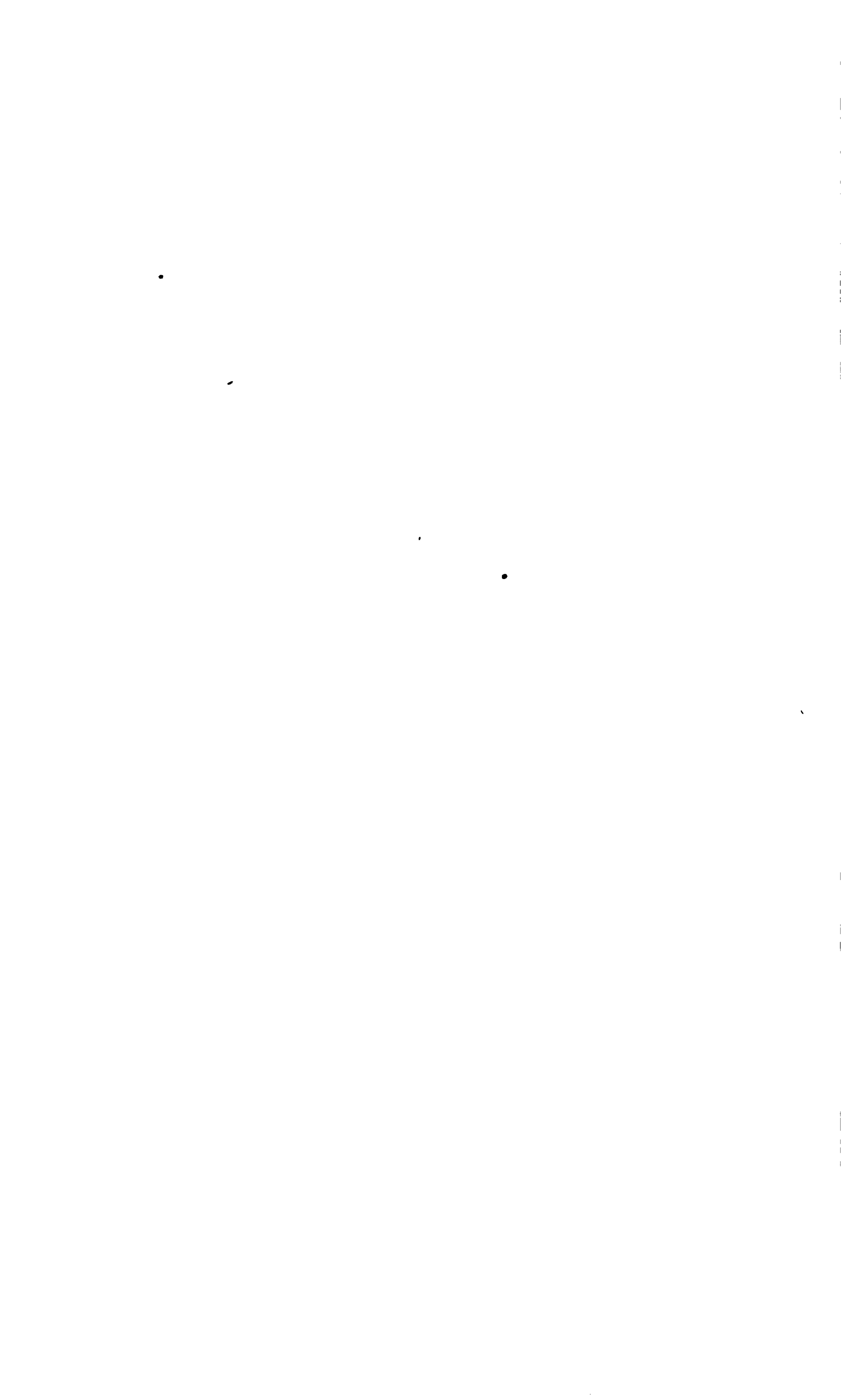



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650
CHRISTO ET ECCLESIAE









SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

VIERUNDSECHZIGSTER BAND.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1871.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

LXIV. BAND. II. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1871. — HEFT I BIS V.

(Mit 13 Tafeln und 2 Holzschnitten.)

WIEN.

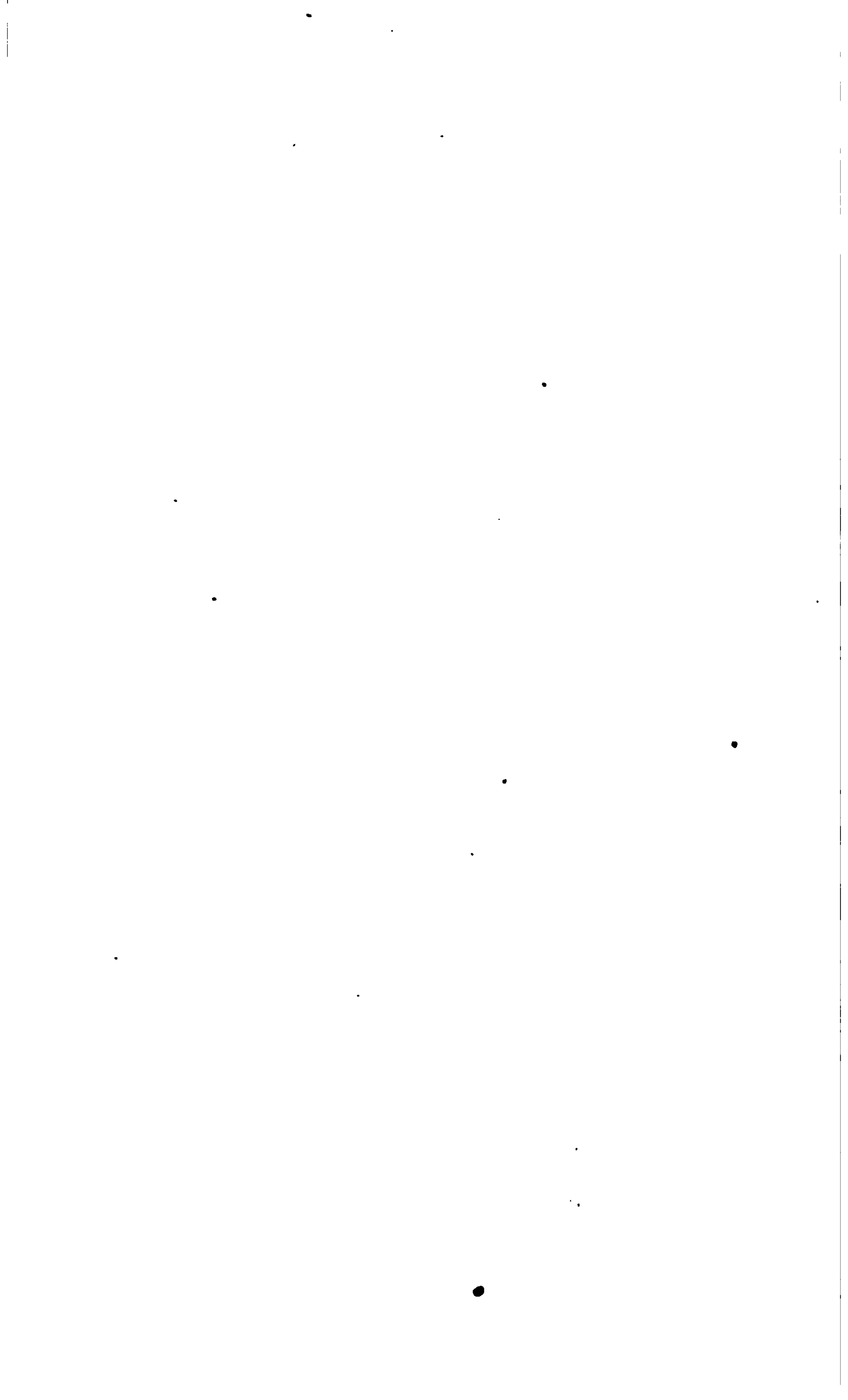
AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1871.

INHALT.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXIV. BAND. I. u. II. HEFT.

Jahrgang 1871. — Juni u. Juli.

(Mit [illegible] Tafeln und 2 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

WIEN.

[illegible] HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

[illegible]

1871.

INHALT

des 6. und 7. Heftes (Juni und Juli) des 64. Bandes, II. Abth. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. = 1 Thl. 10 Ngr.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXIV. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

6.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

XV. SITZUNG VOM 9. JUNI 1871.

Der Präsident gedenkt des am 1. Juni l. J. erfolgten Ablebens des correspondirenden Mitgliedes der Classe, Herrn Dr. August Neilreich, k. k. Oberlandesgerichtsrathes in Pension.

Sämmtliche Anwesende geben ihr Beileid durch Erheben von den Sitzen kund.

Herr Prof. Dr. L. Ditscheiner dankt mit Zuschrift vom 7. Juni für den ihm zuerkannten Ig. L. Lieben'schen Preis und liefert unter Einem den durch die §§. 4, 6 & 8 des Stiftbriefes vorgeschriebenen Nachweis seiner österreichischen Staatsbürgerschaft.

Herr Custos Th. Fuchs dankt mit Schreiben vom 24. Mai für den ihm zum Zwecke einer wissenschaftlichen Reise nach Sicilien bewilligten Reisebeitrag von 250 fl.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Die plutonischen und vulkanischen Felsarten. Nach dem Stande der neuesten Forschungen auf dem Gebiete der Geognosie und Chemie bearbeitet", vom Herrn Franz Schröckenstein, Berg-Ingenieur der k. k. priv. österr. Staatseisenbahn-Gesellschaft zu Kladno.

„Versuch zur Beweisführung, dass die Ebbe und Fluth durch die Bewegungen der Erde herbeigeführt werden muss", vom Herrn C. Deppe, Eisenbahn-Stations-Einnehmer zu Wunstorf bei Hannover.

Herr Prof. Dr. A. Winckler überreicht eine Abhandlung: „Über die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung mit rationalen Coëfficienten zweiten Grades".

Herr Sectionsrath Dr. C. Jelinek macht eine für den Anzeiger bestimmte Mittheilung über die abnormen Temperaturverhältnisse des Mai 1871.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften, Königl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. April 1871. Berlin; 8°.

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift. 9. Jahrgang, Nr. 15—16. Wien, 1871; 8°.

Archivio per l'Antropologia e la Etnologia publicato: per la parte antropologica dal Dr. Paolo Mantegazza, per la parte etnologica dal Dr. Felice Finzi. I° Vol., fasc. 1. & 2. Firenze, 1871; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1843—1844. (Bd. 77. 19—20.) Altona, 1871; 4°.

Berlin, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1870—1871. Berlin; 4°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome XL. Nr. 160. Genève, Lausanne, Paris, 1871; 8°.

Carl, Ph., Repertorium für Experimental-Physik etc. VII. Band, 1. Heft. München, 1871; 8°.

Comitato, R., Geologico d'Italia: Bollettino. Anno 1871, Nr. 3 e 4. Firenze; 8°.

Cotta, Bernhard von, Der Altai, sein geologischer Bau und seine Erzlagerstätten. Leipzig, 1871; gr. 8°.

Du Moncel, Le Cte Th., Recherches sur les meilleures conditions de construction des electro-aimants. Paris & Caen, 1871; 8°.

Gesellschaft, Deutsche geologische: Zeitschrift. XXII. Band, 4. Heft; XXIII. Bd., 1. Heft. Berlin, 1870 & 1871; 8°.

— Österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VI. Band, Nr. 10—11. Wien, 1871; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXII. Jahrgang, Nr. 20—22. Wien, 1871; 4°.

Graber, V., Fortgesetzte Untersuchungen über die nachembryonale Entwicklung und die *cuticula* der Geradflügler. (Aus dem I. Programme des k. k. zweiten Staats-Gymnasiums in Graz.) gr. 8°.

Jahrbuch, Neues, für Pharmacie und verwandte Fächer, von F. Vorwerk. Band XXXV, Heft 4. Speyer, 1871; 8°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band III, 6. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

Landbote, Der steirische. 4. Jahrgang, Nr. 11. Graz, 1871; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen & Mittheilungen. Jahrgang 1871, Nr. 11—12. Wien; 8°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 17. Bd., 1871. V. Heft. Gotha; 4°.

Nature. Nrs. 81—83, Vol. IV. London, 1871; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1871, Nr. 8. Wien; 8°.

Settimanni, César, Nouvelle théorie des principaux éléments de la lune et du soleil. Florence, 1871; 4°.

Société Impériale des Naturalistes de Moscou: Bulletin. Tome XLIII. Année 1870, Nrs. III—IV. Moscou, 1871; 8°.

Verein, Naturwissenschaftlicher, zu Magdeburg: Abhandlungen. Heft 2. Magdeburg, 1870; 8°. — Sitzungsberichte, 1870. 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXI. Jahrgang, Nr. 20—22. Wien, 1871; 4°.

Zeitschrift für Chemie von Beilstein, Fittig & Hübner. XIV. Jahrgang. N. R. VII. Band, 5. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

— des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins: Zeitschrift. XXIII. Jahrgang, 8. Heft. Wien, 1871; 4°.

XVI. SITZUNG VOM 15. JUNI 1871.

Herr Hofrath C. Winnecke in Carlsruhe dankt mit Schreiben vom 10. Juni für die ihm zuerkannten zwei Preise für Entdeckung teleskopischer Kometen und bestätigt gleichzeitig den Empfang der betreffenden Preissumme von 40 Stück k. k. österr. Ducaten.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Die doppelten Schläfelinien der Raçenschädel, und ihr Verhältniss zur Form der Hirnschale“, vom Herrn Hofrathe Dr. J. Hyrtl.

Diese Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.

„Über die absolute Veränderlichkeit der Blüthezeit der Pflanzen“, vom Herrn Vice-Director K. Fritsch.

„Über die Abhängigkeit des Erdmagnetismus von der Rotation der Sonne“, vom Herrn Director Dr. K. Hornstein in Prag.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften, Ungarische: Értesitöje. IV. Evfolyam. 1—12 szám. Pest, 1870; 8°. — Nyelvtud. Értekezések. VII.—X. és uj I.—II. szám. — Történettud. Értekezések. XII sz. — Törvenytud. Értekez. XI—XII. sz. — Természettud. Értekez. I.—III. sz. — Társadalmitud. Értekezések XIII. sz. Pest, 1870; 8°.

Annalen der Chemie & Pharmacie, von Wöhler, Liebig & Kopp. N. R. Band LXXXII, Heft 2. Leipzig & Heidelberg, 1871; 8°.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Vol. I. Pisa, 1871; 8°.

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift. 9. Jahrgang, Nr. 17. Wien, 1871; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1845—1846..(Bd. 77. 21.) Altona, 1871; 4°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles: N. P. Tome XLI, Nr. 161. Genève, Lausanne, Paris, 1871; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXII. Jahrgang. Nr. 23—24. Wien, 1871; 4°.

Heidelberg, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem J. 1870—71. 4° & 8°.

Istituto, R., Lombardo di Scienze e Lettere: Memorie: Classe di Lettere e Scienze morali e politiche, Vol. XI (II della serie III) fasc. 3. e ultimo; Vol. XII (III della serie III.) fasc. 1. Milano, 1870. — Classe di Scienze matematiche e naturali. Vol. XI (II della serie III) fasc. 3. e ultimo; Vol. XII (III della serie III) fasc. 1. Milano, 1870; 4°. — Rendiconti. Serie II. Vol. II. fasc. 17—20. 1869; Vol. III. fasc. 1—15. 1870. 8°. — Rapporti sui progressi delle Scienze I. Milano, 1870; 8°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band III, 7. Heft. Leipzig, 1811; 8°.

Landbote, Der steirische: 4. Jahrgang, Nr. 12. Graz, 1871; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrg. 1871, Nr. 13. Wien; 8°.

Lotos. XXI. Jahrgang. Mai 1871. Prag; 8°.

Mittheilungen des k. k. technischen und administrativen Militär-Comité. Jahrgang 1871, 6. Heft. Wien; 8°.

Nature. Nr. 84, Vol. IV. London, 1871; 4°.

Peters, Karl F., Über Reste von Dinotherium aus der obersten Miocänstufe der südlichen Steiermark. (Aus dem 3. Hefte des III. Bandes der Mittheilungen des naturw. Vereines für Steiermark. 1871.) 8°.

Tessari, Domenico, Sopra i principii della projezione assonometrica. (Estr. dagli Annali del R. Museo Industriale Italiano.) Torino, 1871; 8°.

Verein der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg: Archiv. 24. Jahr. Neubrandenburg, 1871; 8°.

Verein, naturforschender, zu Brünn: Verhandlungen. V[illegible] Band 1. & 2. Heft. [illegible] Brünn. [illegible]. 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXI. Jahrgang. Nr. 23. Wien. [illegible]. 4°.

Zeitschrift für Chemie, von Beilstein, Fittig & Hübner. XIV. Jahrgang. N. F. VII. Band [illegible]. Heft. Leipzig. [illegible]. 8°.

Genügen die bis jetzt angewendeten Methoden, um kleine Mengen Zucker mit Bestimmtheit im Harn nachzuweisen.

Von Professor Dr. J. Seegen.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. April 1871.)

Die Möglichkeit kleine Mengen Zucker im Harne mit Bestimmtheit nachzuweisen, hat eine weittragende theoretische und praktische Bedeutung.

Es knüpft sich ein grosses wissenschaftliches Interesse an die Entscheidung der Frage, ob kleine Mengen Zucker im Harne gesunder Menschen vorkommen, ob also Zucker wie Harnsäure, wie Kreatinin u. s. f. ein Product des normalen Stoffumsatzes im thierischen Organismus ist.

Die Bejahung oder Verneinung dieser Frage hat, abgesehen davon, dass durch dieselbe unsere Einsicht in den normalen Stoffumsatz gefördert wird, eine grosse Bedeutung für die Auffassung eines wichtigen unter dem Namen *Diabetes mellitus* gekannten Krankheitsprocesses. Wir müssen, wenn Zucker im Harn als normaler Bestandtheil vorkommt, in der Zuckerharnruhr eben nur die Steigerung einer normalen Ausscheidung sehen, wir müssten aber die Zuckerausscheidung als den Ausdruck eines anomalen Stoffumsatzes ansehen, wenn der normale Harn vollständig zuckerfrei ist.

Diese verschiedene Auffassung hat einen massgebenden Einfluss auf die Anschauung über die Bedeutung der Zuckerausscheidung. Wenn Zucker in jedem gesunden Harne vorkommt, dann ist man berechtigt, von einer gefahrlosen Meliturie zu sprechen; anders ist es, wenn auch die kleinste Menge Zucker als anomales Umsetzungsproduct anzusehen ist, es erklärt sich dann, was die klinische Erfahrung lehrt, dass so häufig auch die Anwesenheit der kleinsten Zuckermengen deletäre Wirkungen übt.

Es hat ferner ein grosses Interesse feststellen zu können, ob unter bestimmten physiologischen Körperzuständen, wie z. B.

während der Schwangerschaft, während des Säugegeschäftes Zucker im Harn auftrete, ob der Organismus unter dem Einflusse verschiedener äusserer Agentien, wie z. B. in Folge von Äther- und Chloroforminhalation Zucker ausscheide oder nicht, ob ferner manche pathologische Veränderungen, wie z. B. manche Gehirn- und Rückenmarkserkrankungen von der Ausscheidung kleiner Zuckermengen begleitet sind.

Keine der genannten Fragen ist bis jetzt endgiltig entschieden. Brücke hat bekanntlich zuerst ausgesprochen und durch Versuche zu beweisen gesucht, dass der normale Harn Zucker enthalte. Bence Jones hat diese Annahme durch weitere Versuche bestätigt. Kühne u. a. sehen den Beweis als unumstösslich hergestellt an, trotzdem andere Forscher wie Friedländer, Wiederhold, Meissner und Babo manche der Versuche durch Gegenversuche als nicht beweiskräftig dargestellt haben.

Derselbe Widerspruch besteht in Bezug auf die Annahme, dass Zucker unter manchen physiologischen Zuständen, oder unter der Einwirkung von medicamentösen Stoffen im Harne erscheine. Brücke u. A. fanden z. B. dass Säugende nicht selten eine grössere Menge Zucker im Harne ausschieden, während Leconte nach sorgfältigen Versuchen dieses Vorkommen leugnet.

Nicht selten kommt es in neuerer Zeit, in welcher von Ärzten auf Zucker im Harn sehr gefahndet wird, vor, dass auf Grundlage einer chemischen Analyse Zuckerharnruhr diagnosticirt wird, während ein anderer eben so sorgfältiger Untersucher den Zucker nicht nachweisen kann.

Diese folgenschweren Widersprüche in Bezug auf eine anscheinend so einfache Frage hatten mich veranlasst, die Methoden der Zuckerbestimmung genau zu studiren, die Grenze ihrer Genauigkeit zu prüfen und die Frage zu erörtern, ob es mit den uns zu Gebote stehenden Untersuchungsmethoden überhaupt möglich sei, kleine Mengen Zucker im Harn mit Bestimmtheit und mit Ausschluss jeder andern ähnlich reagirenden Substanz nachzuweisen. Die Arbeit ist eine ausgedehnte geworden, weil es nöthig war, alle wichtigen Methoden, und speciell alle jene welche für den Nachweis von Zucker im normalen Harn als beweisend angegeben werden, in den Kreis der Untersuchung zu ziehen.

Der Physiologe und der Arzt sind bei der Lösung der Frage, ob es möglich sei kleine Mengen Zucker im Harn aufzufinden, in gleichem Masse betheiligt; der Chemiker, an welchen im gegebenen Falle Beide mit der Forderung herantreten, zu entscheiden ob in einem Harne eine minimale Quantität Zucker vorhanden sei oder nicht, muss die Grenze der Leistungsfähigkeit seiner Methoden kennen. Allen dürfte daher eine eingehende Prüfung dieser Frage nicht unwillkommen sein.

Die gebräuchlichsten Methoden, den Zucker im Harn zu entdecken, sind:

a) Die Trommer'sche Probe.
b) Die Heller-Moor'sche Kaliprobe.
c) Die Böttcher'sche Wismuthprobe.
d) Die optische Bestimmung mit Hilfe des Polarisationsapparates.
e) Die Gährungsprobe.

An diese Methoden reihen sich dann andere weitläufigere, deren Aufgabe es ist, den Zucker möglichst von den anderen Bestandtheilen zu isoliren und in einer leicht zerlegbaren Verbindung darzustellen. Die gangbarsten Methoden sind die Darstellung von:

α) Bleisacharaten.
β) Zuckerkali.

Wenn es sich um eine Methode handelt, den Zucker rasch zum Behufe einer ärztlichen Diagnose nachzuweisen, kommen nur die ersten vier Methoden in Betracht; die Gährungsprobe gibt kein rasches Resultat; die Isolirung des Zuckers erfordert Zeit und einen mit diesen Arbeiten speciell vertrauten Arbeiter. Für die dem Arzte so wichtige quantitative Zuckerbestimmung können nur die Trommer'sche und die optische Methode benützt werden. Alle anderen Methoden gestatten keine quantitativen Bestimmungen.

Ich will nun meine Erfahrungen in Bezug auf die einzelnen Methoden mittheilen:

1. Die werthvollste Methode für qualitative wie für quantitative Zuckerbestimmung ist die mittelst einer alkalischen Lösung von schwefelsaurem Kupferoxyd, welche auf der Eigenschaft des Traubenzuckers fusst, Metalloxyde, also auch Kupferoxyd in alkalischer Lösung zu reduciren.

Die Probe wird bekanntlich entweder nach Trommer's Methode ausgeführt, indem der Harn mit Ätzkali vermischt wird und der Mischung einige Tropfen einer Lösung von schwefelsaurem Kupferoxyd zugefügt werden. Der etwa vorhandene Zucker bildet das Lösungsmittel für das durch Zusatz von Kali ausgeschiedene Kupferoxydhydrat, oder sie wird mittelst der Fehling'schen Flüssigkeit ausgeführt, in welcher das Kupferoxyd mit Hilfe von weinsaurem Kali-Natron in Ätzkali oder Ätznatron in Lösung erhalten wird.

Ich ziehe die Fehling'sche Probe der Trommer'schen vor, weil eben jene störende Ausscheidung von Kupferoxydhydrat verhütet wird, weil ferner bei Trommer's Methode dadurch, dass dem Harn zuerst Ätzkali zugesetzt wird, leicht eine Zersetzung kleiner Zuckerquantitäten stattfinden kann, was, zumal wenn es sich um die Auffindung von kleinen Mengen handelt, von grosser Bedeutung ist. Die Fehling'sche Methode kann den weit überwiegenden Nachtheil haben, dass sie eine Reduction zeigt, auch wo kein Zucker vorhanden ist, da das Seignettesalz bei langer Berührung mit dem Kupferoxyd auch eine allmälige Reduction einleitet und diese sich beim Erhitzen steigert. Man vermeidet diese Veränderung der Probeflüssigkeit, wenn man die beiden Flüssigkeiten getrennt aufbewahrt und dieselben erst vor jedem Versuche zu gleichen Theilen mischt. Wichtig ist es ferner, dass die Seignettesalzlösung bei der Bereitung auf 100° erhitzt wird, um etwa vorhandene Schimmelsporen zu zerstören, da diese eine Reduction veranlassen.

Die Reaction ist vortrefflich, wenn eine bemerkenswerthe Menge Zucker vorhanden ist, es kommt rasch beim Erhitzen zu einer reichlichen, sehr charakteristischen Ausscheidung von Kupferoxydul oder Kupferoxydulhydrat. Anders verhält es sich dagegen, wenn die Zuckerquantität nur in geringer Menge im Harn vorhanden ist; die Reaction ist dann viel weniger charakteristisch, es kommt nicht mehr zur Ausfällung von Kupferoxydulhydrat, wiewohl eine deutliche Reaction stattfindet. Ich beobachtete eine ganze Reihe eigenthümlicher Reactionen, am häufigsten treten sie in folgender Weise auf: *a)* die Flüssigkeit trübt sich beim Kochen und wird schmutzig grün oder schmutzig gelb; *b)* die blaue Flüssigkeit ändert ihre Farbe, wird gelb oder braun und erst nach kurzem Stehen tritt eine leichte Trübung auf; es bildet sich

ein Dichroismus, die Flüssigkeit ist schmutzig, gelb-grün bei auffallendem und braun bei durchfallendem Lichte; *c)* die blaue Flüssigkeit wird weingelb, bleibt aber ganz klar, durchsichtig; nur am Boden finden sich die in Flocken ausgeschiedenen Phosphate, die vom eingebetteten Kupferoxydul leicht gelb oder rothbraun gefärbt sind.

Noch weniger ist die Fehling'sche Methode zu gebrauchen, wenn es sich darum handelt, im diabetischen Harne kleine Zuckermengen quantitativ zu bestimmen. Ich habe die Erfahrung gemacht, dass eine genaue quantitative Bestimmung nicht mehr möglich ist, wenn der Zucker auf 0·5% sinkt und in manchen Harnen kann selbst 1% Zucker nicht mehr quantitativ bestimmt werden. Die Reaction erfolgt dann nämlich in folgender Weise: die Kupferlösung wird bei Zuthat von Harn erst schmutzig grün, allmälig wird die Ausscheidung gelb bis braun, aber sie bleibt in der Flüssigkeit suspendirt; diese wird selbst bei mehrstündigem Stehen nicht klar; die Grenze der Reaction ist nicht zu treffen, also die quantitative Bestimmung unmöglich.

Ich hatte diese eigenthümliche Reaction zuerst bei Diabetikern beobachtet, bei denen die Krankheit in Folge von zweckmässiger Diät oder entsprechender Behandlung gebessert war. Im Beginne der Behandlung, während der Harn z. B. 3—5% Zucker enthielt, konnte man in dem aufs 10fache mit Wasser verdünnten Harn, der also in dieser Verdünnung nur 0·3—0·5% Zucker enthielt, die Zuckermenge genau bestimmen, da sich bei Hinzufügung des Harnes und in dem Masse als man der Reactionsgrenze näher kam, der schöne rothbraune Niederschlag von Cuoxydul rasch absetzte, und die darüber stehende Flüssigkeit klar und farblos wurde. War nun die Zuckermenge auf etwa 0·3—0·5 gesunken, also quantitativ dem aufs 10fache verdünnten ursprünglichen Harn an Zuckergehalt gleich und wurde mit diesem unverdünnten Harne die Analyse ausgeführt, entstand jene früher erwähnte schmutzig gelbe Ausscheidung, die sich nicht klar absetzt.

Ich hatte diese Beobachtung zuerst in Virchow's Archiv im J. 1861[1] mitgetheilt, und sprach damals die Vermuthung aus, es

---

[1] Seegen. Beiträge zur Casuistik der Meliturie.

könnte vielleicht die Einwirkung des Heilmittels sich dadurch äussern, dass aus dem Leber-Amylum nicht mehr Zucker sondern ein dem Dextrin und Gummi verwandter Körper gebildet werde.

Lehmann[1] beobachtete einen Unterschied in der Reaction zwischen diabetischem Harne, und normalem zuckerhaltigem Harne. Der diabetische Harn gibt nach ihm, auch wenn nur wenig Zucker vorhanden ist, mit schwefelsaurem Kupferoxyd und Kali die Reaction „fast ebenso wie aus reiner Krümelzuckerlösung, während mehr normaler, zufällig zuckerhältiger Harn eine weniger auffällige Reaction gibt, letzterer lässt noch andere Stoffe mit dem Kupferoxydul fallen, welche die Farbe des Niederschlages sehr modificiren, während im eigentlichen diabetes mellitus der Harn frei von jenen Substanzen ist, welche die Reaction stören".

Kühne[2] theilt eine ähnliche Beobachtung mit, er bemerkt nämlich, dass es diabetische Harne gibt, welche nur einen Theil des Oxyduls ausfällen lassen, einen anderen Theil in Lösung erhalten; ja noch solche, wo bei 1—1½% Zucker die Oxydulfällung ausbleibt. Kühne bemerkt gleichfalls, dass die Verschiedenartigkeit der Reaction mit dem verschiedenartigen Verlaufe des Diabetes zusammenhänge; er meint, dass bei den leichten, langsam verlaufenden Fällen ein Stoff im Harne vorhanden sei, welcher das ausgeschiedene Kupferoxydul löst, während dieser Stoff in den schweren Fällen fehle.

Ich habe bei zahllosen Harnuntersuchungen bei Diabetikern niemals das Ausbleiben einer Fällung oder respective das Gelöstbleiben des gebildeten Kupferoxyduls beobachtet; stets, selbst wenn nur sehr kleine Menge Zucker vorhanden waren, war das Kupferoxyd zu Oxydulhydrat reducirt, nur blieb dieses suspendirt, trübte die Flüssigkeit und setzte sich nur sehr langsam ab. Die Verschiedenartigkeit der Reaction, die ich früher bei demselben Diabetiker je nach dem verschiedenartigen Grade der Erkrankung beobachtet hatte, fand ich bald bei verschiedenen Formen des Diabetes; es frappirte mich vorzüglich, dass bei Diabetesformen mit übermässiger Harnsecretion auch noch

---

[1] Lehmann. Lehrbuch d. physiol. Chemie. 1853. Bd. 1.
[2] Kühne. Lesebuch d. physiol. Chemie. 1868.

mässige Mengen Zucker eine schöne Reaction gaben, rasches Ausscheiden von Cuoxydul, während bei Diabetes mit spärlicher Harnsecretion auch bedeutend grosse Mengen Zucker, selbst wenn diese 2% und darüber betrugen, jene oben beschriebene schmutzig gelbe Trübung geben, dass dagegen eine viel bessere Reaction eintritt, sowie ein solcher Harn aufs 5- oder 10fache mit Wasser verdünnt wird. Dieses Verhältniss machte mir es zuerst wahrscheinlich, dass meine frühere Vermuthung, es handle sich um verschiedene Zuckerarten oder um Zwischenglieder zwischen Glykogen und Zucker, eine irrige sei; es sei vielmehr die Verschiedenartigkeit der Reaction von dem Wassergehalte des Harnes abhängig, die Reduction sei eine vollständige, wenn der Harn künstlich mit Wasser verdünnt sei, oder wenn er wie bei hochgradigem Diabetes mit Polyurie ursprünglich sehr wasserreich sei. Die Reduction sei aber eine um so unvollständigere, je concentrirter der Harn, und je mehr Harnbestandtheile mit dem Zucker der Kupferlösung zugefügt werden.

Um die Richtigkeit dieser Anschauung zu prüfen, machte ich folgende Versuche:

A) Ich löste eine Menge Traubenzucker in 100 CC. Wasser; einige Tropfen dieser Lösung reducirten Kupferoxyd zum schönsten rothbraunen, sich klar absetzenden Kupferoxydul. 10 CC. dieser Lösung werden mit 90 CC. Wasser verdünnt; ich verbrauche 35·5 CC. dieser verdünnten Lösung zur Reduction von 5 CC. Fehling'scher Kupferoxydlösung [1], die ursprüngliche Lösung enthält 1·4% Zucker.

B) Die dem Gewichte nach gleiche Menge Traubenzucker wird in 100 Grm. Harn gelöst. Bei einer qualitativen Prüfung wird die Fehling'sche Flüssigkeit rasch verändert, es bildet sich eine gelbe, langsam absetzende Ausscheidung; nach einigen Stunden findet sich am Boden des Proberöhrchens ein rothbrauner Niederschlag, darüber eine etwas trübe, gelbe Flüssigkeit.

10 CC. dieses Zuckerharns mit 90 CC. Harn verdünnt, die quantitave Analyse versucht, die Kupferlösung trübt sich, wurde erst grün, dann gelb bis orangefarben, keine klare Ausscheidung.

10 CC. dieses Zuckerharns mit 90 CC. Wasser verdünnt, nachdem 10 CC. dieser Verdünnung zu 5 CC. Kupferlösung zugeflossen, begann

[1] Der Titre der Fehling'schen Kupferlösung ist so gestellt, dass zur Reduction von 5 CC. derselben 50 Mg. Zucker erforderlich sind.

eine schöne, rothe Ausscheidung, nach Zuthat von 35·2% war die Reduction vollendet.

10 CC. dieses Zuckerharns aufs 5fache mit Harn verdünnt, gibt gleichfalls keine klare Ausfällung, die Flüssigkeit bleibt trübe, schmutzig gelb.

10 CC. aufs 2fache mit Harn verdünnt, gibt eine schöne Reduction, bei Zuthat von circa 7 CC der verdünnten Harnlösung ist die Reduction vollkommen. 10 CC. des ursprünglichen Zuckerharns reduciren gleichfalls vollständig, es bildet sich eine dichte, orangegelbe Ausfällung, die sich nicht rasch aber doch ziemlich klar absetzt, nach Zuthat von 3·5 CC. der Zuckerlösung ist die Reduction beendet.

C) 10 CC. des Zuckerharns wurden mit 90 CC. Harn verdünnt und im Wasserbade zur Trockene eingedampft. Der Rückstand in 10 CC. Wasser gelöst, die Lösung färbt die Fehling'sche Flüssigkeit braungelb, und diese wird rasch trübe, schmutzig-dunkelgelb, aber selbst nachdem die ganze Lösung hinzugefügt war, erfolgte keine ordentliche Ausscheidung.

Diese 10 CC. der wässerigen Lösung enthielten 0·14 Grm. Zucker, also 1·4% Zucker; von einer so reichen, rein wässrigen Zuckerlösung hätten wenige Tropfen zu einer guten charakteristischen Reduction genügt, während jetzt die ganze Zuckermenge kaum eine Fällung zu bewirken vermochte.

Durch diese Versuche war der Beweis geliefert, dass die Harnbestandtheile als solche die Reduction verhinderten, dass sie das reducirte Kupferoxydul in Lösung hielten und die Ausfällung des suspendirten Oxyduls verhinderten.

Winogradoff[1] und nach ihm Kühne[2] behaupten, es enthalte nur der normale Harn jenen Stoff, welcher die Ausscheidung des Kupferoxyduls verhindere, während derselbe im diabetischen Harne fehle. Kühne bezieht das Fehlen des die Ausscheidung verhindernden Stoffes nicht auf alle diabetischen Harne, er findet, dass bei langsam verlaufenden Fällen, bei denen, abgesehen vom percentischen Zuckergehalte des Harnes, die übrigen Symptome fehlen oder weniger auffällig sind, und in denen auch der Harn gefärbt bleibt, die Kupferoxydul lösenden Stoffe noch angetroffen werden, während in den ausgeprägten Fällen mit massenhafter Ausscheidung sehr blassen Harns, mit trockener Haut und häufiger Entstehung von Linsenkatarakten, wenig oder keine Spur von diesen Stoffen im Harne entleert werde. Solche Fälle müssen demnach auch mit einem anderen

---

[1] Virchow's Archiv 27. Bd.

[2] a. a. O.

krankhaften Processe als dem der gesteigerten Zuckerbildung complicirt sein, welcher eben in der Nichtbildung oder Nichtausscheidung jener Stoffe liegt. Kühne hat richtig beobachtet, dass diabetische Harne sich verschieden gegen Kupferlösung verhalten; er hat ferner richtig beobachtet, dass es gerade die schwereren Formen sind, bei welchen der Harn eine rasche Reduction bewirkt. Unrichtig ist es, was aber dem Chemiker nicht zur Last fallen kann, wenn er Kataraktbildung als ein Symptom jener schweren Formen bezeichnet; es tritt diese nicht selten bei der milden, lange bestehenden Form auf. Nicht richtig ist ferner, wenn Kühne behauptet, dass bei diabetischem Harne, die 1—1½% enthalten, noch Oxydulfällung ausbleibt. Ich habe unzählige Analysen bei mehr als 200 Diabetikern gemacht, ich sah nie das Ausbleiben einer Fällung, wenn auch nur 0·2% Zucker vorhanden war. Bei der leichtesten Diabetesform, und bei so geringem Zuckergehalte, dass mittelst Sacharimeter in dem vollständig entfärbten Harne noch keine Ablenkung nachgewiesen werden konnte, war die Reduction des Kupferoxydes stets durch eine bemerkenswerthe Trübung nachzuweisen, und selbst, wo diese Trübung nicht augenblicklich entstand, erfolgte sie doch nach wenigen Minuten. Aber vor allem unrichtig ist die Deutung der verschiedenen Reactionen durch die An- oder Abwesenheit eines bestimmten Harnbestandtheiles und unbegründet ist die darauf basirte Theorie, dass bei schweren Diabetesformen noch eine Veränderung im Stoffumsatze vorhanden sei, dass jener normale Harnbestandtheil fehle, welcher das aus der Reduction des Kupferoxyds hervorgehende Kupferoxydul in Lösung erhalte.

Meine oben angeführten Versuche zeigten, dass auch durch normalen Harn die Ausscheidung von Kupferoxydul weniger behindert wird, wenn nur eine kleine Menge dieses Harnes zugesetzt wird, und dass diese Ausscheidung um so unvollständiger wird, je mehr Harnbestandtheile überhaupt mit dem Zucker der Kupferlösung zugeführt werden. Mit dem Ergebnisse dieser Versuche stimmt auch die Beobachtung, dass bei leichten Diabetesformen mit concentrirtem Harn die Fällung des Kupferoxyduls minder gut und rasch von Statten geht als bei schweren Fällen mit Polyurie, d. h. mit wässerigem Harne. In jenen Fällen werden mit dem Zucker beträchtliche Mengen Harnbestandtheile zugeführt, während

in diesen Fällen die Zufuhr von Harnbestandtheilen eine geringe ist und die Wirkung ganz dieselbe ist, als ob man Harn durch Wasser verdünnt hätte.

Die nächste Aufgabe war, zu versuchen, ob sich ermitteln liesse, welcher Harnbestandtheil die Ausfällung des Cuoxyduls beeinträchtige. Ich machte zu dem Zwecke folgende Versuche:

D) Von einem 1·4% hältigen diabetischen Harn wurden:

1. 10 CC. mit 90 CC. Wasser versetzt. SO_3 Cuoxyd wird zu schönem rothen Oxydul reducirt.
2. 10 CC. mit 90 CC. schwach saurem Harne versetzt. Die Reduction nicht vollständig, gelbe nicht klar absetzende Ausscheidung.
3. 10 CC. mit 90 CC. stark saurem Harne versetzt, gibt dieselbe Reaction,
4. 10 CC. mit 90 CC. einer 2% wässerigen Harnstofflösung verdünnt, Reduction sehr schön, Ausscheidung von rothem Oxydul.
5. 10 CC. mit 90 CC. Wasser, in welchem 2 Grm. Harnstoff und 0·05 C. Harnsäure gelöst sind, schöne Ausscheidung von rothem Oxydul.
6. 10 CC. mit 90 CC. Wasser, in welchem 2 Grm. Harnstoff, 0·05 Harnsäure und 0·05 Kreatinin gelöst sind, vollständige Reduction, das ausgeschiedene Oxydulhydrat bleibt länger suspendirt.
7. 10 CC. mit 90 CC. Wasser, in welchem 0·04 Grm. Kreatinin aufgelöst sind, bewirkt eine schöne Ausscheidung von rothem Oxydul.
8. 10 CC. mit 90 CC. Harn vermischt und durch Kochen mit Thierkohle entfärbt, bewirkt eine weit bessere Reduction als die nicht entfärbte Mischung, das gelbe Oxydulhydrat setzt sich nach kurzer Zeit klar ab, und es war möglich in diesem so vorbereiteten Harn eine quantitative Zuckerbestimmung zu machen.

   Diese Wirkung der Entfärbung war keine constante; in anderen Versuchen mit anderen Harnen blieb sie aus, der entfärbte Harn reagirte nicht anders als der ursprüngliche Harn.
9. Ammoniak verhindert nur, wenn derselbe in beträchtlicher Menge zugefügt wird, die Reduction, es wird durch einen Ammoniak in beträchtlicher Menge enthaltenden Harn die Kupferlösung entfärbt, ohne dass eine Ausscheidung erfolgt. In mässiger Menge beeinflusst Ammoniak die Reaction nicht. Ich habe zu 2 Proben Kupferlösung von dem sub 2 angeführten Zuckerharn hinzugefügt, die eine derselben mit Ammoniak versetzt und beide Proben durch einige Stunden in der Kälte stehen lassen; es fand sich in beiden am Boden eine Ausscheidung von Kupferoxydulhydrat.

   In einer anderen Probe wurde der Kupferlösung Zuckerharn mit Ammoniak versetzt zugefügt, und das Gemisch erhitzt; es entstand zuerst nur eine Gelbfärbung, nach einer Weile hatte sich Cuoxydulhydrat ausgeschieden, trotzdem die Flüssigkeit noch deutlich nach Ammoniak roch.

Es geht aus diesen Versuchen hervor, dass jener Harnbestandtheil, welcher die Ausfällung des reducirten Oxyduls hindert, oder dasselbe theilweise in Lösung erhält, noch nicht gekannt ist. Winogradoff meinte, Kreatinin und Farbstoffe des Harns wären die Lösungsmittel für das gebildete Kupferoxydul. In Bezug auf Kreatinin habe ich diese Wirkung nicht gefunden, eine zuckerhältige Kreatininlösung wirkt wie wässerige Zuckerlösung, beide reagiren in gleicher Weise auf schwefelsaures Cuoxyd, es erfolgt eine Ausscheidung von Kupferoxydul. Nur in jener Flüssigkeit, in welcher Kreatinin mit Harnstoff und Harnsäure combinirt war, war die Ausscheidung von Kupferoxydulhydrat eine minder rasche. Dagegen scheinen die Farbstoffe entschieden die Reaction zu beeinflussen. Aber dieser Einfluss ist, soweit die Versuche zeigen, lange nicht bedeutend genug, um die so unendlich intensivere Wirkung einer wässerigen Zuckerlösung im Vergleiche zu einer gleich starken Harnzuckerlösung auf Cuoxyd zu erklären. Auch der Ammoniakgehalt des Harns, wenn ein solcher überhaupt im normalen Harne vorhanden wäre, oder sich bei Erhitzung mit Alkali aus dem Harnstoffe entwickelte, ist zu gering, um einen bemerkenswerthen Einfluss auf die Reaction haben zu können, oder die Ausfällung ganz zu verhindern. Offenbar addiren sich die kleinen, die Ausscheidung retardirenden Wirkungen der genannten Harnbestandtheile, und nebst diesen wirken wahrscheinlich noch manche Harnbestandtheile, sogenannte Extractivstoffe hemmend, Stoffe, die noch nicht in ihrer Wesenheit gekannt sind, von denen man also umsoweniger berechtigt ist zu behaupten, dass sie im diabetischen Harne fehlen. Je concentrirter ein Harn, desto grösser fällt die Wirkung aller dieser die Reaction beeinflussenden Bestandtheile aus, je verdünnter er ist, desto weniger kommt die störende Einwirkung zur Erscheinung.

Die nächste Frage war die, zu ermitteln, bis zu welcher Grenze der Verdünnung Zucker im Harne durch Fehling'sche Flüssigkeit nachzuweisen ist.

e) 1. Ich mischte von den oben erwähnten 1·4% Zuckerlösung 10 CC. mit 90 CC. Harn; es tritt rasch eine starke Reduction auf, die Kupferlösung wird beim Erhitzen trüb, schmutzig gelb, der Niederschlag setzt sich nicht klar ab.

Die Mischung enthielt 0·14% Zucker.

2. 10 CC. derselben Zuckerlösung mit 190 CC. Harn verdünnt, die Mischung reducirt deutlich schmutzig gelbe Trübung, die Probeflüssigkeit enthält 0·07%.
3. 10 CC. der Zuckerlösung mit 290 CC. Harn verdünnt, die Culösung wird rasch gelb gefärbt, nach einer Weile wird die Flüssigkeit trüb, deutlicher Dichroismus, schmutzig grün im auffallenden, braun im durchfallenden Lichte. Die Mischung enthält 0·045% Zucker.
4. 10 CC. der Zuckerlösung mit 390 CC. Harn gemischt, die Wirkung auf Kupferlösung wie früher; rasche Gelbfärbung, nach einer Weile dichroitische Trübung, Zuckergehalt der Mischung 0·035%.

Ich verwendete stets 5CC des zuckerhältigen Harnes, diese enthalten im Versuche 4) 0·0017 Grm. Zucker, diese kleine Menge wirkt noch reducirend und zwar wird das gebildete Oxydulhydrat ausgeschieden und trübt den Harn.

Kühne[1] nimmt mit Brücke an, dass der normale Harn Zucker enthalte, er gibt den Zuckergehalt auf 0·1% an. Er frägt wie es komme, dass die Trommer'sche Probe bei dem normalen Harn im Stiche lasse, d. h. warum man den Zucker desselben nicht durch diese Probe nachweisen könne, während sie in ebenso schwach zuckerhältigem, diabetischem Harne einen positiven Aufschluss gibt. Er beantwortet die Frage dahin, man könne den Zucker auch im normalen Harne durch die Trommer'sche Probe nachweisen und zwar dadurch, dass die früher blaue oder grüne Flüssigkeit gelb werde. Der Unterschied, dass bei einem diabetischen Harne, welcher noch etwa 1 per mille Zucker enthält, eine Ausscheidung von Kupferoxydul erfolge, während sich im normalen Harne, die durch den Zucker bewirkte Reduction nur durch die Farbenveränderung manifestire, liege darin, dass der normale Harn Stoffe enthält, welche das gebildete Kupferoxydul in Lösung erhalten. Man brauche nur zu normalem Harn gewisse Mengen von diabetischem Harne oder von einer gewogenen Zuckermenge hinzuzugeben, um sich zu überzeugen, dass selbst bei einem auf $^1/_2$%, nicht selten bis zu 1% gesteigerten Zuckergehalte die Trommer'sche Probe negativ ausfalle, wenn man sie nach der Ausfällung des Kupferoxyduls beurtheilt. Es sei bei der Trommer'schen Probe zwischen dem zuckerärmsten diabetischen und dem zuckerreichsten normalen Harne diese Differenz, dass beim normalen Harne die Ausfällung des Cuoxyduls stets ausbleibe.

---

[1] a. a. O.

Meine Versuche bestätigen dies nicht; der mit Zuckerlösung versetzte normale Harn zeigt noch bei dem Vorhandensein von 0·03% Zucker eine Ausscheidung von Oxydulhydrat, diese ist minimal und tritt nur als Trübung zu Tage, aber ganz dasselbe ist auch mit diabetischem, nicht wässerigem Harne der Fall, wenn er kleine Mengen Zucker enthält. Würde normaler Harn auch nur 0·03% Zucker enthalten, müsste also derselbe durch Ausscheidung von Oxydulhydrat nachweisbar sein.

Es lässt sich also schon mit Rücksicht auf das Verhalten des normalen Harns zur Trommer'schen Probe sagen, dass die Annahme, der normale Harn enthalte 0·1% Zucker, ungerechtfertigt sei, und dass dieser Gehalt jedenfalls unter 0·03 sein müsse.

Unzweifelhaft ist aber auch die Gelb- oder Braunfärbung des Kupferoxyds als eine Reduction aufzufassen, da die durch Zusatz von Harn in ihrer Farbe veränderte Kupferlösung an der Luft unter Sauerstoffaufnahme wieder die blaue Farbe annimmt. Man könnte also auch die Farbenveränderung der Kupferlösung durch normalen Harn als einen Beweis für die Anwesenheit von Zucker, wenn auch in minimaler Quantität annehmen — wenn der Harn nicht auch andere Stoffe enthielte, welche die Reduction bewirken können. Unter den bekannten Harnbestandtheilen führt Kühne Kreatinin und Harnsäure als reducirende Stoffe auf.

Die reducirende Wirkung des Kreatinin konnte ich nicht nachweisen, dagegen fand ich die von vielen anderen Forschern beobachtete und speciell von Meissner und Babo[1] so genau studirte reducirende Wirkung der Harnsäure vollständig bestätigt.

Ich habe 0·5 Grm. Harnsäure in 1600 Wasser gelöst, 10 CC. dieser Flüssigkeit, welche also 0·003 Grm. Harnsäure enthielten, brachten in der Fehling'schen Flüssigkeit beim Erhitzen eine schöne Ausscheidung von rothem Oxydul an der Wand der Eprouvette hervor.

Dieselbe Reaction wurde erhalten mit Harnsäurekrystallen, die sich unmittelbar aus dem Harn ausschieden und mit einem Sedimente von Uraten.

---

[1] Zeitschrift für rationelle Medicin, 3. Reihe, 2. Band.

Ich habe ferner beobachtet, dass Harne, die sehr reich an Harnsäure sind, die Lösung von Cuoxyd gerade so verändern, wie eine Harnlösung, welche eine kleine Zuckerquantität enthält, die blaue Culösung wird gelb bis gelbbraun und nach kürzerem oder längerem Stehen bildet sich eine dichroitische Trübung, zuweilen selbst eine dichtere Ausscheidung von Oxydulhydrat.

So vortrefflich also Trommer's Zuckerreaction ist, um eine grössere Menge Zucker qualitativ und quantitativ zu bestimmen, ist sie doch nicht genügend, um minimale Mengen Zucker mit unzweifelhafter Bestimmtheit anzugeben. Eine Reduction, die sich blos durch eine leichte gelbe Trübung oder durch eine dichroitische Färbung der Culösung ausspricht, kann eben so gut auf Harnsäure wie auf Zucker bezogen werden. Noch weniger ist es gestattet, die blosse Gelbfärbung ohne Ausscheidung als einen bestimmten Beweis für die Anwesenheit von Zucker anzusehen, es ist im Gegentheile höchst wahrscheinlich, dass diese fast durch jeden normalen Harn hervorgebrachte Reduction, durch die Harnsäure desselben veranlasst sei. Ich habe zwar wiederholt in Harnen mit zweifelhafter Reaction die Harnsäure durch Zusatz von Salzsäure auszuscheiden gesucht und das Filtrat mit Cuoxyd geprüft, aber auch da gibt das meist unveränderte Auftreten der schwachen Reduction keinen Beweis für Zucker; denn erstens scheidet sich nicht alle Harnsäure aus, es bleibt noch immer eine kleine Menge gelöst, endlich sind nicht alle im normalen Harne befindlichen Stoffe gekannt und können diese geringen Reductionserscheinungen auch durch sie bedingt sein.

Unendlich weit stehen die Kaliprobe und die Böttger'sche Wismuthprobe gegen die Kupferprobe zurück, und wenn es sich um die unzweifelhafte Feststellung von sehr geringen Zuckermengen handelt, kommen diese Proben nicht in Betracht.

Die Kaliprobe, bei der es sich um Variationen in derselben Farbennüance handelt, kann nur dann einen Werth haben, wenn diese Farbenveränderung eine sehr intensive ist. Minimale Zuckerquantitäten verändern die Farbe zumal in einem dunkelgefärbten Harn in so geringem Grade, dass Täuschungen leicht möglich sind. Überdies theilen viele organische Substanzen mit dem Zucker die Eigenschaft, durch Kali gebräunt zu werden, und wenn jeder normale Harn durch Erwärmen mit Kali intensiver

gefärbt wird, kann dies auf Rechnung irgend eines Extractivstoffes kommen.

Die Böttger'sche Wismuthprobe ist lange nicht so empfindlich wie die Cuprobe, ich habe wiederholt in Harnen, welche eine kleine Zuthat von Zucker enthielten, noch eine bemerkenswerthe Reduction des Cuoxyds gesehen, ohne dass eine charakteristische Wirkung auf Wismuthoxyd erfolgte. Die Graufärbung des Wismuthoxyds tritt in jedem Harne auf.

In jüngster Zeit hat Huizinga[1], speciell um meine Zweifel über den Zuckergehalt des normalen Harns zu widerlegen, eine von Hagar angegebene und von ihm modificirte Methode angewendet, um Zucker im Harn nachzuweisen.

Diese Methode beruht darauf, dass Wolfram- und Molybdänsäure durch Zucker wie durch viele andere organische Stoffe reducirt und ihre Lösung blau gefärbt werden, indem sich wolframsaures Wolframoxyd, resp. molybdänsaures Molybdänoxyd bildet.

Huizinga fällt den Harn durch salpetersaures Quecksilberoxyd, um durch dasselbe Farbstoff, Harnsäure und Indican, welche in gleicher Weise reduciren, zu entfernen. Das überschüssige Quecksilber wird durch Chlornatriumlösung entfernt und die vom Calomel abfiltrirte Flüssigkeit wird zur Probe verwendet und zwar wird ein Theil des so vorbereiteten Harns mit ClH angesäuert, molybdänsaures Ammoniak hinzugesetzt und die Mischung gekocht. Es scheidet sich zuerst ein gelber Niederschlag aus von phosphor-molybdänsaurem Ammoniak, aber bei längerem Kochen wird dasselbe bläulich gefärbt, und wenn der Niederschlag sich absetzt, ist die darüber stehende Flüssigkeit bläulich oder grün gefärbt. Zum Beweise, dass nicht andere als die durch salpetersaures Quecksilberoxydul gefällte Stoffe vorhanden sind, welche die Reduction bewirken, wurde Harn durch Bleizucker und ammoniakalischen Bleiessig gefällt, es war durch diese Fällungsmethode nebst den früher genannten Stoffen auch Zucker ausgeschieden. In dem durch Schwefelsäure entbleiten sauer gemachten Filtrate wurde Molybdänsäure nicht reducirt, die nebst Harnsäure Farbstoff und Indican reducirende Substanz muss also Zucker gewesen sein.

Huizinga fühlt zwar, dass dieser Schluss etwas gewagt sei, da es möglich ist, dass durch ammoniakalischen Bleiessig auch noch andere unbekannte reducirende Substanzen mit ausgefällt würden, welche durch Quecksilberlösungen nicht gefällt werden; trotzdem hält er doch seine Annahme aufrecht, dass die reducirende Substanz im normalen Harn Zucker sei. Aber dieser Schluss leidet an einem anderen wichtigen Gebrechen, nämlich daran, dass eine seiner Prämissen unhaltbar ist. Die von dem ammoniakalischen Bleiessigniederschlag abfiltrirte und entbleite Flüssig-

---

[1] Huizinga. Über den Nachweis von Traubenzucker im normalen Harne. Pflüger's Archiv 10. und 11. Heft. 1870.

keit gibt nach Huizinga's Methode behandelt ebenfalls die deutliche Reaction. Eine kleine Menge des entbleiten Filtrates in der Proberöhre mit einigen Tropfen ClH versetzt, wird durch Kochen mit molybdänsaurem Ammoniak zuerst gelb, dann gelbgrün und schliesslich schön grün gefärbt.

Ich habe den Versuch mehrfach wiederholt, nachdem ich mich genau überzeugt hatte, dass die Fällung durch Ammoniak und Bleiessig eine vollständige war, und erhielt stets dasselbe Resultat. Aber diese reducirende Wirkung ist sehr begreiflich, da ich mich überzeugt hatte, dass auch Bleizucker und Bleiessig, wenn dieselben durch Schwefelsäure entbleit sind, auf Molybdänsäure reducirend wirken, und als ich schliesslich mit Essigsäure den Versuch machte, zeigte auch diese die reducirende Wirkung auf Molybdänsäure.

Die Frage, ob der durch ammoniakalischen Bleiessig ausgefällte Harn noch reducirende Substanzen enthalte, ist einfach in dieser Weise nicht zu lösen, da das überschüssige Fällungsmittel schon diese Reduction hervorbringt.

Zur Lösung der Frage über den Zuckergehalt des normalen Harns ist diese Methode vollkommen ungeeignet. Aber ebenso wenig kann sie in Concurrenz treten mit der Trommer'schen Probe, um auch nur qualitativ die Anwesenheit des Zuckers im Harn nachzuweisen, da der normale Harn des gesunden Menschen wie der stärkste diabetische Harn in gleicher Weise durch das Reactionsmittel beeinflusst wird. Es wird durch Kochen mit einigen Tropfen molybdänsauren Ammoniaks der angesäuerte normale, wie der diabetische Harn tiefdunkelblau, fast schwarz. Erst, wenn der Harn durch salpetersaures Quecksilberoxydul ausgefällt ist, das überschüssige Quecksilber durch Chlornatrium entfernt ist, zeigt das Filtrat ein verschiedenes Verhalten gegen das Reagens, je nachdem Zucker vorhanden ist oder nicht, bei beträchtlichem Zuckergehalte ist die Blaufärbung weit intensiver. Die Trommer'sche Probe bedarf, um einigermassen bemerkenswerthe Mengen Zuckers nachzuweisen, durchaus keine Vorbereitung des Harns.

An die chemischen Methoden schliesst sich die optische Methode, die darauf beruht, dass der polarisirte Lichtstrahl durch Harnzuckerlösungen nach rechts abgelenkt wird. Vortreffliche Instrumente, insbesondere die von Soleil-Ventzke angefertigten, sind dazu bestimmt, um diese Ablenkung, und aus deren Grösse die Grösse des Zuckergehaltes nachzuweisen. Für rasches

Arbeiten ist diese Methode unübertrefflich, sie gibt bei einiger Übung in wenig gefärbtem oder durch Thierkohle entfärbtem Harne sehr verlässliche Resultate. Aber sie ist für die Erkennung kleiner Mengen Zucker ganz ungeeignet, da nach meinen Erfahrungen ein Zuckergehalt unter 0·2—0·3% nicht mehr mit dem Polarisator zu bestimmen ist.

In dem besten Ventzkischen Apparate zeigt der 1. Theilstrich der Scala in der wässerigen Lösung 0·3% Zucker an. In einer wässerigen Lösung vermag ein für die Unterscheidung der feinsten Farbennüancen sehr geübtes Auge eine Ablenkung um einige Theilstriche des Nonius zu erkennen. In einer Harnflüssigkeit, die wenn sie auch noch so gut entfärbt ist, immer einen Stich ins Gelbliche hat, werden selbst in den lichten Farben die leisesten Farbenunterschiede zwischen den beiden Hälften der Doppelplatte nicht so gut erkannt, wie in der rein farblosen Flüssigkeit und eine Ablenkung unter einem Scalagrade dürfte auch der Geübteste nicht erkennen. Will man mit dem Soleil'schen Apparate sehr kleine Harnmengen erkennen, dann muss der Harn beträchtlich eingeengt oder der Zucker durch ammoniak. Bleiessig ausgefällt werden. Ein positives Ergebniss durch den Polarisationsapparat ist jeder anderen Zuckerreaction vorzuziehen, da keine andere Substanz im Harn vorhanden ist, die die gleiche Wirkung auf den polarisirten Lichtstrahl hat, die also eine Täuschung veranlassen könnte.

Eine weitere Methode, den Zucker im Harne nachzuweisen, ist die Gährungsprobe. Zucker zerfällt bekanntlich bei der alkoholischen Gährung in Kohlensäure und Alkohol und zwar gäben nach dem Zersetzungsschema 1 Äquiv. Zucker = 180 Gewichtstheile 88 Gewth. CO_2, eine Menge, die mit Rücksicht auf anderweitige Umsetzungsproducte, die bei der Alkoholgährung auftreten, nicht ganz erhalten werden kann; man hätte also in der Gährungsmethode gleichzeitig das Mittel, den Zucker quantitativ zu bestimmen.

Die Gährungsprobe kann in dreifacher Weise ausgeführt werden:

a) Der Harn wird mit Hefe versetzt, in eine calibrirte Röhre gegeben, unter Quecksilber abgesperrt, nach vollendeter Gährung wird die entwickelte Gasmenge gemessen, dieses Mass mit Rücksicht auf Barometerdruck und Temperatur corrigirt; nebst dem entwickelten Gase hält aber auch die Gährungsflüssigkeit Gas absorbirt und dieses muss zur gefundenen Gasmenge hinzuaddirt werden.

Ich habe in meinen Versuchen den von Bunsen für wässerige Lösungen festgestellten Absorptionscoëfficienten in Rechnung gebracht, dieser beträgt für 16·6° C. 0·9692. Im reinen Alkohol steigt der Absorptionscoëfficient auf die 3fache Menge, die Grösse des Absorptionscoëfficienten für die

jeweiligen Gährungsflüssigkeiten ist nicht ermittelt. Ich glaubte durch die Annahme. dass die absorbirte CO_2menge mindestens gleich sei dem Flüssigkeitsvolumen, eher eine zu geringe als eine zu hohe Ziffer bei meinen Berechnungen eingesetzt zu haben.

Durch eine in die Eudiometerröhre eingeführte Kalikugel muss man sich die Überzeugung schaffen, dass das gesammte entwickelte Gas CO_2 sei. Die etwa nicht absorbirte Menge muss von der früher notirten abgezogen werden.

b) Die Kohlensäurebestimmung wird in dem von Will-Fresenius für die alkalimetrische Bestimmung angegebenen Apparate ausgeführt. Der Apparat wird vor und nach der Gährung gewogen, der Gewichtsverlust gibt die Grösse der Kohlensäureentwicklung an.

c) Die zur Gährung zu bringende Flüssigkeit wird in ein mit einem Kork- oder Kautschukpfropfen wohlverschlossenes Kölbchen gegeben, der Kork ist doppelt durchbohrt, in einer Öffnung steckt ein bis an den Boden des Kölbchens reichendes, oben zugeschmolzenes Röhrchen, die andere Öffnung trägt ein im rechten Winkel gebogenes Röhrchen, welches mit einem Chlorcalciumrohr in Verbindung gebracht wird. An das Chlorcalciumrohr schliesst sich ein Kaliapparat an; zur grösseren Vorsicht wird noch ein mit Ätzkali in Substanz gefülltes Rohr vorgelegt, und an dieses eine Chlorcalciumröhre angefügt. Der Kaliapparat sowie die Kaliröhre werden vor dem Beginne des Versuches gewogen; nachdem der Versuch 2—3 Tage gedauert hat, wird die Gährungsflüssigkeit langsam bis zum Kochen erhitzt. dann die Spitze des im Kölbchen steckenden Rohres abgekneipt und Luft durch den Apparat durchgesaugt. Der Kaliapparat und das Kalirohr werden wieder gewogen und die Gewichtszunahme gibt die Grösse der entwickelten Kohlensäure.

Unter diesen drei genannten Methoden ist die sub *b* am wenigsten zu empfehlen, denn da der gesammte ziemlich schwere Apparat gewogen werden muss, sind die Fehlergrenzen ziemlich bedeutend. Überdies hat man bei dieser Methode keine Gelegenheit sich zu überzeugen, dass der Gesammtverlust auf Rechnung der CO_2 kommt, da möglicherweise bei nicht normal verlaufender Alkoholgährung sich auch andere Gase, wie z. B. Wasserstoff, entwickelt haben könnten.

Die erste Methode gibt sehr verlässliche Resultate, wenn es erst zur Gasentwicklung gekommen ist. So lange aber eine solche nicht statt hatte, ist man ganz im Unklaren, ob der Gährungsversuch ein positives oder negatives Resultat hatte. Es kann eine bedeutende Menge Kohlensäure sich entwickelt haben, dieselbe aber in Absorption gehalten werden und dadurch nicht zur Erscheinung kommen.

Die Controlversuche, welche mit Hefewasser angestellt werden, um nachzuweisen, dass die in der Untersuchungsflüssigkeit entwickelte CO_2 nicht von der Hefe sondern aus Zucker kommt, müssen natürlich unter vollkommen gleichen Aussenverhältnissen angestellt werden, und muss die Flüssigkeitsmenge im Controlversuche, ferner Druck und Temperaturver-

hältniss, unter welchem sie sich befinden, genau in Rechnung gezogen werden, da sonst die Resultate des Controlversuches gar nicht beweisend sind. Es könnte geschehen, dass in der Probeflüssigkeit CO_2 auftritt, während dieses in der Controlflüssigkeit nicht der Fall ist, und doch würde dieses nicht beweisen, dass in der Controlflüssigkeit keine Gasentwicklung statt hatte. Wenn nämlich beispielsweise die zur Controlprobe verwendete Flüssigkeitsmenge grösser war, oder wenn sie unter einem anderen Drucke sich befand, würde sie eine grössere Menge Gas absorbirt halten und dadurch keine Gasentwicklung zur Erscheinung kommen.

Die Methode sub 3 ist, vorausgesetzt dass die Wägungen genau sind, die verlässlichste, sie zeigt auch eine Kohlensäuremenge von wenigen Milligramm mit Präcision an, und gestattet die Herstellung eines beweisenden Controlversuches.

Um nun die beiden Methoden *a* und *c* und die Grenzen ihrer Leistungsfähigkeit zu erproben, machte ich folgende Versuche:

Versuch A. In 50 CC. Wasser wurden 0·527 Grm. Zucker gelöst, diese in eine Eudiometerröhre gefüllt, 10 CC. Hefewasser hinzugesetzt, der übrige Raum der Röhre war mit Quecksilber gefüllt und wurde in eine Quecksilber enthaltende Wanne vorsichtig eingetragen. In einer 2. Eudiometerröhre wurden 50 CC. Harn, welche 0·524 Grm. Zucker gelöst enthielten, gleichfalls mit Hefe versetzt, und gleichfalls wie die frühere durch Quecksilber abgesperrt. Schon nach 5 Minuten entwickelten sich in beiden Röhren feine Gasblasen. Die grösste Gasentwicklung fällt auf die ersten 48 Stunden, von da ab wurde sie langsamer, schritt aber bis zum 8. Tage stetig fort. Da die Differenz in dem Gasstande vom 8. auf den 9. Tag nur eine sehr geringe war, schloss ich den Versuch ab, notirte den Gasstand, die Höhe der Flüssigkeitssäule, die Höhe des Quecksilberstandes in der Röhre, ferner den Barometerdruck und die Zimmertemperatur, und nachdem ich mich überzeugt hatte, dass die Kalikugel, welche ich in die Röhren brachte, das Gas bis auf ein Mininum absorbirte, berechnete ich aus den früheren Daten nach Bunsen's Tabelle die entwickelte Kohlensäuremenge. Das aus der wässerigen Flüssigkeit entwickelte und von der Flüssigkeit in Absorption gehaltene Gas betrug 239 Mgr., das aus der Harnflüssigkeit entwickelte und von dieser in Absorption gehaltene Gas betrug 231·9 Mgr.

Aus dem in der wässerigen Flüssigkeit enthaltenen Zucker hatte sich um 7% weniger Gas entwickelt als der Zuckermenge entsprach; aus der Harnflüssigkeit hatte sich um 8% weniger Gas entwickelt als der theoretisch berechneten Menge entsprach. Diese Differenz mag zum Theile daher kommen, dass der Zucker nicht absolut trocken war, zum Theil auch davon, dass die Gährung noch nicht ganz vollendet war; aber der Versuch hatte das wichtige Resultat geliefert, zu zeigen, dass in diesem Mischungs-

verhältniss der Harn kein Hinderniss für die Gährung abgab, da dieselbe im Wasser wie im Harne gleichmässig fortschritt und percentisch nahezu dasselbe Resultat lieferte.

Ich glaubte, die Gährung dürfte das Mittel an die Hand geben, auch sehr kleine Mengen Zucker im Harn nachzuweisen, und zwar indem man die Gährung mit dem durch Abdampfen eingeengten Harn anzustellen versuchte.

Versuch B. Ich löste 0·546 Grm. Zucker in 1000 CC. Harn, dampfte bis auf 100 CC. ein; es hatte sich eine krümliche Masse ausgeschieden, Flüssigkeit und Ausscheidung wurden mit Hefewasser in den oben (sub *c*) beschriebenen Gährungsapparat gegeben.

Vor dem Beginne des Versuches wog

der Kaliapparat	48·087	Grm.
die Kaliröhre	43·622	„

Nach Ablauf von 3 Tagen wurde das Kölbchen durch längere Zeit auf Siedhitze erhalten, Luft mehreremale durchgesaugt. Der Versuch beendigt, und die Wägungen wurden vorgenommen; es wog

der Kaliapparat	48·166	Grm.
die Kaliröhre	43·630	„

Die Gewichtszunahme betrug also 0·087 Grm., diese geringe Quantität entspricht nicht der CO_2menge, welche aus der Gährung des Zuckers hervorgehen sollte, diese würde circa 0·270 Grm. betragen.

Die Concentration der Harnbestandtheile hat also offenbar auf die Gährung hemmend eingewirkt.

Ich führte mit einem in gleicher Weise eingeengten Harne einen Controlversuch in der Eudiometerröhre aus.

Versuch C. Es werden 0·541 Grm. Zucker in 1000 CC. Harn gelöst und diese bis auf 60 CC. eingedampft, es fand auch eine reiche Ausscheidung von Harnbestandtheilen statt. Die ganze Masse wurde mit 10 CC. Hefewasser gemischt, in eine Eudiometerröhre gegeben, es fand keine Gasentwicklung statt. Auch nach 14 Tagen hatte sich noch keine Gasbläse gezeigt, es können sich also in keinem Falle mehr als 70 CC. Kohlensäure entwickelt haben, vorausgesetzt dass die salzreiche Flüssigkeit ihr eigenes Volumen Gas zu lösen im Stande ist. Aber selbst, wenn dies der Fall wäre, bliebe die entwickelte Kohlensäuremenge noch immer sehr weit gegen jene zurück, die aus dem Zucker bei vollständiger Gährung entstehen könnte.

Ich wollte nun sehen, ob es möglich sei, kleine Zuckermengen in nicht eingeengtem Harne durch Gährung nachzuweisen.

Versuch D. In 100 CC. Harn werden 0·118 Grm. Zucker gelöst, in einem Kölbchen mit Hefe gemengt, der Gährung ausgesetzt.

Die Gewichtszunahme des Kaliapparates und der Kaliröhre beträgt 0·040 Grm. Die CO_2, die sich aus dem Zucker bei vollständiger Gährung entwickeln müsste, würde 0·059 Grm. betragen.

Versuch E. 50 CC. Harn, mit 0·145 Grm. Zucker versetzt, mit Hefe gemischt, in eine Eudiometerröhre gefüllt, nach wenigen Minuten entwickelten sich feine Gasblasen, nach 2 Tagen hatten sich 3 CC. Gas, nach 6 Tagen 5 CC., nach 7 Tagen 6·5 CC., nach 14 Tagen 17 CC. Gas entwickelt, welches durch Berührung mit einer Kalikugel vollständig absorbirt wurde.

Versuch F. 100 CC. Harn mit 0·1 Grm. Zucker und Hefe gemischt, im Kölbchenapparate der Gährung ausgesetzt.

Die Gewichtszunahme des Kaliapparates beträgt 0·69 Mgr., also mehr als dem Gewichte der bei vollständiger Ausgährung aus dem Zucker sich entwickelnden CO_2 entspricht.

Versuch G. In 100 CC. Harn 0·07 Zucker gelöst, mit Hefe gemischt, im Kölbchen der Gährung ausgesetzt.

Die Gewichtszunahme der Kalivorlagen beträgt 0·028 Grm., aus dem Zucker konnte sich 0·035 CO_2 entwickeln.

Diese Versuche hatten anscheinend bewiesen, dass man noch sehr kleine Mengen Zucker durch Gährung entdecken kann.

Aber das Resultat des Versuches *F*, welches mehr CO_2 lieferte, als der Zuckermenge entsprach, hatte mir schon die Betrachtung nahe gelegt, dass die CO_2 aus einer anderen Quelle kommen könnte. Ich machte nun einige Gegenversuche, und zwar wollte ich zuerst sehen, ob die Hefe die Quelle der CO_2-entwickelung sein könnte.

Es ist durch die von Pasteur und Andern angestellten Versuche bekannt, dass Hefe für sich zur Gährung gelangt und aus ihrer eigenen Substanz Kohlensäure und Alkohol entwickelt.

In neuester Zeit hat Liebig[1] einige Gährungsversuche mit Hefe veröffentlicht. Schon nach 18 Stunden enthielt die der Gährung unterworfene Hefeflüssigkeit über 80% des Alkohols, welcher sich nach der theoretischen Berechnung aus der Cellulose der Hefe entwickeln konnte. Es war aber die Frage, ob die kleine Menge Hefe, welche ich in meinen Versuchen zugesetzt, auch schon eine bemerkenswerthe Kohlensäureentwicklung veranlasse.

---

[1] Liebig. Über Gährung etc. Separatabdruck aus den Annalen der Chemie. Leipzig 1870.

Versuch H. Ich mengte 10 CC. Wasser mit der zu den Einzelversuchen verwendeten Hefemenge und setzte die Flüssigkeit im Kölbchen der Gährung aus.

Die Gewichtszunahme der Kalivorlagen betrug 4 Mgr., sie war so gering, dass sie möglicherweise noch in die Fehlergrenzen fallen konnte; wahrscheinlich stammt aber die Gewichtszunahme aus der CO_2, die sich aus der geringen Hefemenge entwickelt hat.

Ich versuchte nun, wie sich Harn mit Hefe vermischt verhalte.

Versuch I. Ich mengte 100 CC. Harn mit Hefe und füllte das Gemenge in den Apparat. Die Gewichtszunahme der Kalivorlagen betrug 0·042 Grm.

Es hatten sich also aus dem Harn 0·042 Grm. CO_2 entwickelt; aus welchen Bestandtheilen des Harns diese CO_2 stammt, ist schwer zu ermitteln. Es ist am allerwahrscheinlichsten, dass sie aus dem Zerfalle des Harnstoffes hervorgegangen ist. Natürlich muss, wenn der Harnstoff die Quelle ist, sich auch Ammoniak entwickelt haben, und ich glaubte zuerst, man könnte durch vorgelegte titrirte SO_3 erfahren, ob und wie viel Ammoniak sich entwickelt hat. Aber bei näherer Betrachtung musste ich diesen Versuch aufgeben, da es sehr denkbar war, dass das Ammoniak durch die Säure der Hefe, welche sich im Kölbchen befand, gebunden worden wäre; ein negatives Resultat hätte also keine beweisende Kraft gehabt.

Für unsere Zwecke ist es vor allem von Bedeutung zu entscheiden, ob Zucker oder ob andere Bestandtheile die Quelle bilden für die aus dem normalen Harn entwickelte CO_2. Da es nicht in directer Weise nachzuweisen war, dass der Harnstoff die Quelle sei, suchte ich der Beantwortung der Frage auf indirectem Wege nahe zu kommen. Der nächste Versuch war dahin gerichtet, zu sehen, ob Harn auch *ohne* Hefezusatz innerhalb der für unsere Versuche verwendeten Zeit CO_2 entwickele. Wenn der Versuch ein positives Resultat gab, war damit festgestellt, dass die CO_2-Entwicklung nicht durch Gährung veranlasst sei, dass sie also nicht von Zucker stammen könne.

Wohl musste ich mir sagen, dass ein negatives Resultat dieses Versuches nichts dagegen beweise, dass die CO_2 bei unseren früheren Versuchen aus dem Zerfall des Harnstoffes stamme, denn es ist sehr gut denkbar, dass der Harnstoff des Harns in Berührung mit Hefe rascher zerfällt als ohne dieselbe.

Versuch K. In einem Kölbchen werden 100 CC. Harn *mit Hefe* gemischt. Die CO_2, welche sich innerhalb dreier Tage entwickelt hatte, betrug 32 Mgr.

In ein 2. Kölbchen werden gleichzeitig von demselben Harn 100 CC. *ohne Hefe* gegeben. Die Kaliapparate nehmen um 0·022 Grm. an Gewicht zu.

Es hatten sich also ohne jeden Hefezusatz im gleichen Zeitraume 22 Mgr. CO_2 aus dem Harn entwickelt.

Es war also damit erwiesen, dass mindestens der grösste Theil der aus normalem Harne entwickelten CO_2 aus dem Zerfalle eines Harnbestandes stamme und nicht durch Vergährung einer gährungsfähigen Substanz entstanden sei. Ob das Plus der CO_2 in dem mit Hefe versetzten Harne von Zucker herrühre oder durch rascheren Zerfall des Harnstoffes in Berührung mit Hefe stamme, blieb unentschieden.

Eine weitere Betrachtung war folgende: Wenn die CO_2 in dem mit Hefe versetzten Harne aus Zucker stammte, so würde nach der Menge der in meinen Versuchen erhaltenen Kohlensäure der Zuckergehalt des Harnes mindestens 0·1% betragen. Wenn man nun diesen Zuckergehalt von den anderen Harnbestandtheilen möglichst zu isoliren suchte und das aus dem Bleiniederschlage gewonnene Filtrat zur Gährung brachte, müsste doch das Gährungsresultat mindestens eben so gross sein, als wenn man dem normalen Harn 0·1% zusetzte und ihn in derselben Weise behandelte. Nun hatten zwar meine später mitzutheilenden wiederholten Versuche mit den aus normalem Harn erzeugten Bleiniederschlägen ein negatives Resultat der Gährungsprobe ergeben. Aber ich hatte fast immer die Probe in der Eudiometerröhre angestellt, und man konnte denken, es sei die CO_2 in der Flüssigkeit absorbirt geblieben.

Ich machte also im Kölbchen nachstehenden Versuch.

Versuch L. Es werden 500 CC. Harn mit Bleizucker gefällt, und das Filtrat mit Ammoniak und Bleiessig ausgefällt; dieser zweite Niederschlag wurde durch Oxalsäure zerlegt. Die überschüssige Oxalsäure durch kohlensauren Kalk gesättigt, das mit etwas Essigsäure versetzte Filtrat eingedampft und der Rückstand in 100 CC. Wasser gelöst, in einem Kölbchen mit Hefe versetzt. Es hatten sich innerhalb 3 Tage 18 Mgr. CO_2 entwickelt.

In einem Controlversuche wurden 500 CC. Harn mit 0·510 Grm. Zucker versetzt, und in ganz gleicher Weise wie der normale Harn mit Bleisalzen behandelt, der aus der Zerlegung des Bleiniederschlages schliesslich gewonnene Rückstand in 100 CC. Wasser gelöst, gleichfalls mit Hefe versetzt, wurde im Kölbchen der Gährung ausgesetzt. Es entwickelten sich 137 Mg. CO_2.

Wie verschieden ist dieses Resultat von dem aus dem normalen Harn erlangten. Während aus dem Bleiniederschlage

des mit 0·510 Zucker versetzten Harns sich 137 Mgr. CO_2 entwickelt hatten, waren aus dem Bleiniederschlage des normalen Harns nur 18 Mgr. CO_2 zum Vorscheine gekommen. Es war also auch dadurch erwiesen, dass die aus normalem Harn direct entwickelte CO_2, welche mindestens dem Gehalte von 0·1% Zucker entsprechen würde, unmöglich von Zucker stammen könne.

Ob die in unserem letzten Versuche aus dem Bleiniederschlage des normalen Harns gewonnene CO_2 von Zucker herrühren, ist nicht zu ermitteln; es ist eben so gut denkbar, dass sie aus dem Zerfalle von Harnsubstanzen stammt, die stets mit dem Blei niederfallen. Wenn diese CO_2-Menge aus Zucker stammte, würde sie in jedem Falle nur einen minimalen Zuckergehalt, etwa 7 Mgr. im 100 CC. Harn = 0·007% anzeigen.

Aus allen unseren Gährungsversuchen ergibt sich als wichtiges Resultat, dass es nicht möglich sei, mittelst der Gährungsprobe kleine Mengen Zucker im Harne unzweifelhaft mit Ausschluss aller anderen Substanzen nachzuweisen.

Es ist von anderen Forschern, wie von Bence Jones, und in neuester Zeit von Huizinga die Anwesenheit von Alkohol in der mit Hefe vermischten, durch einige Tage der Gährung ausgesetzten Harnflüssigkeit als entscheidender Beweis für die Anwesenheit von Zucker im normalen Harn angeführt worden. — Huizinga benützt Lieben's Jodoformreaction, durch die es möglich ist, auch die kleinsten Spuren von Alkohol zu erkennen, um in dem Harndestillate Alkohol nachzuweisen. Lieben[1] fand zwar, dass jeder normale Harn Spuren einer flüchtigen Substanz enthält, welche, ohne Alkohol zu sein, auch die Jodoformreaction gibt. Huizinga hat, um diesen Stoff zu entfernen, den Harn früher auf 3/4 der ursprünglichen Menge im Wasserbade eingedampft; er glaubt, dass dadurch jene flüchtige Substanz entfernt ist. Er hat dafür den Beweis nicht beigebracht und aus Lieben's Abhandlung ist nicht ersichtlich, dass in dieser Weise die flüchtige Substanz zu entfernen sei.

Aber selbst wenn Huizinga damit recht hätte, wäre es doch nicht erwiesen, dass die minimale Alkoholmenge, die durch

[1] Lieben. Alkohol geht in den Harn über. Annalen d. Chemie. 1870.

die feine Jodoformreaction nachzuweisen ist, von Zucker stamme, da doch Hefe, wie oben dargelegt, ebenfalls in CO_2 und Alkohol zerfällt und selbst aus der kleinsten Hefemenge sich minimale Mengen Alkohol entwickeln müssen. Bence Jones hat selbst mittelst der viel weniger empfindlichen Chromsäurereaction im Destillate von Hefewasser Alkohol nachgewiesen.

Es ist also auch der Alkoholnachweis nicht ausreichend, kleine Mengen Zucker unzweifelhaft zu constatiren.

Der beirrende Einfluss, welchen die bekannten, wie die noch ungekannten Harnbestandtheile auf die zur Entdeckung des Zuckers benützten Reagentien üben, bestimmte die Forscher, welche es sich zur Aufgabe stellten, kleine Mengen Zucker im Harn nachzuweisen, den Zucker zu isoliren, ihn von der störenden Einwirkung der anderen Harnbestandtheile abzulösen.

Die Isolirung wurde in zweifacher Weise versucht, die eine Art war die, den Zucker als Zuckerkali darzustellen, die andere war dahin gerichtet, ein Bleisacharat zu bilden.

ad. 1. Darstellung von Zuckerkali:

In erster Reihe kommt hier Brücke's Methode in Betracht, da sie die Basis für die von Brücke begründete Lehre bildet, dass der menschliche Harn Zucker als normalen Bestandtheil enthalte.

Brücke beschreibt[1] das Verfahren, welches er eingeschlagen hat, um das Zuckerkali direct aus dem frisch gelassenen Harn abzuscheiden, folgendermassen: Der Urin wird mit so viel starkem Weingeist versetzt, dass in der Flüssigkeit etwa $\frac{4}{5}$ absoluten Alkohols enthalten sind. Brücke bedient sich eines Weingeistes, der 94·3—94·4 Volumpercente Alkohol von 0·7951 Dichte bei 12° R. enthält und fügt von diesem Alkohol 54 CC. zu je 10 CC. Harn. Nachdem Harn und Alkohol gemischt und der entstandene Niederschlag sich gesenkt hat, wird filtrirt. Zu dem Filtrate wird tropfenweise von einer alkoholischen Kalilösung bis zur deutlichen Alkalescenz der Mischung hinzugefügt, das ganze wohlbedeckt im kalten Raume durch 24 Stunden stehen gelassen, die Flüssigkeit wird dann abgegossen. Boden und Wände des Glases sind mit einem krystallinischen Überzug bedeckt. Dieser wird, nachdem der Alkohol abgedünstet ist, in etwas kaltem Wasser gelöst, und zu den Zuckerproben benützt. Nach Brücke's Erfahrungen enthält der Beschlag am meisten

[1] Sitzungsberichte d. k. Akademie d. Wissenschaften, 29. Bd.

Zuckerkali, der schön büschelförmig krystallinisch ist, während grosskörnige oder drusige Massen, die sich bisweilen finden, anderen gleichzeitig ausgeschiedenen Substanzen angehören.

Ich habe, als ich die Beantwortung der Frage, ob der normale Harn wirklich Zucker enthalte, in Angriff nahm, zuerst und in der scrupulösesten Weise Brücke's Vorgang eingehalten. Die Harne der Gesunden, welche ich benützte, hatten Kupferlösung gelb gefärbt, sie waren beim Erhitzen mit Kalilösung etwas dunkler geworden, weisses Wismuthoxyd wurde selbst bei längerem Kochen nur schmutzig grau. Ich nahm von diesen Harnen je 200 CC., versetzte sie mit 1080 CC. 94%tigen Alkohols, filtrirte, fügte frisch bereitete Kalilösung hinzu, liess 24 Stunden stehen, und erhielt an Wänden und am Boden den schönsten weissen krystallinischen Beschlag. Aber dieser Beschlag, im Wasser gelöst, gab mit schwefelsaurem Cuoxyd entweder ein complet negatives Resultat, oder dasselbe wurde in drei Fällen von acht dichroitisch getrübt. In einen dieser drei Fälle hatte aber auch schon der genuine Harn diese Wirkung auf schwefelsaures Cuoxyd geübt, nachdem das Gemenge erhitzt war und einige Minuten gestanden hatte.

Trotzdem es mir also nicht gelungen war, in dem Becherbeschlage etwas zu gewinnen, was auch nur mit einiger Wahrscheinlichkeit als Zuckerkali angesprochen werden konnte, glaubte ich es so deuten zu müssen, dass meine Harne weniger Zucker enthalten als die von Brücke untersuchten, und ich suchte nun zu prüfen, bis zu welcher Grenze Brücke's Methode Zucker anzeigen könnte, indem ich eine directe Zuckerlösung nach dieser Methode behandelte.

Versuch A. Ich löste 0·250 Grm. Traubenzucker in 200 Grm. Wasser, setzte 1080 CC. 94% Alkohol hinzu, versetzte diese Lösung mit alkoholischer Kalilösung bis zur alkalischen Reaction; es bildete sich eine starke, wolkige Trübung. Nach 24 Stunden war die Flüssigkeit vollständig klar, und es hatte sich keine Ausscheidung gebildet. Die Wände und der Boden des Gefässes blieben vollkommen frei von jedem Beschlage. 10 CC. der alkoholischen Flüssigkeit wurden zur Trockene abgedampft und der Rückstand in Wasser gelöst, dieser gab mit der Fehling'schen Lösung eine schöne Reaction.

Ich fügte der Flüssigkeit noch 0·750 Grm. Zucker hinzu, setzte alkoholische Kalilösung zu, es bildete sich wieder eine starke Trübung, aber nach 24 Stunden ist diese abermals verschwunden, und keine Aus-

scheidung erfolgt. Dasselbe negative Resultat erhielt ich trotzdem ich allmählig zehn Grammes Zucker in die Flüssigkeit eintrug.

Versuch B. Mein nächster Versuch war nun dahin gerichtet, Zuckerkali in anderer Weise darzustellen.

Ich löse eine Menge Traubenzucker in 60 CC. Wasser, füge der Lösung 940 CC. absoluten Alkohols bei; ich habe dadurch einen Litre alkoholischer Zuckerlösung von 94% Alkoholgehalt, 10 CC. der Flüssigkeit werden zur Trockene abgedampft, der Rückstand in etwas Wasser gelöst und durch Fehling'sche Lösung der Zuckergehalt bestimmt, er beträgt 3·5%.

Es wurde ferner eine Menge Ätzkali in Alkohol von 94 vol. % gelöst, und da sich etwas CO_2 KO bildete, wurde die Flüssigkeit filtrirt und der KO-Gehalt der Lösung mittelst titrirter SO_3 bestimmt, 10 CC. der Lösung enthalten 0·6465 KO.

Es wurde nun im Verhältnisse von 1 Äqu. KO auf 1 Äqu. Zucker 73 CC. der Kalilösung in 500 CC. der alkoholischen Zuckerlösung eingetragen, es entstand eine starke milchige Trübung und momentan schied sich ein voluminöser weissgelber Niederschlag an den Wänden und am Boden des Gefässes aus, welcher rasch zäh wurde und das Aussehen von blassgelbem Wachse hatte. Die darüberstehende noch etwas milchigtrübe Flüssigkeit wurde rasch abgegossen, und auf den zähen Niederschlag von neuem 94%iger Alkohol gegossen. Die decantirte Flüssigkeit wie der mit Alkohol übergossene Niederschlag wurden durch 24 Stunden an einem kühlen Orte gelassen. Die decantirte Flüssigkeit war ganz klar geworden und am Boden des Gefässes hatte sich ein sehr feiner, gelber, firnissartiger Beleg gebildet, auch nicht die Spur einer Krystallisation war vorhanden, die Wände des Gefässes waren von jeder Ausscheidung vollständig frei geblieben. Der ursprüngliche Niederschlag hatte sich gebräunt und stellte eine tief dunkelgelbe firnissartige Masse dar. Nach wenigen Tagen war diese Masse dunkelbraun geworden, wie dunkler Syrup. Die decantirte Flüssigkeit enthielt eine Spur Zucker, der mit der Ausscheidung in Berührung gewesene Alkohol war vollkommen zuckerfrei.

Das Zuckerkali scheidet sich also aus 94% Alkohol momentan aus, nicht erst nach 24 Stunden, es hat kein krystallinisches Aussehen, ist nicht farblos, sondern stellt eine gelbe, an der Luft rasch braun werdende firnissartige Masse dar.

Ich suchte nun mir über die Löslichkeitsverhältnisse des Zuckerkalis im Alkohol Aufschluss zu verschaffen.

Versuch C. Eine kleine Menge Zuckerkali wird in 100 CC. Wasser gelöst, die gleiche Menge absoluten Alkohols hinzugefügt, es scheidet sich Zuckerkali aus. Dem Filtrate werden abermals 100 CC. absoluten Alkohols hinzugefügt; wieder erfolgt eine Ausscheidung, es wird abermals filtirt,

wieder 100 CC. absoluten Alkohols zugesetzt, abermals eine Ausscheidung. Dieses dauert in gleicher Weise fort bis aus der ursprünglich wässerigen Lösung eine 75% Alkohollösung geworden ist. Nun entstand auf weitere Zuthat von absolutem Alkohol keine Trübung, aber die Flüssigkeit enthielt doch noch Zucker und selbst als dieselbe schon eine 89%ige Alkohollösung geworden war, enthielt sie noch immer bemerkenswerthe Zuckerspuren.

Ich erfuhr daraus, dass Zuckerkali im 89%igen Alkohol noch löslich war.

Damit war es erklärt, warum im Versuche *A* kein Zuckerkali entstehen konnte, trotzdem die Flüssigkeit sich unmittelbar auf Zusatz von alkoholischer Kalilösung getrübt hatte. Das gebildete Zuckerkali hatte sich in der circa 84% Alkohol enthaltenden Mischung wieder gelöst.

Versuch D. Um die Richtigkeit dieser Anschauung zu bestätigen, nahm ich 20 CC. einer wässerigen Zuckerlösung, setzte 800 CC. 94% Alkohol hinzu, fügte alkoholische Kalilösung bei, es entstand eine Trübung, nach 24 Stunden war die Flüssigkeit klar, am Boden des Gefässes hatte sich ein schöner firnissartiger Anflug gebildet, der die eclatanteste Zuckerreaction hat, die decantirte Flüssigkeit enthielt keine Spur Zucker. Die Flüssigkeit enthielt 90·1% Alkohol.

Ich mischte ferner 5 CC. jener Zuckerlösung *A* mit 95 CC. 94percentigen Alkohols, fügte alkoholische Kalilösung bei, nach 24 Stunden war ein zarter, gelber Anflug am Boden des Gefässes, der Zuckerreaction gab, aber auch die decantirte Flüssigkeit enthielt noch Zucker. Die Flüssigkeit enthielt 89·3% Alkohol.

Die Grenze der Löslichkeit des Zuckerkali in Alkohol liegt also ungefähr bei 90%.

Unsere Versuche lehren, dass Zuckerkali sich rasch ausscheidet, dass derselbe kein krystallinisches Gefüge hat, oder gar Krystallformen zeigt, dass er erst in 90%tigem Alkohol unlöslich ist. Es ist also die von Brücke vorgeschlagene Methode nicht entsprechend, um Zuckerkali zu erlangen, zumal dann nicht, wenn der Zucker nur in sehr geringer Menge vorhanden ist. Die krystallinische Ausscheidung, die Brücke aus normalem Harn erhalten hat, war also offenbar eine Verbindung von Kali mit anderen Harnbestandtheilen, und die mässige reducirende Wirkung dieser Verbindung, die zuweilen auftritt, ist wahrscheinlich, wie dies bereits von anderen Untersuchern hervorgehoben wurde, auf Harnsäure zu beziehen. Ich selbst habe darüber keine Erfahrung, da die krystallinischen Stoffe, die ich aus den von mir nach Brücke's Methode untersuchten Harnen erhielt, niemals eine reducirende Eigenschaft zeigten.

Eine zweite Methode Zuckerkali aus Harn darzustellen, besteht darin, dass der Harn im Wasserbade eingedampft, der Rückstand durch Alkohol extrahirt und diesem Extracte alkoholische Kalilösung zugefügt wird.

Man hat bei dieser Methode zu berücksichtigen, dass einerseits Zucker in absolutem Alkohol fast gar nicht und in sehr hochgradigem Alkohol nur schwer löslich ist; dass andererseits aus einem zu verdünnten Alkohol Zuckerkali sich nicht ausscheidet. Wird ein hochpercentiger oder nahezu absoluter Alkohol zur Extraction verwendet, gelingt diese nur sehr unvollständig, wird andererseits die Extraction mit wasserreichem Weingeist ausgeführt und dann Zuckerkali ausgefällt, tritt dasselbe rasch in Lösung, und es wird wieder nur ein Bruchtheil des Zuckers erhalten.

Die Ausführung der Methode kann in doppelter Weise geschehen, entweder man verdampft den Harn zur Trockene, übergiesst ihn mit Alkohol von 93—94% und extrahirt, oder man verdampft ihn zur Syrupconsistenz, verreibt mit Bimsstein, und da also noch Harnwasser mit vorhanden ist, extrahirt man mit so viel absolutem Alkohol, dass bei Hinzurechnung des Harnwassers sich ein Alkoholgehalt von circa 93—94% herausstellt. Nach der ersten Weise bildet sich bei Hinzufügung des Alkohols eine guttaperchaartige Masse, die schwer zu extrahiren ist.

Diese Darstellung des Zuckerkalis ist sehr zweckmässig, sie genügt aber gleichfalls nicht, um sehr kleine Mengen Zucker mit Bestimmtheit nachzuweisen, und die Ursache liegt darin, weil eben nur ein Bruchtheil des ursprünglichen Zuckergehaltes in dem Zuckerkali erscheint. Folgende Versuche werden dies bestätigen:

A. 500 CC. eines diabetischen Harnes, welcher 2% Zucker enthielt, wurden filtrirt, durch ClH die Harnsäure ausgeschieden, zur Syrupconsistenz eingedampft, und mit absolutem Alkohol durch 24 Stunden extrahirt.

Der ausgewaschene, wachsartig zähe, braungelbe Rückstand wurde in sehr wenig Wasser gelöst, wieder absoluter Alkohol hinzugefügt, mit dem Pistill verrieben, und wieder durch 24 Stunden das Extract stehengelassen. Der zähe Rückstand wurde noch ein drittes Mal im Wasser gelöst und abermals mit absolutem Alkohol extrahirt. Alle alkoholischen Extracte mit frisch bereiteter alkoholischer Kalilösung versetzt. Nach 24 Stunden hatte sich eine Masse Krystalle an den Wänden des Gefässes gebildet, am Boden des Gefässes ein reiches, schönes, firnissartiges Sediment, der gesammte Rückstand wurde in 100 CC. Wasser gelöst und in dieser braunen Flüssigkeit der Zuckergehalt bestimmt. Der Zuckergehalt betrug 3·5 Grm.

Statt der im ursprünglichen Harn gelösten 10 Grm. hatte ich nur 3·5 Grm., also nur 35% erhalten.

Durch wirkungslosen Znsatz von Kalilösung hatte ich mich früher überzeugt, dass aller als Zuckerkali fällbarer Zucker ausgeschieden war. Ich destillirte den nicht zur Zuckerbestimmung verwendeten Alkohol ab, der zurückgebliebene dunkle Rückstand verfärbte Fehling'sche Lösung, es bildete sich keine Ausscheidung. Der von den Extractionen zurückgebliebene Rückstand reducirte Cuoxydlösung zu Oxydulhydrat und entwickelte mit Hefe CO_2. Es war also offenbar Zucker zurückgeblieben, der durch dreimalige Extraction nicht in Lösung gelangte.

In einem zweiten Versuche löste ich 1 Grm. Zucker in 100 CC. Harn, dampfte auf circa 5 CC. Flüssigkeit ein, verrieb den Rückstand mit Bimsstein, extrahirte mit kochendem Alkohol von 94%, decantirte, fügte von Neuem kochenden Alkohol hinzu, und wiederholte diese Procedur 4—5mal. Die gesammten Extracte wurden mit alkoholischer Kalilösung versetzt, es entsteht eine reiche Fällung, firnissartiger Beschlag am Boden, krystallinischer Anflug an der Wand. Dieser Rückstand in 100 CC. Wasser gelöst, enthält 0·3% Zucker.

Die Darstellung von Zuckerkali eignet sich also nicht zur quantitativen Zuckerbestimmung.

Ich versuche es nun, die Grenze festzustellen, bis zu welcher nach dieser Methode noch Zucker qualitativ mit Bestimmtheit erkannt werden kann. Ich mache Zuckerharnlösungen von verschiedener Stärke, aus welchen Zuckerkali dargestellt werden soll. In Harnzuckerlösungen von 0·1—0·08% bringt die firnissartige Ausscheidung noch die schönste Reduction auf Cuoxyd hervor. Bei einem Zuckergehalte mit 0·08% wird die Reaction schon viel unentschiedener und bei einem Zuckergehalte von 0·03—0·04% bringt der als Zuckerkali anzusprechende Rückstand, in Wasser gelöst, in der Culösung jene wiederholt erwähnte dichroitische Trübung hervor und ist also nicht mehr als unzweifelhaftes Zuckerreagens zu verwerthen.

Die zweite Art, den Zucker zu isoliren, ist die, ein Bleisacharat darzustellen. Der Harn wird zuerst durch neutrales essigsaures Blei gefällt, das Filtrat wird durch basisch essigsaures Blei gefällt abermals filtrirt und dem Filtrate Ammoniak zugesetzt. Der jetzt gebildete Niederschlag enthält das Bleisacharat.

Brücke[1] gibt an, dass auch der durch Bleiessig entstehende Niederschlag Zucker enthalte. Da aber in einer wässerigen Traubenzuckerlösung Bleiessig keinen Niederschlag hervorbringt,

---

[1] Sitzungsberichte d. k. Akademie d. Wissensch. 39 Bd. S. 10.

so meint Brücke, es existire im Harne eine Substanz, durch welche die Fällung des Zuckers durch Bleiessig vermittelt wird. Ich werde auf diese Brücke'sche Annahme und auf die dafür beigebrachten Beweise später zurückkommen.

Die den Zucker enthaltenden Niederschläge werden durch SH zerlegt und im eingedampften Filtrate der Zucker nachgewiesen. Brücke zerlegte die Niederschläge durch Oxalsäure, es bildet sich oxalsaures Blei, das Filtrat wurde durch kohlensauren Kalk gesättigt, mit Essigsäure angesäuert und im Wasserbade zur Trockene eingedampft, dieser Rückstand in etwas Wasser gelöst und in diesem der Zucker direct nachgewiesen; oder es wurde das Filtrat nur auf ein kleineres Volumen eingeengt, mit der fünffachen Menge Alkohol gemengt und dem Filtrate alkoholische Kalilösung zugefügt und Zuckerkali dargestellt, und dieses, nachdem es durch Oxalsäure zerlegt war, zu dem Zuckernachweise verwendet. Die letzte, sehr complicirte Methode hat Brücke angewendet, um den Zucker in dem durch Bleiessig entstandenen Niederschlage durch den Gährungsprocess nachzuweisen. In dem durch Ammoniak entstandenen Niederschlag war dieser complicirte Weg nicht nöthig, es gelang Brücke aus dem Filtratrückstande direct die Kohlensäureentwicklung nachzuweisen.

Eine dritte, von Lehmann angegebene Art ist die, dass man aus dem Alkoholextract Zuckerkali darstellt, dieses in Wasser löst, mit Essigsäure neutralisirt, mit überschüssigem Bleizucker fällt, das gebildete Bleisacharat durch SH zerlegt, das Filtrat eindampft und in dem Rückstande den Zucker nachweist.

Ich habe alle diese variirten Methoden wiederholt versucht, um Zucker aus normalem Harn darzustellen und habe nie einen Erfolg erzielt.

Ich will einige meiner Versuche mittheilen:

A) Harn des Herrn M...., Verdacht auf Zucker nach manchen vorhandenen Symptomen.

Der ursprüngliche Harn färbt die Kupferlösung rasch gelb, keine Ausscheidung.

Von diesem Harne wurden 2400 CC. im Wasserbade zur Syrupconsistenz eingedampft, mit Bimsstein verrieben, mit 93% Alkohol durch 4 Stunden unter häufigem Umschütteln extrahirt. Das Filtrat mit alkoholischer Ätzkalilösung bis zur deutlichen alkalischen Reaction behandelt, es bildet sich eine wolkige Trübung. Nach 24stündigem Stehen in der Kälte wird der Alkohol abgegossen, an den Wänden des Gefässes ein krystallinischer Beschlag, am Boden eine graue schmierige Masse mit einzelnen dunkelbraunen Partien; der krystallinische Beleg in Wasser gelöst, verfärbt Kupferlösung wie der normale Harn, keine Ausscheidung.

Der ganze Rückstand im Wasser gelöst, mit Essigsäure neutralisirt mit überschüssigem Bleizucker gefällt, der gebildete Niederschlag durch

Schwefelwasserstoff zerlegt, das blassgelbe Filtrat zum Trockenen eingedampft, der trockene, etwas gelbliche Rückstand in einer kleinen Menge Wasser gelöst, bringt in Fehling'scher Flüssigkeit eine schwache dichroitische Trübung hervor.

Zwei andere Harne gesunder Menschen wurden in gleicher Weise behandelt und zwar das einemal 1800 CC. und das anderemal 1500 CC., die Lösung des vermeintlichen Kalisacharates hatte auf Culösung keine Einwirkung. Erst wenn die Lösung mit Essigsäure angesäuert, mit Bleizucker gefällt, der Niederschlag mit SH zerlegt, das Filtrat eingedampft, und der Rückstand gelöst war, brachte diese Lösung in Culösung eine schwache dichroitische Trübung hervor.

B) Der Harn eines Individuums, das früher an Diabetes mellit. gelitten, und bei welchem durch entsprechendes Regime und Behandlung der Zucker auf ein Minimum gesunken war; die Fehling'sche Flüssigkeit wird durch den Harn gelb gefärbt; die ausgeschiedenen Phosphate bekommen nach kurzer Zeit einen röthlichen Anflug von ausgeschiedenem Oxydul. Mit KO schöne Bräunung, NO_5 Wismuthoxyd wird nicht schwarz.

500 CC. dieses Harns werden mit ClH versetzt, es bildet sich eine reiche Ausscheidung von Harnsäure, die ausgeschiedene Harnsäure in etwas KO gelöst, die wässerige Lösung reducirt Cuoxyd zu schönem rothen Oxydul, die Lösung mit normalem Harn versetzt, bewirkt in Fehling'scher Lösung eine gelbe, nicht klar absetzende Ausscheidung. Die von der Harnsäureausscheidung abfiltrirte Flüssigkeit wird zur Syrupconsistenz eingedampft, mit Alkohol extrahirt, dem dunklen Extracte alkoholische Kalilösung hinzugefügt; es scheidet sich eine gelbe, firnissartige Masse aus, welche Cuoxyd reducirt. Die ganze Masse in 100 CC. Wasser gelöst, zur Reduction von 5 CC. Fehling'scher Lösung verbrauche ich 45 CC. der Lösung, in dem ausgeschiedenen Zuckerkali ist also 0·111 Grm. Zucker erhalten. Die mit Alkohol ausgezogene Masse reducirt noch Cuoxyd; ich löse diesen Rückstand in 15 CC. Wasser, füge 180 CC. absoluten Alkohol hinzu, nach häufigem Schütteln und 24stündigem Stehen abermals alkoholische Kalilösung hinzugefügt, es bildet sich ein reicher Niederschlag, aber nach 24 Stunden findet sich am Boden des Gefässes nur ein schwacher Anflug, welcher Cuoxyd zu orangegelbem Oxydul reducirt, aus dem eingedampften Alkohol scheiden sich Krystalle aus, welche gelöst eine eigenthümliche Reaction veranlassen, die Culösung wird dunkelbraun gefärbt, es scheiden sich röthliche Flocken aus. Der Rückstand des 2. alkoholischen Extractes bringt auf Cuoxyd eine eigenthümliche Wirkung hervor; es bildet sich zuerst eine orangegelbe Trübung, nach einigen Minuten eine schwarze Fällung wie von Cuoxyd.

1000 CC. desselben Harnes wurden mit neutralem essigsaurem Blei gefällt, das Filtrat mit basisch essigsaurem Blei gefällt, das Filtrat zuletzt mit Ammoniak gefällt, alle Niederschläge waren enorm gross. Die beiden letzten Niederschläge werden durch SH zerlegt; es war nöthig, durch fast 24 Stunden Gas einzuleiten bis die Niederschläge zerlegt waren, die

klaren, etwas ins Grünliche spielenden Filtrate wurden getrennt eingedampft. Das Filtrat vom basischen essigsauren Blei schwärzt sich beim Eindampfen, gab ganz eingedampft eine schwarze wie verkohlte Masse. Ein kleiner Bruchtheil dieser Masse in Wasser gelöst, gibt eine torfbraune Flüssigkeit, welche reichlich reducirt.

Das Filtrat des durch Ammoniak gewonnenen Niederschlages zu einer syrupartigen Consistenz eingedampft, reducirt Cuoxyd zu einer schmutzig gelben, trüben Flüssigkeit.

Beide eingedampfte Filtrate werden mit Alkohol extrahirt, dem Extracte alkoholische Kalilösung zugesetzt; die Ausscheidung aus dem Alkoholextracte der amoniakalischen Flüssigkeit wird in 100 CC. Wasser gelöst, ich verbrauche die ganze Quantität um 5 CC. Fehling'scher Flüssigkeit zu reduciren, sie enthält also circa 0·05 Zucker. Die Ausscheidung aus dem Alkoholextracte des basisch essigsauren Bleioxyds wird ebenfalls in 100 CC. Wasser gelöst, ich verbrauche 25 CC. zu Reduction von 5 CC. Fehling'scher Flüssigkeit, 100 CC. enthalten also 0·2 reducirende Substanz.

Es enthielt also der durch basisch essigsaures Blei gefällte Niederschlag ein grössere Menge reducirender Substanz als der durch Ammoniak gefällte Niederschlag.

Der mit Alkohol extrahirte Rückstand des ammon. Filtrates enthält noch reducirende Substanz, ich löse dieselbe in 10 CC. aq., füge 110 CC. absoluten Alkohols hinzu, das Extract wird mit alkoholischer Kalilösung versetzt, es bildet sich eine deutliche Ausscheidung, welche aber nach 24 Stunden wieder gelöst ist. Der eingedampfte Alkohol lässt einen Rückstand zurück, welcher Cuoxyd schön zu Oxydul reducirt. Der Extractrückstand reducirt gleichfalls, es bildet sich eine orangegelbe Trübung, und bald folgt eine schwarze Ausfällung.

C) 6000 CC. Harn eines gesunden Individuums wurden mit Bleizucker, Bleiessig und Ammoniak gefällt. Es wurden ungeheuere Mengen gesättigter Bleilösungen verbraucht, ehe eine vollständige Ausfällung erfolgt war, die Niederschläge waren sehr copiös. Die Bleiessig- und Ammoniakniederschläge wurden gut gewaschen mit Wasser angerührt und SH bis zur völligen Zerlegung eingeführt. Das klare Filtrat des Bleiessigniederschlages bräunt sich rasch beim Eindampfen; da es sehr sauer reagirte, wurde die freie Säure durch verdünnte Natronlösung bis zur neutralen Reaction abgestumpft. Bei der weiteren Eindampfung wurde das Filtrat immer dunkler und an den Wänden der Schale bildete sich eine bräunliche Masse. Das eingeengte Filtrat wurde auf $1/4$ Liter verdünnt. Das ammon. Filtrat wurde ebenfalls im Wasserbade bis zur Syrupconsistenz eingedampft, um allen SH zu entfernen und dann wieder auf $1/4$ Liter durch Wasser verdünnt.

Beide eingeengte Filtrate reducirten Culösung zu einer schmutzig gelben trüben Flüssigkeit, das Filtrat des essigsauren Bleis brachte eine reichlichere Reduction hervor. Kaliprobe konnte nicht angestellt werden, da die Filtrate zu dunkel waren. Salpetersaures Wismuthoxyd wurde selbst

bei längerem Kochen nicht geschwärzt, es wurde nur etwas schmutzig verfärbt.

Eine Prüfung im Polarisationsapparate ist ganz unmöglich, da die Flüssigkeiten zu dunkel sind, und trotz Digeriren und Kochen mit Blutkohle nicht hell werden.

Ich versuchte nun, ob die Flüssigkeit zur Gährung gebracht werden könnte.

200 CC. jedes Filtrates werden je in eine Eudiometerröhre gegeben mit Hefe versetzt und unter Quecksilberverschluss durch 3 Tage bei einer Temperatur von 15° R. stehen gelassen. Es entwickelte sich auch nicht Eine Gasblase.

Um zu constatiren, ob etwa der Salzreichthum in den beiden die Filtrate enthaltenden Röhren die Gährung hinderte, wurde nach 3 Tagen in jeder der Röhren eine wässerige Lösung von Traubenzucker eingeleitet. In der das ammoniakalische Filtrat enthaltenden Röhre entwickelt sich eine reiche Gährung, in der das Filtrat des essigsauren Bleiniederschlages enthaltenden Röhre trat nur eine schwache Gährung auf.

D) 6000 CC. Harn desselben Individuums wurden mit Bleizucker, Bleiessig und Ammoniak gefällt. Die zwei letzteren Niederschläge wurden durch gesättigte Oxalsäurelösung zerlegt, es hat sich, wenn die Zerlegung zu Ende ist, der ganze Niederschlag in eine schneeweisse Masse verwandelt, während die darüber stehende Flüssigkeit lichtbraun gefärbt wird. Die Filtrate werden mit kohlensaurem Kalk bis zur schwach alkalischen Reaction gesättigt, filtrirt. Die Filtrate schwach mit Essigsäure angesäuert und zur Trockene eingedampft. Die Rückstände wurden im Wasser gelöst und zwar wurde der Rückstand vom basisch essigsauren Bleiniederschlage in 200 CC. Wasser, der vom Ammoniakniederschlag in 50 CC. Wasser gelöst. Alle Filtrate brachten auf Cuoxydlösung eine schwache Wirkung hervor, sie wurde dichroitisch trübe, energischer war die Wirkung des Filtrates aus dem Bleiniederschlage. Ein kleiner Theil des Filtrates wurde mit Thierkohle entfärbt und die fast wasserhelle Flüssigkeit im Sacharimeter geprüft, es fand nicht die kleinste Ablenkung statt. Von dem Filtrate des Bleiessigniederschlages wurde die Hälfte circa 100 CC. direct in die Eudiometerröhre (*a*) gefüllt, mit Hefe versetzt, in die Quecksilberwanne gebracht; die zweite Hälfte wurde eingeengt, dann soviel absoluten Alkohols hinzugefügt, dass sich eine alkoholische Lösung von 94% Alkohol gebildet hatte. Der Alkohol nach 24 Stunden filtrirt, alkoholische Kalilösung hinzugefügt; es bildet sich eine reiche Fällung, die sich nicht klar absetzt, erst nach 2mal 24 Stunden ist die überstehende Flüssigkeitsschicht klar, der Rest wolkig, ich filtrire, auf dem Filter bleibt eine gallertartige Masse, diese wurde wieder durch etwas verdünnte Oxalsäurelösung zerlegt, das Filtrat mit CO_2 CaO versetzt, die vierfache Menge absoluten Alkohols hinzugefügt, filtrirt, das Filtrat schwach mit Essigsäure angesäuert und zur Trockene verdampft, und der Rückstand in wenig CC. Wasser gelöst. Ein Theil dieser Lösung bringt in der Fehling'schen Lösung eine schwache Reduction

hervor, während sich rasch ein weisser Niederschlag, wahrscheinlich weinsaurer Kalk ausscheidet, der Rest der Lösung in ein enges Eudiometerrohr gefüllt, mit Hefe versetzt und in die Quecksilberwanne gebracht. In beiden Röhren hat sich nach 3 Tagen nicht Eine Gasblase entwickelt. Ich füge beiden Röhren 200 Mg. Traubenzucker in Lösung bei, in der Röhre *a* erfolgt keine Gasbildung, in der Röhre *b* tritt rasch eine Gasentwicklung ein und nach wenigen Tagen haben sich 15 CC. Gas gebildet. Ich füge zur Röhre *a* noch 300 Mg. Zucker, es erfolgt noch keine Gasentwicklung, erst bei weiterer Hinzufügung von 500 Mg. Zucker tritt Gasentwicklung auf. Das Filtrat des ammon. Niederschlages auf circa 50 CC. gebracht, wird gleichfalls in eine Eudiometerröhre zur Gährungsprobe gefüllt, beim Eintragen in die Quecksilberwanne steigen zuerst einige Gasblasen auf, die offenbar der Röhre angehaftet hatten, diese Gasmenge vermehrt sich innerhalb 3 Tage nicht um ein Atom. Nach Hinzufügung von 300 Mg. Zucker tritt rasch Gasentwicklung auf.

Der vorher dargelegte Versuch konnte für die Abwesenheit von Zucker darum nicht ganz beweisend sein, weil die in die Eudiometerröhren gefüllten Flüssigkeitsmengen bedeutend waren, und man annehmen konnte, die gebildete Kohlensäure sei von der Flüssigkeit absorbirt worden. Freilich widersprach dieser Annahme der Umstand, dass bei Zusatz von 200 Mg. Zucker keine Kohlensäureentwicklung stattfand, und diese erst auftrat als mehr Zucker zugefügt war. Es bewies dies, dass die Flüssigkeit frei von CO_2 geblieben war, und dass sie darum die aus den 200 Mg. Zucker entwicklte CO_2 in Lösung hielt, dass auch, nachdem 500 Mg. Zucker zugefügt waren, was bei vollständiger Ausgährung einer CO_2-Menge von circa 125 CC. entspricht, keine CO_2-Entwicklung sichtbar war, und dass erst, nachdem 1 Grm Zucker = 250 CC. CO_2 zugefügt war, Gasblasen in beträchtlicher Menge zum Vorscheine kamen. Der Rückstand aus den ammoniakalischen Filtraten betrug nur 50 CC. und darum konnte bei einer Zuthat von 300 CC. Zucker schon CO_2 zum Vorschein kommen.

E) u. *F)* Ich stellte noch weitere zwei Versuche mit je 8000 CC. normalem Harn an; in dem ersteren habe ich wie früher genau nach Brücke's Vorschrift den Niederschlag von basisch-essigsaurem Blei von dem durch Ammoniak getrennt, die Niederschläge wurden durch Oxalsäure zerlegt, durch kohlensauren Kalk neutralisirt. Aus dem Filtratrückstande des basisch-essigsauren Bleiniederschlags wird ein alkoholisches Extract gemacht, alkoholische Kalilösung hinzugesetzt; der gebildete Niederschlag des vermeintlichen Zuckerkali ist eine gallertartige Masse, die nicht ganz im Wasser löslich ist: ich zerlege wieder durch verdünnte Oxalsäure, sättige mit kohlensaurem Kalke, filtrire, verdampfe nahezu zur Trockene, extrahire mit 93% Alkohol, dampfe ab, es bleibt ein geringer, nicht ganz löslicher Rückstand; der unlösliche Theil besteht aus den vom Alkohol aufgenommenen Kalksalzen, ich gebe das Ganze auf 15 CC. verdünnt mit Hefe in eine Eudiometerröhre, wie bei den meisten Versuchen finden sich beim Sturze der Röhre einige feine Gasblasen in der Kuppe der Röhre, die aber auch nach 8 Tagen nicht vermehrt sind.

Das ammoniakalische Filtrat wurde auf 50 CC. gebracht, 10 CC. auf 100 verdünnt, werden zur Reductionsprobe verwendet, die Fehling'sche Flüssigkeit wurde gelb gefärbt, es schied sich ein reicher, weisser Niederschlag aus, offenbar von den im Filtrate vorhandenen Kalksalzen herrührend, aber dieser färbte sich bei stärkerem Erwärmen vom ausgeschiedenen Kupferoxydulhydrat gelb.

Einen Theil des verdünnten Filtrates, welches noch durch Blutkohle farblos gemacht wurde, untersuchte ich im Polarisationsapparate, es erfolgte nicht die leiseste Ablenkung.

40 CC. mit Hefewasser in eine Eudiometerröhre *(a)* gegeben, durch Quecksilber abgesperrt.

In eine zweite Röhre *(b)* 40 CC. Wasser mit Hefe.

In eine dritte Röhre *(c)* 40 CC. Wasser mit 0·750 Traubenzucker und die gleiche Menge Hefewasser.

In dem Rohre 3 hatten sich schon nach 24 Stunden 40 CC. Gas entwickelt und die Gasmenge war nach 48 Stunden auf 50 CC. gestiegen. In den beiden anderen Röhren fand keine Gasentwicklung statt. Ich gebe nach 3 Tagen in die Röhre *(a)* 0·5 Grm. Zucker, schon nach einer halben Stunde beginnt die schönste Gasentwicklung und nach 24 Stunden haben sich bereits 35 CC. Gas entwickelt. Die Flüssigkeit als solche hatte also die Gährung nicht gehindert.

In einem letzten Versuche abermals mit 8000 CC. Harn habe ich das Filtrat von dem mit Bleizucker gefällten Harn mit Ammoniak versetzt und basisch-essigsaures Blei zugesetzt und den so gebildeten Niederschlag zur Hälfte mit Oxalsäure, zur Hälfte mit SH zerlegt. Das Filtrat von dem durch Oxalsäure zerlegten Bleiniederschlage habe ich durch kohlensauren Kalk neutralisirt, dem sehr sauren Filtrate vom Schwefelbleiniederschlag habe ich Ätzbaryt hinzugefügt, um die durch Säuren veranlasste Schwärzung und mögliche Zersetzung des Zuckers zu verhüten. Es hatte sich ein Barytsalz gebildet. Das Filtrat schwärzte sich beim Eindampfen nicht, der Rückstand war wie jener des aus der Zerlegung durch Oxalsäure gewonnenen Filtrates schön dunkel, syrupartig. Beide Rückstände der eingedampften Filtrate werden auf 100 CC. verdünnt.

Die Kupferprobe gab in beiden Filtraten ein positives Resultat, es bildete sich zuerst ein weisser, rasch braun werdender Niederschlag.

Die Polarisationsprobe gab ein negatives Resultat. Die Gährungsprobe gleichfalls, mit Ausnahme einiger anfangs aufgestiegener Gasblasen, vollständig negativ. Die wenigen Blasen an der Kuppe haben sich durchaus nicht vermehrt.

Ich musste nun zunächst sehen, bis zu welcher Grenze die Gährungsprobe in dem nach dieser Methode dargestellten Zucker nachzuweisen im Stande ist.

G) Ich versetzte 1500 CC. Harn mit 1 Grm. Zucker, fällte den Harn mit Bleizucker; dem Filtrate wurde Ammoniak bis zur stark alkalischen

Reaction und dann Bleiessig zugesetzt, der ausgewaschene Niederschlag durch Oxalsäurelösung zerlegt, das Filtrat durch CO_2CaO gesättigt bis zur schwach alkalischen Reaction, einige Tropfen Essigsäure zugesetzt, zur Trockene eingedampft. Der Rückstand in 100 Wasser gelöst.

Von dieser Lösung wurden 20 CC. mit Thierkohle möglichst entfärbt, aufs frühere Volumen gebracht und zu den Reactionen verwendet. In der Culösung entsteht ein reicher, weisser Niederschlag, der bei weiterem Erhitzen sich von ausgeschiedenem Oxydulhydrat braun färbt, eine quantitative Analyse nicht gut durchführbar.

In dem Polarisationsapparate deutliche Ablenkung, der Zuckergehalt beträgt 0·7%.

50 CC. in einer Eudiometerröhre mit Hefe versetzt, schon nach einer Stunde eine beträchtliche Menge feiner Gasblasen, an der Kuppe des Rohres, nach 2 Tagen 9 CC. freies Gas, nach 3 Tagen 12·5 CC., nach 4 Tagen 20 CC. Der Versuch wird dann abgebrochen. Der Rest jener entfärbten 20 CC. Lösung wurde in einer Eprouvette mit Hefe versetzt und in die Quecksilberwanne gestürzt, schon nach einer halben Stunde entwickelten sich Gasblasen, und nach zwei Tagen haben sich über 2 CC. Gas entwickelt.

H) 1000 CC. Harn mit 10 CC. diabetischem Harn, welche 0·5 Grm. Zucker enthalten, versetzt. Die Mischung reducirt Culösung in geringer Menge, es bildete sich eine dichroitische Trübung, am Boden die ausgeschiedenen Phosphate mit schwach röthlichem Anfluge. Mit Bleizucker gefällt, filtrirt, durch Ammoniak und Bleiessig gefällt, Niederschlag durch Oxalsäure zerlegt, filtrirt, durch CO_2CaO neutralisirt, eingedampft. Rückstand in 80 CC. Wasser gelöst.

40 CC. mit Kohle entfärbt, durch Waschwasser auf 100 CC. verdünnt, zur Reduction von 5 CC. Fehling'scher Lösung verbrauche ich 16 CC., diese 100 CC. enthalten demnach 300 Mgr. reducirender Substanz oder die Gesammtmenge enthielte 600 Mgr., wenn die gesammte reducirende Substanz Zucker wäre oder in gleichem Verhältnisse wie Zucker reducirte.

Der polarisirte Lichtstrahl wird abgelenkt, die durch den Polarisationsapparat nachweisbare Zuckermenge beträgt 0·340 Grm. Es werden ferner 40 CC. mit Hefe versetzt, schon nach 1 Stunde feine Gasblasen an der Kuppe des Endiometerrohres. Nach 2 Tagen 2½ CC. Gas, nach 3 Tagen 8 CC., nach 4 Tagen 10 CC., nach 5 Tagen 18 CC., nach 6 Tagen 21 CC., nach 7 Tagen 26 CC., nach 10 Tagen 32, nach 13 Tagen 34·5 CC. Gleichzeitig hatte sich in dem Controlrohre, in welchem 40 CC. Wasser mit der gleichen Hefemenge sich befand, vom 4. Tage ab etwas Gas gezeigt, und dasselbe war nach 13 Tagen auf 1·5 CC. gestiegen.

Ich hatte nun durch die beiden letzten Versuche den Beweis erhalten, dass Zucker, wenn auch nur in kleinerer Menge dem Harn zugefügt, bis auf 0·05% sowohl durch Gährung wie durch

Sacharimeter nachzuweisen ist, wenn der Zucker als Bleiverbindung ausgefällt wird. Es ergab sich ferner, dass sowohl durch Gährung wie mittelst des Polarisationsapparates nahezu $^2/_3$ Theile des ursprünglichen Zuckergehaltes gefunden werden.

Diesen positiven Resultaten entgegen standen mir die aus einer grossen Zahl von Versuchen sich ergebenden negativen Resultate bei normalem Harn. In dem aus 8000 CC. normalen Harn erhaltenen Bleiniederschlage konnte ich weder durch Sacharimeter noch durch Gährung Zucker nachweisen, und ich war also zu der Annahme berechtigt, dass in dieser Harnmenge auch nicht 0·05% Zucker vorhanden gewesen sein könnte, da ich diese sonst in eclatanter Weise nachzuweisen im Stande gewesen wäre. Noch anders ausgedrückt, könnte ich sagen: ich war im Stande, 0·5 Grm. Zucker, welche in einer bedeutenden Harnmenge, in 1000 CC. Harn, vertheilt waren, durch Bleiniederschläge zu $^2/_3$ wiederzugewinnen und durch Gährung und Sacharimeter nachzuweisen. Das vollständig negative Resultat, welches ich mit den aus 8000 CC. Harn gewonnenen Bleiniederschlägen erzielte, beweist, dass in diesem Harne nicht 0·5 Grm. gelöst waren: der normale Harn kann also nicht 0·006% Zucker enthalten.

Ich musste mich nun fragen: Wie verhalten sich die von mir gefundenen Resultate zu den von Brücke gefundenen? Ich musste mir sagen, dass alle negativen Ergebnisse meiner Untersuchungen in Bezug auf den Zuckergehalt des normalen Harns werthlos sein müssen, einem einzigen, unbezweifelten, positiven Ergebnisse gegenüber. Es war also zunächst meine Aufgabe Brücke's Versuche, aus welchen auf eine Anwesenheit von Zucker im normalen Harn geschlossen wurde, aufmerksam zu studiren. Brücke hat die wesentlichen Resultate seiner Arbeit in zwei Abhandlungen niedergelegt. Die erste ist die bereits erwähnte Abhandlung: „Über das Vorkommen des Zuckers im Urin gesunder Menschen". In dieser hat Brücke die Methode angegeben, wie der Zucker aus dem gesunden Harn als Zuckerkali zu isoliren sei. Ich habe an einer früheren Stelle nachgewiesen, dass Zuckerkali selbst aus einem an Zucker sehr reichen Harn nicht in dieser Weise darzustellen sei, da das gebildete

Zuckerkali sich in einer Flüssigkeit, die nicht mindestens 90% Alkohol enthält, wieder löst.

Brücke selbst scheint die Verlässlichkeit seines Zuckerkalis angezweifelt zu haben, denn in einer anderen Arbeit[1] gibt er an, dass er in dem Harn von Wöchnerinnen zuweilen nicht im Stande gewesen sei, Zuckerkali zu erhalten, obwohl diese Harne nach den Reactionen Zucker enthalten haben müssen; er kommt zu der Hypothese, dass die Ausscheidung des Zuckers als Zuckerkali zuweilen durch irgend eine andere Substanz behindert sein könnte, in der es nicht geeignet ist, im Weingeist schwer lösliches Zuckerkali zu bilden. Hier zuerst wird nun die zweite Isolirungsmethode angegeben, nämlich die, den Zucker als Bleisacharat zu fällen, dieses direct in Kali zu lösen, oder durch Oxalsäure zu zersetzen. Die Beweise für die Anwesenheit von Zucker in dem aus Zersetzung des vermeintlichen Bleisacharates entstandenen Filtrate waren die bekannten Reactionen nach Trommer, Heller und Böttger. Ich habe mit den Filtraten, welche aus der Zerlegung des Bleiessig- und Ammoniakniederschlages entstanden waren, stets eine reducirende Wirkung auf Cuoxyd nachweisen können. Ich habe meist aus den Bleiniederschlägen des normalen Harns viel eclatantere Reductionserscheinungen bekommen, als sie Brücke bei dem Harn von Wöchnerinnen angibt; aber wie bereits früher erwähnt, sind die Reductionserscheinungen für Zuckererkennung nicht massgebend, da speciell Harnsäure dieselbe Wirkung äussert. Die Böttger'sche und Heller'sche sind beweisend, wenn sie eine eclatante Reaction geben, aber hundertfache Versuche haben mich überzeugt, dass diese zwei Reactionen weit hinter der Schärfe der Trommer'schen Probe zurückstehen, und wo diese eine etwas zweifelhaftere Reaction gibt, sind die anderen Reactionen noch viel unbestimmter und unverlässlicher.

Es war sehr naheliegend, die constant auftretende Reductionseinwirkung der Bleiniederschläge auf Harnsäure zu beziehen, es war mir dies um so wahrscheinlicher, als ich einmal zufällig

---

[1] Über Glykosurie bei Wöchnerinnen. Wiener medicinische Wochenschrift.

Gelegenheit hatte, zu beobachten, wie in einem Harne, welchen ich durch Bleizucker ausgefällt hatte, sich am Boden und an den Wänden des Gefässes reichliche Harnsäurekrystalle ausgeschieden hatten.

Um aber Gewissheit darüber zu erlangen, mit welchem der Bleiniederschläge die Harnsäure zur Ausscheidung kommt, machte ich folgenden Versuch:

1) Ich versuchte Harnsäure, circa 1 Grm. in einer wässerigen Lösung von phosphorsaurem Natron in der Wärme zu lösen; es löste sich nur eine Portion der Harnsäure, etwa die Hälfte, die Lösung wurde durch Wasser auf 1500 CC. verdünnt, um ungefähr das Mengenverhältniss wie zwischen Harnsäure und Harn darzustellen. Es wurde nun der Lösung Bleizucker zugesetzt, der gebildete Niederschlag gut gewaschen, und das Filtrat durch Bleiessig und durch Ammoniak gefällt. Die 3 gebildeten Niederschläge wurden durch SH zerlegt, die Filtrate einzeln im Wasserbade zur Trockene eingedampft und mit den gebildeten Rückständen die Murexidprobe angestellt. Der Rückstand von dem durch Zerlegung des essigsauren Bleiniederschlages gewonnenen Filtrates gibt die schönste Murexidprobe, der Rückstand aus dem Ammoniakniederschlage gibt die Murexidprobe nur schwach, während sie mit dem Rückstande aus dem durch Bleizucker gewonnenen Niederschlage vollständig negativ ausfällt; der grösste Theil der Harnsäure ist also durch Bleiessig ausgefällt worden, ein geringer Theil wurde noch durch Ammoniak gefällt, während durch Bleizucker keine Harnsäure ausgefällt wurde. Damit stimmen auch Brücke's Erfahrungen[1], dass der Bleiessigniederschlag oft grössere Mengen reducirender Substanz enthielt als der durch Ammoniak bewirkte, dass er in diesen Niederschlägen viel grössere Mengen dieser reducirenden Substanzen enthielt als er sie sonst im Harne gesunder Menschen fand, dass er sie ferner in diesen Niederschlägen auch in solchen Harnen fand, bei welchen in den Gegenversuchen mit Kali keine reducirende Substanz gefunden werden konnte.

Die Thatsachen haben wir ganz übereinstimmend gefunden, nur die Deutung ist eine verschiedene; Brücke sucht in dieser reducirenden Substanz Zucker, und von dieser Deutung ausgehend, hat er die Ansicht ausgesprochen, man dürfe Harn vor Aufstellung der Kupferprobe nicht mit Bleiessig ausfällen, da mit demselben ein grösserer oder geringerer Bruchtheil des Harnzuckers niedergeschlagen werde.

---

[1] Wiener med. Wochenschr. a. a. O.

Wie natürlich, musste es Brücke klar sein, dass die Reductionserscheinungen nicht genügen, um die Substanz, welche in der aus den Bleiniederschlägen gewonnenen Lösung diese Reductionen veranlasst, unzweifelhaft als Zucker anzusehen. Selbst wenn die Harnsäure durch Zusatz von Salzsäure zum Harn ausgeschieden wäre, würden die Reductionserscheinungen nicht für die Anwesenheit von Zucker beweisend sein, da erstens in dem Harnwasser noch immer etwas Harnsäure gelöst ist, da ferner auch andere Harnbestandtheile die Reduction veranlassen könnten, wie dies erst neulich Thudichum für eine von ihm im Harn entdeckte Substanz nachgewiesen hat. Um die reducirende Substanz als Zucker mit Bestimmtheit ansprechen zu können, bedarf es weiterer Beweise und diese Beweise hat Brücke zu liefern gesucht in seiner zweiten Abhandlung[1], welche die Überschrift trägt: „Darf man Urin, in welchem der Zucker quantitativ bestimmt werden soll, vorher mit Bleiessig ausfällen?"

Hier zum ersten Male treten uns die Gährungsversuche entgegen. Der eine Versuch wurde angestellt mit diab. Harne, dieser wurde erst mit Bleizucker ausgefällt, und dann das Filtrat mit Bleiessig niedergeschlagen; das so erhaltene Präcipitat wurde zuerst auf dem Filtrum mit destillirtem Wasser gewaschen, bis die abtropfende Flüssigkeit trüb erschien, es wurde vielfach abgetrocknet, in einer starken Schraubenpresse abgepresst, mit Oxalsäure zerlegt, filtrirt, das Filtrat durch feinvertheilten CO_2CaO gesättigt, das Filtrat in eine Schrötter'sche Gaséprouvette gefüllt, mit Hefe vermischt, es begann alsbald eine lebhafte Gährung, während eine andere Gaséprouvette mit derselben Hefe und destillirtem Wasser gefüllt keinerlei Gährungserscheinungen bemerken liess.

Vorausgesetzt, dass die Controlröhre eben so viel Flüssigkeit enthielt als die Schrötter'sche Gaséprouvette, dass bei den Flüssigkeiten gleichviel Hefe zugesetzt war, ist die Entwicklung von CO_2 aus dem Filtrate des zersetzten Bleiniederschlages ein unzweifelhafter Beweis, dass dieser Niederschlag Zucker enthalte. Aber ist damit auch bewiesen, dass der Zucker des diab. Harnes durch den Bleiessig gefällt wurde? Brücke erwähnt selbst an einer anderen Stelle derselben Abhandlung, dass der Niederschlag von basisch essigsaurem Blei sich mit Wasser, auch mit ausgekochtem nur unvollständig auswaschen lasse, indem die

---

[1] Sitzungsb. d. math. naturw. Classe d. Akad. der Wissensch. 39. Bd.

Flüssigkeit nach einiger Zeit trüb durchs Filter geht. Er hat nun seinen für den Gährungsversuch bestimmten Niederschlag mit destillirtem Wasser so lange gewaschen bis die abtropfende Flüssigkeit trübe durchging, also nach seinen eigenen Angaben nicht vollständig ausgewaschen. Der Niederschlag wurde wiederholt durch Fliesspapier getrocknet und in einer starken Schraubenpresse trocken gepresst; aber es wurde nicht der Beweis geliefert, dass durch die Abpressung eine vollständige Trennung des Bleiniederschlages von den im Filtrate enthaltenen Bestandtheilen, also auch vom Zucker erzielt wurde. Die Voraussetzung, dass auch nur minimale Zuckermengen dem Niederschlage mechanisch anhafteten, würde die Gährungserscheinungen vollkommen erklären.

Der zweite Versuch Brücke's wurde mit dem Harn eines gesunden Menschen angestellt, die Bleiessigniederschläge wurden wieder ganz in derselben Weise behandelt wie die früheren; aber da gelang es nie, mit dem Filtrate des durch Oxalsäure zerlegten und durch kohlensauren Kalk neutralisirten Bleiessigniederschlages eine Gährung hervorzubringen. Es wurde vielmehr aus diesem eingeengten Filtrate zuerst nach Brücke's Methode ein Kalisacharat dargestellt und zwar indem mit dem auf 200 CC. eingeengten Filtrate 1080 CC. eines Weingeistes, der 94 Vol. % enthielt, gemischt wurden und diesem Gemenge weingeistiges Zuckerkali zugefügt wurde. Das ausgeschiedene Zuckerkali wurde wieder durch Oxalsäure zerlegt, mit feinvertheiltem kohlensaurem Kalke gesättigt, dem Filtrate das vierfache an Alkohol hinzugefügt, filtrirt, das Filtrat zur Trockene eingedampft, der Rückstand in etwas Wasser gelöst und in eine Eprouvette von 4 CC. Inhalt mit Hefe versetzt, es bildete sich an der Kuppe ein feiner Schaum als Gährungsergebniss.

Dass dieses minimale Gährungsresultat nicht von Zucker herrühren könne, ist dadurch klar, weil nach obiger Methode unmöglich Zuckerkali dargestellt werden konnte. Das mit Weingeist versetzte Filtrat enthielt nämlich nur 89% Alkohol und in diesem hätte sich das gebildete Kalisacharat, wenn ein solches entstanden wäre, gelöst.

Mit der vollen beweisenden Kraft dieses Gährungsversuches fällt auch die wichtigste Stütze für die Annahme, dass ein Theil des im Harn gelösten Zuckers mit dem Bleiessig ausgefällt werde. Um diese Annahme aufrecht zu erhalten, die im Widerspruche steht mit der Erfahrung, dass Trauben- oder Harnzucker aus wässeriger Lösung durch Bleiessig nicht gefällt wird, muss Brücke

annehmen [1], es sei im Harne eine Substanz vorhanden, welche die Fällung des Zuckers durch Bleiessig vermittelt, und um es plausibel zu machen, warum dieser Zucker durch Bleiessig gefällt und durch Kali nicht gefällt wird, muss er wieder eine andere Substanz supponiren, „welche die Ausscheidung als Zuckerkali behindere". Und endlich musste es doch auffällig sein, warum der im Bleiessigniederschlage enthaltene Zucker sich nicht direct durch Gährung nachweisen lasse. Alle diese Widersprüche finden ihre natürliche Lösung, wenn die reducirenden Eigenschaften des Bleiessigniederschlages, und nur diese sind unzweifelhaft, auf Rechnung einer anderen mitausgefällten Substanz, und zwar auf die Harnsäure bezogen werden.

Der wichtigste von Brücke mitgetheilte Gährungsversuch ist der, welcher mit dem durch Ammoniak aus gesundem Harn gewonnenen Niederschlage angestellt wurde.

Brücke hatte gegen 10 Liter Filtrate von Bleiessigniederschlägen gesammelt, mit Ammoniak gefällt, die gesammelten und getrockneten Ammoniakniederschläge wurden durch Oxalsäure zerlegt, das Filtrat durch kohlensauren Kalk gesättigt und der Rückstand in wenig Wasser aufgelöst; ein Theil dieser Lösung wurde zu den Reductionsproben verwendet. Es wurden 2½ CC. mit Hefe vermischt, in einem kleinen Reagensglase über Quecksilber abgesperrt, nach einigen Stunden hatte die Gährung bereits begonnen und nach 24 Stunden hatten sich 417 Kubikmillimeter Gas entwickelt, von denen nur 3 Kubikmillimeter nicht durch Kali absorbirt wurden.

Leider hat uns Brücke nicht angegeben, von wie viel Harn die obenerwähnten 10 Liter Filtrat stammten; er hat uns auch nicht gesagt, wie gross der Theil des zur Lösung gebrachten Rückstandes war, der zur Gährung verwendet wurde. Wenn wir einen ungefähren Calcül machen und annehmen, dass von jenen 10 Liter Filtrat etwa $1/5$ auf Waschwasser zu rechnen ist, betrug die ursprünglich benützte Harnmenge 8 Liter. Wenn die aus dem ammoniakalischen Niederschlage schliesslich entstandene Lösung etwa in gleiche Theile getheilt und die eine Hälfte für die Reactionen und die andere für die Gährung verwendet worden wäre, hiesse dies, es sei der Rückstand aus dem ammoniakalischen Niederschlage von 4 Liter Harn zur Gährungsprobe benützt worden.

---

[1] Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. 39. Bd.

Die gebildete Gasmenge betrug circa $^1/_2$ CC., die Gährungsflüssigkeit enthielt auch $2^1/_2$ CC. Gas absorbirt, die Summe der gebildeten Kohlensäure beträgt 3 CC. = 5·7 Mgr. Diese Menge Kohlensäure entspricht 11·6 Mgr. Zucker. 4000 Grm. Harn enthielten 11·6 Mgr. Zucker, 1000 Grm. enthielten 0·0029 Grm. = 0·00029% Zucker. Angenommen, Brücke hätte nur den vierten Theil des von mir supponirten Harns zum Gährungsversuche verwendet und jene 11·6 Mgr. Zucker wären in 1000 CC. Harn enthalten, wäre das gleich einem Percentgehalt von 0·001. Der normale Mensch würde im Tage 15 Mgr. Zucker ausscheiden. Wie weit ist es von diesem Ergebnisse zu Kühne's[1] Behauptung, der normale menschliche Harn enthalte 0·1% Zucker.

Es ist nicht möglich, den directen Beweis herzustellen, dass die gebildete CO_2 nicht vom Zucker stamme. Aber ebenso gut denkbar ist es, dass die dem Prüfungsobjecte zugesetzte Hefe die Quelle dieser CO_2 sei. Die kleine Hefemenge, die ich bei meinen Gährungsversuchen zusetzte, lieferte einige Milligramme CO_2, es brauchte der Probeflüssigkeit nur eine minimale Menge mehr Hefe zugesetzt worden zu sein als der Controlflüssigkeit und es würde als Resultat sich dort $^1/_2$ CC. Gas entwickelt haben, während das Gas in der Controlflüssigkeit gerade ausgereicht hätte, um von der Flüssigkeit absorbirt zu werden.

Dasselbe verschiedene Resultat käme in den beiden der Gährung unterworfenen Flüssigkeiten zu Stande, wenn die Flüssigkeitsmenge in der Controlröhre auch nur um $^1/_2$ CC. mehr betragen hätte als in der Proberöhre. Es wäre dann selbst für den Fall, dass der Hefezusatz in beiden Röhren bis auf 1 Mgr. gleich war, das aus dieser Hefe gebildete Gas von der Controlflüssigkeit in Absorption gehalten worden, während in der Probeflüssigkeit diese letzte $^1/_2$ CC. betragende Gasmenge nicht gelöst bleiben konnte und daher als solches zur Erscheinung kam.

Die Entwicklung von CO_2 aus einigen normalen Harnbestandtheilen, wie z. B. aus dem Harnstoffe ist gleichfalls bekannt.

Es müsste nachgewiesen sein, dass in den Bleifällungen nicht etwas Harnstoff mit niedergefallen ist.

---

[1] a. a. O.

Unzweifelhaft ist es, dass andere, verwandte Harnbestandtheile, wie z. B. Harnsäure, in den Bleiniederschlägen enthalten sind, und es müsste gleichfalls nachgewiesen werden, ob nicht die CO_2-Entwicklung die im normalen Harne ohne Hefezusatz auftritt, aus dem Zerfall dieser Körper mit hervorgehen könne. Die Anwesenheit eines neuen Stoffes kann nur dann als erwiesen angesehen werden, wenn die Reactionen, die seine Anwesenheit constatiren sollen, nicht auch durch andere unzweifelhaft oder möglicherweise vorhandene Substanzen hervorgebracht werden. Die Gährungsprobe wurde als ein solches *experimentum crucis*, welches für die Anwesenheit von Zucker zeugen sollte, angeführt. Aber die Gährung hat keine höhere Beweiskraft als die Reductionsproben; sie ist entscheidend, wo es sich um grössere Mengen Zucker handelt, wo also die gelieferte CO_2-Menge so gross ist, dass sie in dieser Menge aus keiner anderen, in der Gährungsflüssigkeit befindlichen Quelle stammen könnte. Aber für minimale Mengen ist sie fast weniger beweisend als die Reductionsproben, da es zu ihrer Ausführung nöthig ist, dass der Untersuchungsflüssigkeit eine Substanz, die Hefe, zugesetzt ist, die unzweifelhaft kleine Mengen Kohlensäure liefert.

Das Ergebniss des Brücke'schen Gährungsversuches ist also nicht im Stande, die Anwesenheit auch nur einer nimimalen Zuckerspur als normalen Harnbestandtheil unzweifelhaft festzustellen.

Bence Jones[1] hat Brücke's Methoden zur Darstellung von Zuckerverbindungen aus normalem Harn einer Untersuchung unterzogen. Er verwirft die von Brücke angegebene Methode der Darstellung von Zuckerkali, weil nach seinen Untersuchungen Zuckerkali nur in einem nahezu absoluten Alkohol unlöslich ist. Wenn der Alkoholgehalt nur circa 80% beträgt, bleibe der grösste Theil des Zuckerkalis in Lösung, und es sei darum nicht möglich, einen kleinen Zuckergehalt in dieser Weise zu ermitteln. Diese Erfahrung stimmt ganz mit der meinigen, nur dass ich durch directe Versuche bewiesen habe, dass nach Brücke's

[1] Bence Jones. On Sugar in the urine. Quarterly journal of the chemical Society of London. 1862.

Methode auch ein reicher Zuckergehalt einer Flüssigkeit nicht nachgewiesen werden könne.

Die Fällung von Zucker als Zuckerblei hält Bence Jones für die vorzüglichste Methode der Zuckerdarstellung und glaubt, dass man durch dieselbe $^1/_7$ Gran = 0·01 Grm. Zucker im Harne nachweisen könne.

Als Beweis für diese Annahme gilt ihm folgender Versuch: Er hat $^1/_7$ Gran Zucker in 200 CC. Harn gelöst, Bleiniederschläge gemacht, den Ammoniakniederschlag durch Oxalsäure zerlegt, das Filtrat brachte in Culösung einen schmutzig gelben Niederschlag hervor.

Bence Jones hätte, wie Brücke und ich es gefunden haben, dieselbe reducirende Wirkung mit dem Ammoniakniederschlage des normalen Harns hervorbringen können; es ist also durchaus nicht bewiesen, dass die von ihm gefundene Reduction von der zugeführten kleinen Zuckermenge stamme. Die Reduction, zumal wenn sie mit unentschiedener Farbe auftritt, kann eben auch von anderen Harnbestandtheilen herrühren, und man kann mit ihrer Hilfe ebenso wenig die Anwesenheit von Zucker im normalen Harn beweisen, als man im Stande ist, sie als feines Reagens für minimale Mengen zugeführten Zuckers zu benützen.

Bence Jones hat, nachdem er in der angeführten Weise constatirt hatte, dass in dem ammoniakalischen Bleiniederschlage die kleinsten im Harne gelösten Zuckermengen niederfallen, die Anwesenheit des Zuckers im normalen Harn durch die mit dem Filtrate des Bleiniederschlages angestellten Gährungsproben zu constatiren gesucht. Bence Jones hat in zwei Proben ziffermässig die bei der Gährung entwickelte Kohlensäuremenge constatirt. Zu dem einen Versuche waren 10.000 CC., zu dem andern Versuche waren 14.000 CC. Harn verwendet worden. Der erste Versuch lieferte 12 Mgr. Kohlensäure, der 2. Versuch gab 14 Mgr. CO_2.

Wenn diese Kohlensäure aus Zucker stammte, würde das Ergebniss dieser Versuche dahin lauten: 100 CC. Harn enthalten circa 2 Mgr. Zucker, der normale Harn enthält 0·0002% Zucker!

Bence Jones berechnet den CO_2-Gehalt aus dem Gewichtsverlust seines Apparates, eine Methode, die an Fehlern sehr reich ist, da die CO_2 nicht direct nachgewiesen werden kann, und der Apparat auch so schwer und so gross ist, dass leicht vor und nach dem Versuche die Wägung um einige Milligramm verschieden ausfallen kann, ohne dass diese Differenz gerade von entwickelter Kohlensäure herrühren muss. Bence Jones hat mit

seiner Hefe direct Versuche gemacht, und auch aus dieser allein, wenn sie mit Wasser gemischt wurde, CO_2-Entwicklung nachgewiesen. Er zieht auch immer das nach seinen Versuchen auf die verwendete Hefemenge entfallende Gas von der Gesammtmenge des gefundenen Gases ab. Dieser Vorgang ist sehr correct, nur ist dabei vergessen, dass Hefe kein gleichmässiges Gemenge ist, und dass zwei dem Gewichte nach ganz gleiche Hefenmengen doch eine um einige Milligramme verschiedene Kohlensäuremenge liefern können; es ist ferner vergessen, dass es denkbar sei, dass die Selbstvergährung der Hefe im Wasser in anderer Weise von Statten gehen könne, als in einem anderen Medium; es ist ferner vor allem nicht berücksichtigt, dass die Harnbestandtheile, welche in den Bleiniederschlägen enthalten waren und welche in alle Lösungen mit übergehen, auch die Quelle einer kleinen Kohlensäureentwicklung sein könnten.

Bence Jones hat durch Chromsäure die Anwesenheit von Alkohol in dem Destillate der zur Gährung verwendeten Probeflüssigkeit nachgewiesen. Er erwähnt selbst, dass auch in der von dem Hefewasser abdestillirten Flüssigkeit Alkohol nachgewiesen werden konnte, nur habe das Destillat aus der Probeflüssigkeit eine stärkere Reduction der Chromsäure gezeigt, „reduced the chromic acid much more decidedly“. Dieses Plus der Reaction kann wohl für die Entscheidung einer so wichtigen Frage nicht massgebend sein, zumal in solange nicht bewiesen werden kann, dass dieselbe Gewichtsmenge Hefe stets und ohne Rücksicht auf das Flüssigkeitsmedium, in welchem sie suspendirt ist, die gleiche Kohlensäure- und Alkoholmenge liefere.

Das Resultat meiner Untersuchungen lässt sich in Folgendem zusammenfassen:

1. Es fehlt uns an einem verlässlichen Reagens, um sehr kleine in Harn gelöste Zuckermengen unzweifelhaft und mit Ausschluss jeder analog wirkenden Substanz festzustellen.
2. Es sind darum alle Annahmen über das Vorkommen kleiner Zuckermengen im Harn in manchen physiologischen wie in manchen pathologischen Zuständen, als nicht unzweifelhaft erwiesen anzusehen.

3. Der normale Harn enthält keinen Zucker in der Menge, in welcher solcher unzweifelhaft nachgewiesen werden kann.
4. Der normale Harn enthält kleine Mengen reducirender Substanzen. Dass ein Theil derselben Zucker sei, ist mit unseren heutigen Hilfsmitteln nicht endgiltig festzustellen.

Notiz über die älteren meteorologischen Beobachtungen in Lemberg.

Von Dr. A. Handl,
k. k. Universitäts-Professor.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Mai 1871.)

1. Prof. Kunzek hat am 5. Juni 1851 der k. Akademie eine Abhandlung unter dem Titel: „Übersichten der Jahres- und Monatsmittel aus den während eines Zeitraumes von 20 Jahren in Lemberg fortgeführten meteorologischen Beobachtungen" vorgelegt, welche im Bande 7 der Sitzungsberichte pag. 3 ff. enthalten ist. Bei Gelegenheit einer Arbeit, welche ich anderweitig zu veröffentlichen gedenke, musste ich auch die von Kunzek gegebenen Zahlen einer näheren Betrachtung unterziehen, und finde es für nöthig, folgende Bemerkungen über dieselben zu machen:

2. Kunzek sagt in seiner Abhandlung durchaus nichts, von welchem Beobachter die mitgetheilten Resultate gefunden worden seien, und man müsste also vermuthen, dass sie von ihm selbst stammen; so sagt auch Dr. M. Rohrer in seinem „Beitrag zur Meteorologie und Klimatologie Galiziens", pag. 13: „die Beobachtungen des Prof. Kunzek, gleichzeitig mit denen von Van Roy unternommen, wurden durch den Brand der Universität im Jahre 1848 zerstört".

Vergleicht man aber Kunzek's Zahlen mit denen Van Roy's, so findet man sogleich mit Bestimmtheit, dass ersterer die Beobachtungen des letzteren benützte, und eigentlich nur die von demselben in einer Beilage[1] zur „Lemberger Zeitung" von Jahr zu Jahr veröffentlichten Jahresübersichten theilweise in Tabellen zusammenfasste.

Van Roy's Übersichten sind nämlich bedeutend umfassender als die von Kunzek, stimmen aber in den Zahlenwerthen

[1] Rozmaitości lwowskie.

mit denselben bis auf wenige Druckfehler, die sich mit Bestimmtheit als Druckfehler erkennen lassen, vollständig überein.

Soweit ich die Tabellen einer genauen Prüfung unterzogen habe, sind folgende Verbesserungen von Druckfehlern darin anzubringen:

in Tab. I:

1836. Jahresmittel der Temperatur: 6·49° R., nicht 6·43,

in Tab. II:

1833. Juni. Mittlere Temperatur:	= 14·99,	nicht:	14·90,
1839. Juli. „ „	14·73,	„	14·23,
1838. August. „ „	12·20,	„	12·29,
1838. Sept. „ „	12·72,	„	11·72,
1824. Jahresminimum:	— 14·0 ,	„	14·8 ,
1825. Jahresmaximum:	+ 23·5 ,	„	23·9 ,
1836. Jahresmittel:	6·49,	„	6·43,

in Tab. III:

Jahresmittel des Barometerstandes:

1824:	27″ 2‴15,	nicht:	27″ 3‴15,
1825:	27 3·15,	„	37″ 2·15,
1827:	27 2·21,	„	27 2·15.

(Die Monatsmittel des Barometerstandes habe ich nicht revidirt.)

3. Wenn es auch die Gerechtigkeit erfordert, den wahren Namen des Autors der Beobachtungen zu nennen, die übrigens bis 1848 fortgesetzt wurden und 1851 sämmtlich bereits veröffentlicht vorlagen, so würde ich dies doch als eine zunächst persönliche Angelegenheit nicht zum Gegenstande einer Bemerkung an dieser Stelle gemacht haben, wenn nicht Kunzek's sonstige Angaben an mehreren Stellen irrig wären, so dass sie in der Form, wie sie vorliegen, überhaupt nicht gebraucht werden dürfen; was einen Beweis mehr liefert, dass er Van Roy's Beobachtungen, und zwar ohne näheres Eingehen in die Qualität derselben, wiedergegeben hat.

Kunzek's erste Tabelle hat die Überschrift: „Übersicht der Jahresmittel der durch einen Zeitraum von 20 Jahren angestellten meteorologischen Beobachtungen zu Lemberg in Galizien. Die Beobachtungen wurden täglich dreimal vorgenommen, um 8 Uhr Morgens, 2 Uhr Nachmittags und 10 Uhr Abends."

Die übrigen Tabellen enthalten keine Angabe der Beobachtungszeiten. Nun stellte aber Van Roy seine Temperatursmessungen während des ganzen Zeitraumes 1824—1848 des Morgens bei Sonnenaufgang, und nicht um 8 Uhr an; auch die Barometer-Ablesungen nahm er 1824—1828 bei Sonnenaufgang vor, erst 1829 und später um 8 Uhr Morgens.

Ausserdem liess Van Roy in der Art seiner Berechnung der Tagesmittel zweimal Änderungen eintreten. Von 1824—1832 nahm er das arithmetische Mittel aus den drei Tagesbeobachtungen, von 1833—1843 hingegen das arithmetische Mittel aus der Morgens- und Mittagsbeobachtung als Tagesmittel an, indem er die Abendbeobachtung gar nicht berücksichtigte; von 1844 angefangen legte er den drei Tagesbeobachtungen je nach der Jahreszeit verschiedene Gewichte bei, um ein wahres Tagesmittel daraus zu berechnen.

Der letztere Sprung in Van Roy's Berechnungsweise liegt nicht mehr innerhalb der von Kunzek wiedergegebenen Reihe; den ersten aber, zwischen 1832 und 1833, vernachlässigte er ganz, indem seine Tagesmittel nach wie vor mit denen von Van Roy vollkommen übereinstimmen, ohne dass er eine Bemerkung dazu gemacht hätte. Die von Kunzek angegebenen Zahlen sind also in den Temperaturen vor und nach 1833. I. in den Barometerständen vor und nach 1829. I. nicht mit einander vergleichbar; und dies war es, was mich veranlasste, auf die Sache überhaupt an diesem Orte hinzuweisen.

Ich verdanke übrigens der Güte des Herrn Prof. Dr. v. Kuczynski in Krakau die bestimmte Mittheilung, dass Kunzek sich in der Zeit, welche die besprochenen Tabellen umfassen, nicht mit zusammenhängenden, regelmässigen meteorologischen Aufzeichnungen beschäftigte; wohl aber betheiligte er sich eifrig an den sogenannten Terminsbeobachtungen. Leider sind diese verloren gegangen; da aber sicherlich Abschriften davon an andere Beobachter mitgetheilt worden sind, so gibt sich der Verfasser dieser Zeilen der Hoffnung hin, dass sich dieselben noch irgendwo in der wissenschaftlichen Welt finden werden; und bittet hiemit die etwaigen Besitzer derselben, falls sie nicht deren Veröffentlichung vorziehen, ihm freundlichst eine Copie davon zukommen lassen zu wollen.

4. Um den an den besprochenen Tabellen gerügten Übelstand theilweise zu verbessern, hänge ich hier eine Übersicht der Monats- und Jahresmittel der Temperatur in den Jahren 1824—1848 nach Van Roy's Beobachtungen an.

Die Zahlen sind die arithmetischen Mittel der bei Sonnenaufgang, um 2 Uhr und um 10 Uhr Abends beobachteten Tem-

Übersicht der Monats- und Jahresmittel

Beobachtet von Van Roy 1824—1848, täglich

$$\text{Mittel} = \frac{a + 2^h + 10^h}{3}$$

Jahr	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
1824	— 2·16	—0·11	+2·89	7·70	11·59	15·19
1825	— 1·30	—3·72	—3·34	5·90	13·06	15·85
1826	— 8·03	—3·25	+0·80	6·25	11·88	16·23
1827	— 1·44	—7·63	+2·75	8·14	14·19	19·01
1828	— 8·63	—6·91	+2·51	8·39	11·94	16·63
1829	— 9·05	—6·94	—1·40	8·74	10·54	13·78
1830	—10·46	—7·73	—2·41	7·99	12·66	17·55
1831	— 8·13	—2·74	+0·59	10·30	12·67	15·13
1832	— 4·71	—2·36	—0·23	5·42	11·23	14·46
1833	— 7·48	—0·19	+1·63	5·94	14·05	18·17
1834	— 1·53	—1·55	+0·06	5·60	15·98	16·74
1835	— 1·63	—0·33	+1·61	5·75	12·53	16·58
1836	— 6·71	—1·90	+7·55	8·79	10·04	15·71
1837	— 3·39	—4·51	—0·03	8·42	11·99	14·25
1838	—12·48	—5·53	+1·11	6·06	12·28	14·73
1839	— 4·89	—2·68	—3·49	3·54	13·49	16·67
1840	— 4·26	—4·21	—3·68	4·43	10·29	14·85
1841	— 4·50	—9·28	—0·18	8·59	14·89	17·30
1842	— 7·59	—4·24	+1·05	3·76	12·75	14·56
1843	— 1·63	+4·85	—0·61	6·71	8·80	15·31
1844	— 5·41	—3·06	—1·23	4·89	13·96	14·21
1845	— 1·01	—7·73	—4·66	6·73	12·24	16·49
1846	— 2·79	—2·04	+4·73	8·84	11·00	13·96
1847	— 8·74	—3·83	—0·38	7·22	13·58	14·89
1848	—11·93	—0·94	+2·98	10·14	11·30	19·63

peraturen, auf Celsius Grade reducirt. Nur für 1848 fehlen die Zahlenangaben, welche zur Herstellung dieser „rohen“ Tagesmittel nöthig wären, die Mittel der einzelnen Beobachtungsstunden, und sind also die von Van Roy publicirten corrigirten Tagesmittel gegeben.

der Temperatur in Lemberg in Galizien.

bei Sonnenaufgang, 2 Uhr, und 10 Uhr Abends.

in Celsius-Graden.

Juli	August	Septemb.	October	Novemb.	Decemb.	Jahresmittel
17·42	17·81	15·25	9·30	+4·17	+ 2·67	8·48
16·44	16·45	12·55	8·04	+6·09	+ 2·39	7·36
20·89	17·69	13·49	9·17	+3·40	+ 0·85	7·46
18·48	17·25	12·29	9·54	—0·18	— 0·91	7·61
19·04	16·01	11·38	7·16	+1·26	— 3·05	6·30
17·94	16·49	15·68	5·34	—4·18	—12·93	4·50
17·25	20·00	13·23	5·49	+3·39	+ 1·20	6·49
17·43	16·04	11·18	8·83	+0·11	— 3·33	6·50
13·97	16·55	10·23	7·41	—1·16	— 4·98	5·49
17·34	13·93	12·54	6·01	+1·88	+ 0·76	7·05
20·39	19·51	14·67	6·36	+2·31	— 1·91	7·93
17·44	14·88	12·47	7·92	—3·03	— 6·14	6·50
15·83	14·50	13·64	11·41	+0·49	+ 0·21	8·50
14·39	17·00	12·17	7·05	+3·01	— 6·35	6·17
15·47	14·61	14·85	5·18	+0·66	— 3·89	5·25
17·58	17·85	15·39	8·01	+2·09	— 4·74	6·59
17·96	14·80	14·93	5·21	+3·20	— 9·83	4·24
18·86	17·93	14·13	10·86	+3·33	+ 1·18	7·76
16·31	17·48	13·69	5·83	+0·29	+ 0·38	6·19
15·96	16·47	10·58	8·39	+1·35	+ 0·98	7·26
14·98	15·31	13·67	8·36	+2·15	— 6·58	5·94
18·94	15·92	12·04	8·21	+4·23	— 0·35	6·75
18·43	20·26	13·06	11·46	—0·86	— 3·13	7·75
16·35	19·06	12·38	6·60	+0·85	— 4·46	6·13
17·20	17·06	11·85	10·56	+2·15	—	—

Über die Abhängigkeit des Erdmagnetismus von der Rotation der Sonne.

Von **Carl Hornstein,**
Director der k. k. Sternwarte in Prag.

(Mit 2 Tafeln.)

Die Bewegungen der Sonnenflecken haben uns die Rotationszeit der Sonne und die Stellung des Sonnenäquators näherungsweise kennen gelehrt. Aber schon bei den ersten Bestimmungen dieser Grössen von Lalande, Laugier u. a., welche mit Benützung von nur wenigen Flecken gemacht worden waren, zeigten die Resultate aus den einzelnen Flecken eine sehr geringe Übereinstimmung. In neuester Zeit wurden daher von Carrington und anderen Beobachtern Messungen an sehr zahlreichen Sonnenflecken vorgenommen, um mit Hilfe eines möglichst reichen Beobachtungsmateriales zu genauen Werthen für diese Rotationselemente zu gelangen. Allein auch diese Bemühungen führten nicht zu dem gewünschten Ziele; sie lehrten uns nur die Rotationszeit der Photosphäre und die Strömungen in letzterer näher kennen. Die Rotationszeit des Sonnenkörpers blieb nach wie vor unbekannt.

Aus Carrington's Beobachtungen hat Faye nachstehende Werthe für die Rotationszeit der Flecke in verschiedenen heliographischen Breiten erhalten.

Heliogr. Breite	Rotationszeit der Flecke
0°	25·187 Tage.
±10	25·327 „
20	25·739 „
30	26·398 „
40	27·252 „
45	27·730 „

Spörer findet aus zahlreichen Beobachtungen, nahe übereinstimmend mit Carrington:

Heliogr. Breite			Rotationszeit der Flecke
24°	21′	nördl.	26·120 Tage
14	4	„	25·621 „
6	51	„	25·214 „
1	33	„	24·541 „
4	47	südl.	25·113 „
15	24	„	25·770 „
30	20	„	26·216 „

Will man nicht Annahmen machen, welche den Grundsätzen der Mechanik widerstreiten, so wird man wohl die aus Flecken der Äquatorialzone erhaltene Rotationszeit

24·541 Tage

oder eine wenig von ihr verschiedene als die, der wahren Rotationszeit der Sonne am nächsten kommende gelten lassen müssen.

Die Unsicherheit, welche der Natur der Sache nach diesem Resultate anhaftet, erregt den Wunsch, noch andere Erscheinungen kennen zu lernen, welche von der Rotation der Sonne abhängig sind. Die Grössen, welche den Verlauf dieser Erscheinungen bestimmen, werden dann als Functionen dieser Rotationszeit zu betrachten sein und aus den Änderungen, welche jene Grössen mit der Zeit erfahren, wird sich die Rotationszeit der Sonne finden lassen.

Man hat bekanntlich in den letzten Jahrzehnten zu wiederholten Malen beobachtet, dass auffallende Veränderungen auf der Sonnenoberfläche mit grösseren Änderungen der Richtung und Stärke des Erdmagnetismus gleichzeitig stattfanden. Ferner ist durch die wichtigen Arbeiten von Sabine, Wolf, Lamont u. a. nachgewiesen, dass die Jahresmittel der täglichen Variation der magnetischen Declination dieselbe 11jährige Periode zeigen, wie die Sonnenflecke, und dass ein Gleiches auch von den Variationen der horizontalen Intensität gelten dürfte; ein Beweis, dass veränderte Zustände auf der Sonnenoberfläche (welche wahrscheinlich nur Folgen von gewaltigen Umwälzungen innerhalb des Sonnenkörpers selbst sind) Änderungen in den Elementen der

erdmagnetischen Kraft herbeiführen. Verschiedene Zustände auf der Sonnenoberfläche finden aber nicht nur nach einander statt, im Verlaufe der 11jährigen Periode der Sonnenflecke; sie sind auch gleichzeitig neben einander vorhanden, wenn man Regionen von beträchtlich verschiedener heliographischer Länge in der Fleckenzone ins Auge fasst. Da nun während einer Rotation der Sonne nach und nach alle diese Regionen sich der Erde zuwenden, und innerhalb dieser Periode jeder Punkt der genannten Zone seine Entfernung von der Erde nahe um den ganzen Durchmesser der Sonne ändert, so bin ich auf den Gedanken gekommen, zu untersuchen, ob sich nicht periodische Veränderungen in den Elementen des Erdmagnetismus zeigen, bei welchen die Dauer einer Periode gleich ist der (synodischen) Rotationszeit der Sonne oder einem aliquoten Theile derselben. Ich habe diese Untersuchung auf alle drei Elemente, Declination, Inclination und horizontale Intensität ausgedehnt, und es hat sich aus der Discussion mehrjähriger Beobachtungen in Prag, Wien und an anderen Orten ergeben, dass die Änderungen jedes der drei Elemente der erdmagnetischen Kraft eine Periode von nahe $26^{1}/_{3}$ Tagen andeuten, eine Periodicität, die wohl kaum anders als durch Einwirkung der Sonne erklärt werden könnte.

Ich habe zuerst die Beobachtungen der Declination in Prag im Jahre 1870 untersucht, und dabei, wie auch bei allen anderen Beobachtungsreihen, anfänglich das folgende Verfahren in Anwendung gebracht. Später habe ich, in Rücksicht auf den Umstand, dass man es hier, wie bei vielen die Sonne betreffenden Untersuchungen, mit einer der verwickeltsten und unregelmässigsten unter allen periodischen Erscheinungen zu thun hat, häufig ein graphisches Verfahren substituirt. Um von der täglichen Variation der Declination möglichst unabhängig zu sein, wurden die von 4 zu 4 Stunden gemachten Beobachtungen zu Tagesmitteln vereinigt, welche in der folgenden Tafel zusammengestellt sind.

Tagesmittel der magnetischen Declination in Prag im Jahre 1870.

Tag	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
1	12° 3'73	12° 5'75	12° 0'18	12° 2'70	12° 2'64	12° 2'19
2	4·26	5·09	0·44	2·59	4·90	2·31
3	1·45	4·45	0·57	2·70	1·49	2·72
4	2·61	1·83	1·25	2·14	2·55	3·39
5	2·65	2·40	1·82	4·53	1·75	3·17
6	3·98	0·99	1·55	1·30	2·31	2·08
7	4·68	3·33	1·41	1·86	3·02	2·60
8	2·16	3·89	3·31	1·28	2·84	2·03
9	4·01	3·68	2·18	2·59	2·58	1·67
10	4·61	2·33	1·87	1·13	3·25	2·15
11	3·68	3·55	2·46	0·98	2·00	1·34
12	3·02	2·78	1·92	2·73	1·79	0·91
13	3·76	3·70	12 0·65	0·65	1·81	1·71
14	3·71	4·12	11 59·89	2·11	1·75	1·47
15	4·26	3·82	12 1·92	1·33	1·32	0·73
16	3·82	2·80	1·30	3·72	2·17	2·18
17	3·61	2·78	3·54	1·93	2·00	12 0·19
18	3·89	2·85	3·26	2·76	0·38	11 59·13
19	3·52	1·86	3·57	0·49	0·95	59·53
20	4·09	1·12	0·96	1·12	6·96	11 59·84
21	5·39	2·53	2·58	1·22	1·87	12 2·16
22	3·95	2·99	3·65	2·28	3·59	0·39
23	4·13	0·71	0·64	12 1·44	0·36	1·32
24	4·14	1·41	1·91	11 59·57	0·90	2·36
25	4·51	1·42	1·02	12 1·63	2·56	0·99
26	5·15	0·94	0·98	2·47	1·71	3·00
27	7·01	1·34	1·55	1·18	3·44	1·99
28	4·81	12 1·27	3·41	0·73	5·25	1·43
29	1·93	....	1·59	1·73	3·74	1·05
30	2·01	....	1·30	12 2·12	2·00	12 1·83
31	12 2·80	....	12 1·43	....	12 3·41	....

Tag	Juli	August	Septemb.	October	November	December
1	12° 0'42	11°59'37	12° 1'25	11°58'08	11°59'80	12° 0'60
2	1·53	11 58·01	11 59·76	58·69	59·56	1·24
3	2·03	12 1·88	58·87	58·60	59·87	0·92
4	1·14	11 58·35	11 57·38	58·15	11 59·82	1·00
5	0·39	57·93	12 0·20	57·45	12 0·21	1·66
6	12 0·97	57·79	11 59·78	59·32	0·26	0·92
7	11 59·06	57·72	59·92	58·53	0·82	0·61
8	59·20	58·89	58·91	58·51	12 2·79	0·89
9	59·20	57·65	58·76	58·46	11 59·91	1·96
10	59·30	58·41	59·21	59·14	11 59·48	12 0·53
11	57·85	57·93	59·71	57·88	12 0·10	11 58·66
12	58·87	58·81	11 59·51	58·84	11 58·40	11 59·44
13	57·66	59·28	12 1·36	58·88	12 0·17	12 0·79
14	59·54	59·34	12 0·70	58·12	12 0·04	12 1·29
15	11 58·94	59·47	11 59·41	57·06	11 59·92	11 59·65
16	12 0·54	11 59·02	12 1·22	57·54	59·73	12 0·38
17	11 59·72	12 0·79	11 59·33	57·80	59·70	12 1·20
18	59·47	0·17	12 1·25	58·33	59·35	11 56·94
19	59·77	12 1·75	11 58·74	58·30	58·68	57·31
20	59·85	11 59·62	58·91	58·28	57·93	57·95
21	59·36	11 59·24	11 56·81	58·45	58·26	58·46
22	11 58·88	12 0·31	56·67	58·09	57·94	11 58·83
23	12 0·17	2·26	59·90	58·33	58·30	12 0·17
24	11 59·81	0·77	54·86	11 57·41	59·37	11 59·58
25	12 0·80	12 1·86	11 57·30	12 2·00	58·78	12 1·20
26	12 0·25	11 59·20	12 0·08	11 57·33	58·78	0·45
27	11 59·80	11 59·49	11 56·67	57·23	11 59·92	0·90
28	12 1·84	12 1·91	57·30	59·84	12 0·34	0·86
29	11 58·54	3·21	57·97	58·71	11 59·68	2·12
30	59·28	0·87	11 58·37	59·33	11 59·21	0·57
31	11 59·39	12 0·47	....	11 59·50	....	12 0·86

Um nun zu sehen, ob die Beobachtungen eine Periode von T Tagen andeuten, wurden die Zahlen der vorstehenden Tabelle mit fortlaufenden Nummern versehen gedacht und in Gruppen zusammengestellt. Alle Zahlen, deren Nummern sich um ein Viel-

faches von T unterscheiden, wurden in dieselbe Gruppe aufgenommen, und die Zahlen jeder Gruppe in ein Mittel zusammengefasst. Die Dauer der Periode oder die Zahl T wurde von 16 bis 28 Tage angenommen. Die so erhaltenen Mittel sind in der folgenden Tafel enthalten, in welcher die erste Columne die fortlaufende Nummer der Tage der Periode enthält, von 1 bis T, oder wenn T keine ganze Zahl ist, von 1 bis zu der nächst kleineren, an T grenzenden ganzen Zahl. Die für T=16 bis T=20 erhaltenen Mittel sind in die Tafel nicht aufgenommen.

Tag	T=21	22	23	24	25	25·5	26	26·5	27	28
n= 1					1·12	1·69	1·91	1·36	0·78	0·67
2	1·07	0·98	1·09	0·95	1·48	1·83	1·29	0·86	0·34	0·79
3					0·99	0·95	0·98	0·62	—0·24	0·83
4					0·95	1·29	0·41	0·57	0·32	1·34
5					1·02	1·42	0·66	0·36	0·27	1·10
6	1·23	0·97	0·86	0·82	1·75	1·59	1·03	0·63	0·67	0·95
7					1·25	1·11	0·89	0·74	0·76	1·54
8					1·16	0·84	0·43	0·26	0·31	0·96
9					1·26	0·52	0·71	0·20	0·56	1·95
10	0·99	1·09	0·77	0·91	0·91	0·41	0·64	0·58	0·86	2·11
11					1·16	1·12	0·16	0·38	1·30	1·71
12					1·17	0·50	0·68	0·60	1·25	0·97
13					0·51	0·70	0·16	0·95	1·92	1·05
14	0·71	0·81	0·89	0·85	0·37	0·90	0·02	1·14	1·67	0·95
15					1·39	0·42	0·65	1·36	1·70	0·85
16					0·96	0·40	0·77	1·49	1·48	0·70
17					0·78	0·45	0·83	1·21	1·04	0·77
18	0·62	0·71	0·80	0·88	0·54	0·67	1·09	1·60	1·29	0·92
19					0·61	0·91	1·20	1·37	1·12	0·54
20					0·77	0·98	0·82	1·31	1·26	0·62
21					0·49	0·70	1·23	1·51	1·05	0·83
22	....	....	....	0·94	0·83	0·61	1·14	1·31	0·86	0·55
23					0·96	0·58	1·37	1·43	1·13	0·30
24					0·72	0·78	1·35	1·16	0·77	0·90
25					0·60	1·13	1·48	1·20	0·91	0·76
26	....	....	....	....	....	....	1·64	0·84	1·22	0·14
27					....	....	....	....	0·62	1·00
28					....	....	....	....	....	1·03

Die Zahlen jeder Columne, welche den Gang der Declination während einer Periode vorstellen, wurden nun von der seculären Abnahme der Declination befreit und durch eine Reihe von der Form

$$u_0 + u_1 \sin(x + v_1) + u_2 \sin(2x + v_2) + \ldots$$

dargestellt, wobei ich mich bei dieser vorläufigen Untersuchung auf die beiden ersten Glieder der Reihe beschränkte. Von $T=16$ bis $T=24$ wurde ein graphisches Verfahren angewendet, für die übrigen Werthe von T sind die Constanten der Reihe durch Rechnung bestimmt. Es ergab sich hierdurch für die Declination (Mitte 1870):

T	Declination
16 Tage	12° 1' 11+0' 03 sin (x+.......)
17	1·09+0·12 sin (x+.......)
18	1·11+0·07 sin (x+.......)
19	1·07+0·19 sin (x+.......)
20	1·10+0·12 sin (x+.......)
21	1·13+0·19 sin (x+.......)
22	1·12+0·13 sin (x+.......)
23	1·09+0·10 sin (x+.......)
24	1·16+0·10 sin (x+.......)
25	1·20+0·172 sin (x+ 3°22')
25·5	1·16+0·336 sin (x+ 70 0)
26	1·17+0·616 sin (x+123 4)
26·5	1·23+0·696 sin (x+174 18)
27	1·21+0·660 sin (x+217 40)
28	1·24+0·281 sin (x+326 18)

Der Winkel x ist $= \frac{360°}{T} n$, wo n die Anzahl Tage vom 0. Jänner 1870 bedeutet. Die Declination, durch eine periodische Function dargestellt, enthält also kein beträchtliches Glied, welches einer Periode von 16 bis 25 Tagen entspricht. Hingegen zeigt (für $T>25$) das allmählige Wachsen und Abnehmen der Coëfficienten des periodischen Gliedes, so wie der regelmässige Gang des unter dem Sinuszeichen stehenden Winkels an, dass die Declination ein Glied mit der Periode von nahe 26·5 Tagen enthält und also innerhalb dieser Zeit eine Oscillation macht,

deren Amplitude nahe $^7/_{10}$ Minuten ist, und dass keine andere erhebliche Oscillation existirt, deren Periode zwischen 25 und 28 Tagen fällt. Um den wahrscheinlichsten Werth der Amplitude zu finden, habe ich, der Maclaurin'schen Reihe gemäss, für diese Amplitude, welche als Function des angenommenen Werthes T der Periode zu betrachten ist, den Ausdruck gewählt:

$$\text{Amplitude} = \alpha + \beta(T - 26\cdot5) + \gamma(T - 26\cdot5)^2$$

Die Coëfficienten α, β, γ erhält man aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha - 1\cdot0\beta + 1\cdot00\gamma - 0\cdot336 &= 0\\
\alpha - 0\cdot5\beta + 0\cdot25\gamma - 0\cdot616 &= 0\\
\alpha + 0\ \ \beta + 0\ \ \ \gamma - 0\cdot696 &= 0\\
\alpha + 0\cdot5\beta + 0\cdot25\gamma - 0\cdot660 &= 0\\
\alpha + 1\cdot5\beta + 2\cdot25\gamma - 0\cdot281 &= 0
\end{aligned}$$

Bestimmt man α so, dass die Summe der übrigbleibenden Fehler $= 0$ wird, so ist

$$\alpha = 0'6958, \quad \beta = +0'0940, \quad \gamma = -0'24965$$

und die übrigbleibenden Fehler werden:

$$\begin{aligned}
&+ 0'016\\
&- 0\cdot029\\
&\ \ \ 0\cdot000\\
&+ 0\cdot021\\
&- 0\cdot005
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\text{Amplitude} = 0'6958 + 0'0940\,(T - 26\cdot5) - 0'24965\,(T - 26\cdot5)^2.$$

Jener Werth von T wird nun als die wahrscheinlichste Dauer der Periode gelten können, für welchen die Amplitude ein Maximum wird. Diese Bedingung gibt:

$$T = 26\cdot6883 \text{ Tage}$$

und der grösste Werth der Amplitude ist

$$0'705.$$

Für den constanten, zu x zu addirenden Winkel wird auf demselben Wege gefunden

$$171^\circ3 + 100^\circ9\,(T - 26\cdot5) + 1^\circ202\,(T - 26\cdot5)^2,$$

also der wahrscheinlichste Werth = 190° 20′. Die wahre, in der Periode von 26·6883 Tagen erfolgende Oscillation der magnetischen Declination in Prag ist also im Durchschnitte aus den Beobachtungen des Jahres 1870: 0′705 sin $(x + 190° 20′)$, wo $x = \frac{360°}{26 \cdot 6883} \times n$ ist.

Aus den Beobachtungen der Declination in Wien im Jahre 1870 erhielt ich auf demselben Wege die Oscillation für

T=24 Tage	0′469 sin $(x+ 97°36')$
25	0·057 sin $(x+ 39\ 17)$
26	1·072 sin $(x+122\ 56)$
27	0·910 sin $(x+241\ 51)$
28	0·419 sin $(x+ 63\ 56)$

und daraus den Werth der Amplitude:

Amplitude = 0′776 + 0′0753 $(T—26)$ —0′09536 $(T—26)^2$,

und für das Maximum: T = 26·3948 Tage.

Die Tagesmittel der Inclination in Prag im Jahre 1870 lieferten folgende Resultate:

T	Inclination	
16 Tage	65°13′95 +0′06	sin $(x+\ldots\ldots\ldots)$
17	13·97 +0·07	sin $(x+\ldots\ldots\ldots)$
18	13·96 +0·09	sin $(x+\ldots\ldots\ldots)$
19	13·96 +0·05	sin $(x+\ldots\ldots\ldots)$
20	13·96 +0·05	sin $(x+\ldots\ldots\ldots)$
21	13·97 +0·05	sin $(x+\ldots\ldots\ldots)$
22	13·98 +0·08	sin $(x+\ldots\ldots\ldots)$
23	13·98 +0·04	sin $(x+\ldots\ldots\ldots)$
24	13·98 +0·0624	sin $(x+ 68°10')$
25	13·98 +0·1705	sin $(x+188\ 26)$
25·5	13·98 +0·1718	sin $(x+239\ 33)$

Ferner aus den Inclinationsbeobachtungen vom April bis September mit Weglassung der Wintermonate, wo die Oscillation weniger deutlich hervorzutreten schien, erhielt ich:

T	Inclination
24 Tage	$65°13'86 + 0'1991 \sin(x + 96° 3')$
25	$13·85 + 0·2109 \sin(x + 178 \; 9)$
26	$13·86 + 0·2617 \sin(x + 277 \; 44)$
27	$13·82 + 0·2438 \sin(x + 26 \; 49)$
28	$13·82 + 0·1867 \sin(x + 82 \; 45)$,

und daraus den Werth der Amplitude:

$$\text{Amplitude} = 0'2499 + 0'00081(T-26) - 0'01475(T-26)^2$$

und für das Maximum $T = 26·02746$ Tage.

Die Tagesmittel der horizontalen Intensität in Prag im Jahre 1870 endlich ergaben folgende, fast durchweg auf graphischem Wege erhaltene Resultate:

T	Horiz. Intensität
16 Tage	$1·9360 + 3·0 \sin(x + 210°)$
17	$60 + 3·0 \sin(x + 260)$
18	$59 + 6·0 \sin(x + 0)$
19	$59 + 7·0 \sin(x + 180)$
20	$61 + 5·0 \sin(x + 260)$
21	$60 + 12·0 \sin(x + 270)$
22	$58 + 8·0 \sin(x + 160)$
23	$59 + 3·0 \sin(x + 300)$
24	$58 + 17·0 \sin(x + 225)$
25	$59 + 10·5 \sin(x + 32)$
25·5	$59 + 8·5 \sin(x + 115)$
26	$57 + 11·7 \sin(x + 227)$
26·5	$58 + 12·0 \sin(x + 245)$
27	$59 + 4·5 \sin(x + 330)$
28	$57 + 5·0 \sin(x + 270)$

Auch hier ist eine Periode von 26 Tagen angedeutet.

Nachdem die Existenz einer in nahe 26 Tagen erfolgenden Oscillation in den Elementen der erdmagnetischen Kraft wohl unzweifelhaft nachgewiesen ist, und ich kein Bedenken trage, dieselbe als eine Wirkung der Sonne anzusehen, habe ich die schon oben erwähnte grosse Unregelmässigkeit in Erwägung gezogen, welche sich bei allen periodischen Erscheinungen auf der

Sonne, so wie bei allen, mit diesen im Zusammenhange stehenden Phänomenen zu erkennen gibt. In der That würde das hier in Anwendung gebrachte Verfahren, welches um so genauere Resultate liefern wird, je regelmässiger die zu untersuchende periodische Erscheinung und je beständiger die Periode derselben ist, mit nur mässigem Erfolge verknüpft sein, wenn man es z. B. zur genaueren Ermittlung der 11jährigen Periode der Sonnenflecke anwenden wollte. Ich habe mir daher zunächst noch die Frage vorgelegt, ob es wohl gestattet sei, den mittleren Zustand des Sonnenkörpers im Allgemeinen während einer Reihe von Rotationen als so beständig vorauszusetzen, dass die Anwendung dieses Rechnungsverfahrens noch zu billigen ist. Es wurden aus den Declinationsbeobachtungen in Prag die, fünf Perioden umfassenden Beobachtungen vom 19. April bis Ende August 1870, ferner die, vier Perioden umfassenden Beobachtungen vom 1. September 1870 bis Anfang 1871 herausgehoben und getrennt auf graphischem Wege behandelt. Sie ergaben für die Oscillation:

(April bis August)	$0'8 \sin(x+90^\circ)$	$x=0$	am 6. Mai,
(Sept. bis Dec.)	$0\cdot8 \sin(x+90\ )$	$x=0$	am 14. Sept.

Die Amplitude ist also durch viele Monate unverändert geblieben. Die Periode ergibt sich aber auf diesem Wege etwas kleiner, nämlich $T=26\cdot20$ Tage. Dieses Resultat ist der Annahme eines längere Zeit andauernden Beharrungszustandes der Sonnenkraft theilweise günstig.

Mehr entscheidend wäre aber die Vorausberechnung oder Rückwärtsrechnung des periodischen Ganges der Declination für ein anderes Jahr mit Hilfe der Resultate des Jahres 1870. Um hiezu zu gelangen, habe ich zuvörderst einen Mittelwerth für T abgeleitet. Es wurde nämlich gefunden:

Aus der Declin. 1870 in Prag (berechnet)......	$T=26\cdot69$	Tage
" " " " " " (graphisch)......	$26\cdot20$	"
" " " " " Wien (berechnet)......	$26\cdot39$	"
" " Inclin. " " Prag (berechnet)......	$26\cdot03$	"

Das Mittel, nämlich

$$T=26\cdot33 \text{ Tage}$$

kann vorläufig als der wahrscheinlichste Werth der Periode, und als das Resultat der ersten Versuche, die (synodische) Rotationszeit der Sonne mit Hilfe der Magnetnadel zu bestimmen, betrachtet werden.

Die wahre Rotationszeit der Sonne ergibt sich hieraus $=24\cdot55$ Tage, also fast genau übereinstimmend mit dem Werthe, welcher für die Rotationszeit der Sonnenflecke in der Äquatorialzone der Sonne aus astronomischen Beobachtungen (nach Spörer) gefunden wurde.

Ich habe nun eine Reihe von Jahrgängen der magnetischen Beobachtungen in Prag, Wien, Kremsmünster, Dublin, Toronto, St. Helena, u. a. graphisch dargestellt, theilweise auch der Rechnung unterzogen, und in Bezug auf die $26^1/_3$tägige Periode untersucht. Von dieser Arbeit, auf welche ich bei einer anderen Gelegenheit nochmals zurückkommen werde, theile ich auf den zwei folgenden Tafeln drei Darstellungen solcher Beobachtungsreihen mit und zwar:

Auf Tafel I ist der Gang der Declination in Prag (1870) verzeichnet. Die unregelmässige Curve entspricht dem wirklichen Gange der Declination; sie ist zweimal in die Tafel I eingezeichnet. Oberhalb ist sie allein gezeichnet, damit der Leser in der Lage ist, die Curve unbefangen und von den vorhergehenden Betrachtungen unbeeinflusst übersehen zu können. Unten sind noch zwei andere Curven hinzugefügt. Die punktirte Curve ist mit Hilfe der Monatmittel der Declination construirt. Da ein Monat nur um wenige Tage mehr umfasst, als eine synodische Rotationsperiode, so ist der Gang dieser Curve von dem Einflusse der Rotation der Sonne fast unabhängig. Fügt man zu dem Gange der Declination nach dieser Curve noch die periodische Oscillation

$$0'705 \sin (x+190°20')$$

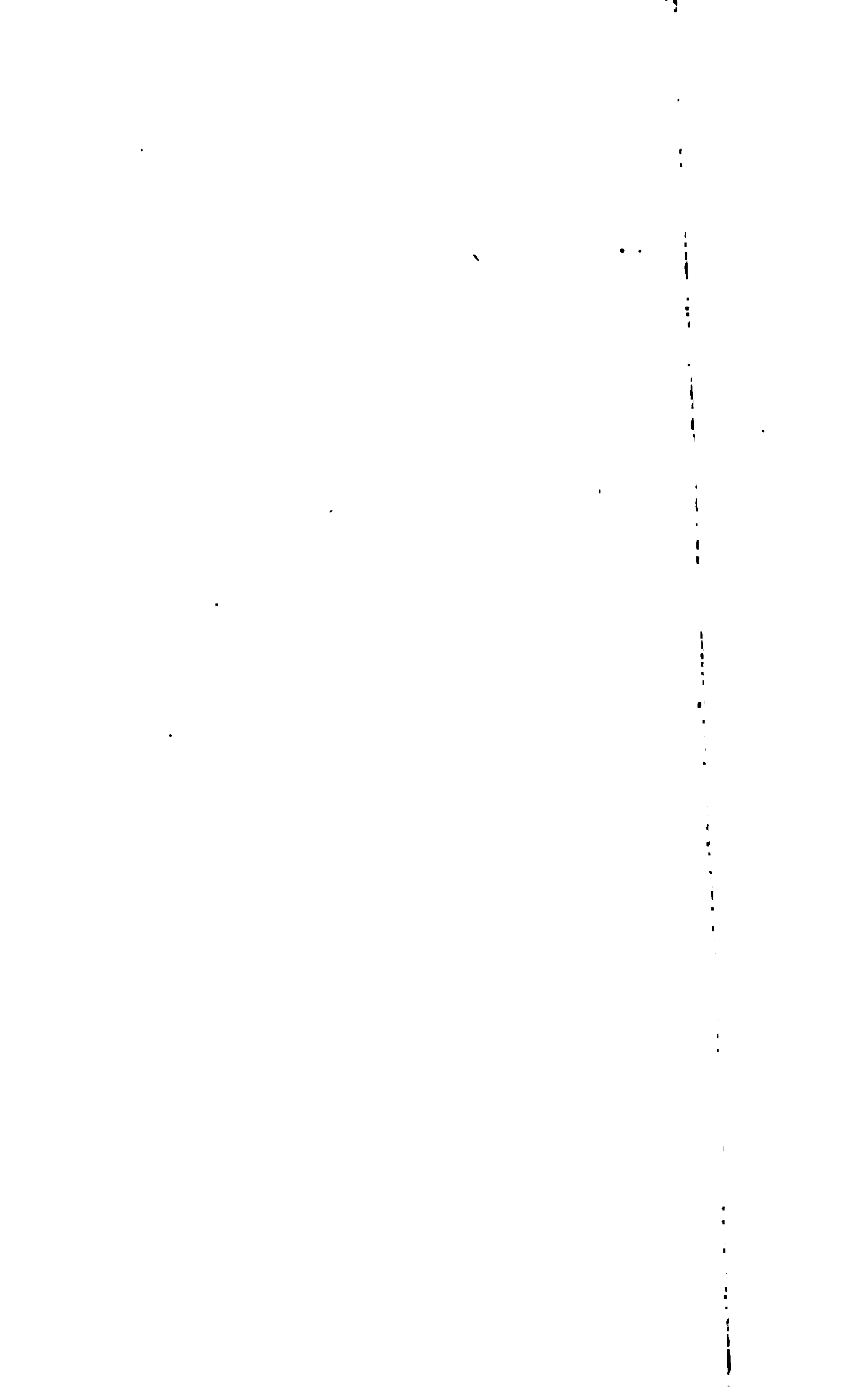
hinzu, so erhält man die roth gezeichnete Curve. T wurde $=$ $26\cdot6883$ Tage angenommen. Man sieht aber aus der Zeichnung, im Jänner und December, dass ein etwas kleinerer Werth von T günstiger wäre.

Auf Tafel II (unten) ist der Gang der Declination in und Wien (Mittel aus beiden) für 1869 verzeichnet. Die punl Curve hat dieselbe Bedeutung wie auf Tafel I. Nun wurd Hilfe des aus den Beobachtungen von 1870 ermitt Werthes der Periode, nämlich $T = 26 \cdot 33$ Tage die Rückw rechnung für 1869 ausgeführt, und zum Gange der punk Curve die periodische Oscillation hinzugefügt. So entstand rothe Linie, welche (mit geringen Ausnahmen am End Jahres 1869) noch am Anfange 1869, d. h. wenn von der Mitte 1870 um volle 20 Rotationen der So zurückgeht, mit dem wirklichen Gange der D nation in Übereinstimmung ist; eine Bestätigung Annahme, dass durch viele Rotationen hindurch eine Art B rungszustand in der Sonne herrschte, welchem zufolge, grosser Umwälzungen, von demselben Theile des Sonnenkö nahe dieselbe Wirkung ausgeübt wurde. Ich beschränke übri diesen Schluss ausdrücklich auf die Jahre 1869 und 1870, j behaupte nicht einmal, dass die Rotationszeit der Sonne als constante Grösse anzunehmen sei, und also keinen pe schen Änderungen unterliegt.

Auf Tafel II (oben) endlich ist die horizontale Inte nach den Beobachtungen in Wien 1868 verzeichnet und dur rothe Linie die Andeutung der Periodicität versucht.







XVII. SITZUNG VOM 22. JUNI 1871.

Der Präsident gedenkt des am 11. Mai l. J., zu Collingwood in England, erfolgten Ablebens des ausländischen Ehrenmitgliedes der Classe, Sir John Herschel.

Sämmtliche Anwesende geben ihr Beileid durch Erheben von den Sitzen kund.

Der Vorstand der astronomischen Gesellschaft, Se Excellenz Herr O. Struve in Pulkowa, ladet mit Circulare vom Juni 1871 zu der in der Zeit vom 14. bis 16. September d. J. in Stuttgart stattfindenden Astronomen-Versammlung ein.

Herr Andreas Raabe, Kaplan zu Hundeshagen in Preussen, übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Lösung algebraischer Gleichungen mit beliebig vielen gebrochenen Exponenten". Als Nachtrag zu der am 13. April c. vorgelegten Abhandlung: „Lösung algebraischer Gleichungen von beliebig hohem Grade" etc.

Herr Regierungsrath Dir. C. v. Littrow berichtet über die neuerliche, am 14. Juni l. J. gemachte Entdeckung eines teleskopischen Kometen durch Herrn W. Tempel in Mailand.

Herr Prof. Dr. Edm. Weiss überreicht eine Abhandlung: „Über sprungweise Änderungen in einzelnen Reductionselementen eines Instrumentes".

Herr Dr. A. Schrauf legt die dritte Reihe seiner „Mineralogischen Beobachtungen" vor.

Herr Aristides Březina, Assistent am k. k. Hof-Mineraliencabinete, übergibt eine Abhandlung: „Über die Symmetrie des unterschwefelsauren Blei".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift. 9. Jahrgang, Nr. 18. Wien, 1871; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1847. (Bd. 77. 23). Altona, 1871; 4°.

Gesellschaft, Anthropologische, in Wien: Mittheilungen. I. Band, Nr. 8—9. Wien, 1871; 8°.

— Geographische, in Wien: Mittheilungen. N. F. 4. 1871. Nr. 6. Wien; 8°.

— Österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VI. Band, Nr. 12. Wien, 1871; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXII. Jahrg., Nr. 25. Wien, 1871; 4°.

Istituto, R., Veneto di Scienze, Lettere ed Arti: Atti. Tomo XVI°, Serie III^a. Disp. 6^a, Venezia, 1870—71; 8°.

Nature. Nr. 85, Vol. IV. London, 1871; 4°.

Revue des cours scientifiques et littéraires de la France et de l'étranger. VIIe Année, Nrs. 51 & 52. Paris & Bruxelles, 1871; 4°.

Societas Entomologica Rossica: Horae. T. VII. Nr. 4. Petropoli, 1871; 8°. — Iroudy. T. VI, Nr. 1. St. Petersburg, 1871; 8°.

Société Botanique de France: Bulletin. Tome XVIIe 1870. Comptes rendus des séances. 2. Paris; 8°.

Verein, Naturhistorisch-medizin., zu Heidelberg: Verhandlungen. Band. V, Heft 4. Heidelberg, 1870; 8°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXIII. Jahrgang, 9. Heft. Wien, 1871; 4°.

Über sprungweise Änderungen in einzelnen Reductionselementen eines Instrumentes.

Von dem c. M. Prof. Dr. **Edmund Weiss.**

Unter den Fehlerquellen, denen Beobachtungen unterworfen sind, scheint mir eine besondere Classe, wahrscheinlich ihres sporadischen Auftretens, und ihres eigenthümlichen, nahezu unerklärlichen Verhaltens wegen, noch nie einer eingehenderen Untersuchung unterzogen worden zu sein. Ich meine damit temporäre, sprungweise Änderungen in einem einzelnen Reductionselemente, ohne irgend eine ersichtliche Ursache, und ohne irgend eine nachweisbare Affection der übrigen Constanten des Instrumentes. Da man indess das Vorkommen solcher sprungweiser Änderungen vielfach für unmöglich halten dürfte, mir jedoch eine durchgreifende Discussion dieses Gegenstandes in mancher Beziehung von keiner geringen Tragweite zu sein scheint, will ich die mir bekannten Fälle dieser Art so detaillirt wiedergeben, dass jeder sich selbst ein Urtheil über die Beweiskraft der angeführten Thatsachen und Berechtigung der darauf gebauten Schlüsse zu bilden im Stande ist.

Als im Jahre 1863 eine Bestimmung der Meridiandifferenz der Sternwarte Leipzig und dem auf dem Dablitzer Berge (einer etwa $1\frac{1}{2}$ deutsche Meilen nordöstlich von Prag gelegenen Anhöhe) errichteten Feldobservatorium vorgenommen werden sollte, wurde mir vom Herrn Director C. v. Littrow die Ausführung der von Seite Österreichs nöthigen Beobachtungen übertragen. Die persönliche Gleichung sollte durch einen Stationswechsel der Beobachter eliminirt werden: ich begab mich daher am 12. September nach Leipzig, um durch einige Zeit am dortigen Passageninstrumente von Liebherr und Utzschneider zu beobachten. Dasselbe war auf die gewöhnliche Art zwischen zwei Pfeilern auf-

gestellt, hatte eine Öffnung von 29 Pariser Linien, eine Brennweite von $2^1/_2$ Fuss und eine hundertfache Vergrösserung. Als ich nun die Beobachtungen vom 18. September am folgenden Tage reducirte, fand ich zu meinem nicht geringen Staunen, dass nur die Beobachtungen des Polarsternes *δ ursae minoris* denselben Collimationsfehler ergäben, wie die früheren Tage, dass hingegen die Zeitsterne einen ganz anderen beanspruchen, und die etwa $2\frac{1}{2}^h$ später beobachteten Registrirsterne weder mit dem einen noch dem andern, sondern einem dritten, von beiden bedeutend verschiedenen Collimationsfehler reducirt werden müssten. An der Neigung hatte sich im Laufe des Abendes nicht die geringste Anomalie gezeigt, sie stimmte im Gegentheil mit der vom 15. September, dem vorhergehenden Beobachtungstage, vollkommen überein. Eine allsogleich vorgenommene sorgfältige Untersuchung des Instrumentes in allen seinen Theilen führte zu keinem Resultate: ich fand alles in der besten Ordnung. Ich erwartete daher mit der grössten Spannung den Abend, der heiter zu werden versprach: es wuchs jedoch mein Staunen nicht wenig, als die Reduction der Beobachtungen desselben dem Instrumente wieder sehr nahe dieselben Correctionen zuwies, die es vor der unerklärlichen Störung des vorhergehenden Abendes gefordert hatte.

Um diese Verhältnisse gehörig übersehen zu können, werde ich hier auch die Reductionselemente hersetzen, welche aus den beiden dem 18. September vorhergehenden und nachfolgenden Beobachtungsabenden folgen. Dabei entnehme ich die Angaben des Niveau's, die Reduction der beobachteten Fadenantritte auf den Mittelfaden, sowie die Rectascensionen der Sterne dem Beobachtungsjournale, welches in der Abhandlung „Bestimmung der Meridiandifferenz Leipzig-Dablitz, für die von Herrn Generallieutenant J. J. Baeyer vorgeschlagene Mitteleuropäische Gradmessung, von C. v. Littrow“[1] vollständig zum Abdrucke gelangt ist. Aus diesen Zahlen werde ich jedoch hier die Reductionselemente des Instrumentes in einer etwas anderen Weise, die mir für diese specielle Untersuchung mehr zu conveniren scheint, ableiten.

---

[1] Denkschr. d. math.-nat. Cl. d. k. Akad. d. W. in Wien. Vol. XXIII.

Reducirt man zunächst alle Nivellirungen durch Hinzufügen der doppelten Zapfenungleichheit (W—O = —3ᵖ82) auf Nivellirungen bei der Kreislage West, so erhält man:

1863	Sept. 11		Sept. 15		Sept. 18		Sept. 19		Sept. 23	
Uhrzeit d. Niv.	Kreislage	Nivel. bez. a. K. W.	Kreislage	Nivel. bez. a. K. W.	Kreislage	Nivel. bez. a. K. W.	Kreislage	Nivel. bez. a. K. W.	Kreislage	Nivel. bez. a. K. W.
18ʰ0	W	—1ᵖ83	W	—1ᵖ58	W	—1ᵖ52	O	—1ᵖ38	O	—0ᵖ98
18·6	O	—1·04	O	—1·14	O	—1·39	W	—1·38	W	—1·16
19·9	W	—1·69	W	—1·20	W	—0·76	O	—1·41	O	—1·35
22·3	W	—1·00	.	.	W	—1·60	O	—1·71	O	—1·54
23·1	O	—0·74	.	.	O	—1·05	.	.	W	—0·78
23·6	.	.	.	.	W	—1·40	.	.	O	—1·35

Diese Nivellements zeigen, dass die Neigung im Laufe eines Abendes sich sehr constant zeigte, und auch an dem fraglichen 18. September keine Ausnahme hiervon stattfand. Es wurde daher an jedem Abende das Mittel aus allen Nivellirungen gezogen, dies Mittel bezüglich um +0ᵖ96 und +2ᵖ87 corrigirt, um daraus die Neigung bei Kreislage Ost und West zu erhalten, und schliesslich mit dem Werthe eines Theilstriches: 1ᵖ=0ˢ164 in Zeitsekunden verwandelt. Die dadurch erhaltenen Zahlen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, die ausserdem noch Collimationsfehler (ohne Einrechnung der täglichen Aberration), Azimuth und Uhrcorrection enthält. Der Collimationsfehler wurde täglich aus den Beobachtungen des Polarsternes *δ ursae minoris* abgeleitet, indem das Instrument während der Culmination desselben umgelegt wurde. Das Azimuth wurde immer aus den Beobachtungen des Polarsternes in Verbindung mit denen der Sterne *γ Draconis* und *α Lyrae*, von denen der erste in der einen, der letzte in der andern Kreislage beobachtet ist, berechnet. Die Uhrcorrection ist jene, welche in der oben citirten Abhandlung aus dem Inbegriffe aller Zeitsternbeobachtungen desselben Abendes ermittelt wurde. Am 11. September endlich beobachtete noch Prof. Bruhns in Leipzig, an den folgenden Tagen aber durchgehends ich.

1863	Uhrzeit	Uhrcorrection u	Nivel. bez. a. K. W.	Neigung		Collimations Fehler c^m	Azimuth k
				K. W.	K. O.		
Sept. 11	19ʰ0	+1ᵐ57ˢ92	−1ˢ26	−0ˢ049	+0ˢ264	−0ˢ369	−1ˢ31
„ 15	18·9	+1 57·97	−1·31	−0·057	+0·256	−0·295	−1·39
„ 18	. .	. . . .	−1·29	−0·054	+0·259	−0·334	. . .
„ 19	19·1	+1 57·70	−1·47	−0·084	+0·230	−0·300	−1·69
„ 23	19·1	+1 55·97	−1·19	−0·038	+0·276	−0·276	−1·54

Der Anblick dieser Tabelle scheint wohl darauf hinzuweisen, dass während der ganzen Periode im Instrumente und seiner Aufstellung keine erheblichen Änderungen vorgegangen seien, und dass namentlich auch der Collimationsfehler nur sehr geringe Schwankungen um seinen Mittelwerth c_w = —0ˢ315 aufzuweisen habe. Dem widersprechen jedoch die Beobachtungen vom 18. September, von denen ich hier zunächst nur die Aug- und Ohr-Beobachtungen in einer allgemein verständlichen Anordnung mittheile.

I.

Name des Sternes	Grösse des Sternes	Durchgangszeit durch den Mittelfaden	Zahl d. Fäden	Correct. wegen Neig.	Rectascension d. Sternes	$u + mk$ $\pm c.$ sec. δ
		Kreis West				
δ ursae min.	4·5	18ʰ14ᵐ 9ˢ63	10	−0ˢ75	18ʰ16ᵐ16ˢ32	+2ᵐ 7ˢ44
		Kreis Ost				
δ ursae min.	4·5	18 13 54·01	8	+3·58	18 16 16·32	+2 18·73
α Lyrae	1·0	30 21·98	9	+0·32	32 20·40	+1 58·10
ζ¹ „	4·5	38 7·02	4	+0·32	40 5·79	58·45
β „	var.	43 5·23	7	+0·29	45 3·94	58·42
δ² „	4·5	47 46·89	6	+0·31	49 45·40	58·20
γ „	3·2	51 53·10	8	+0·29	53 52·05	58·66
49 Draconis	5·7	56 3·43	9	+0·46	58 2·63	58·74
		Kreis West				
η Lyrae	4·5	19 7 12·23	7	−0·07	19 9 8·37	+1 56·21
κ Cygni	4·5	12 1·92	5	−0·09	13 58·35	56·52
4 „	5·0	19 19·46	9	−0·06	21 15·93	56·53
8 „	4·6	24 47·13	9	−0·06	26 43·76	56·69
θ „	4·9	30 52·54	8	−0·08	32 48·75	56·26
γ Aquilae	3·0	37 52·67	9	−0·04	39 48·27	55·64
α „	1·2	42 13·88	9	−0·04	44 9·50	55·66
β „	4·0	46 42·94	7	−0·04	48 38·62	55·72

Die letzte Columne der Zeitsterne in einer für das folgende zweckmässigeren Form geschrieben, lautet:

II.

Stern	Uhrcorrection u	u'
	Kreis Ost	
α Lyrae	$u = +1^m58^s10 - 0\cdot28k + 1\cdot28c_w$	$+1^m57^s53$
ζ^1 „	$58\cdot45 - 0\cdot30k + 1\cdot26c_w$	$57\cdot92$
β „	$58\cdot42 - 0\cdot37k + 1\cdot20c_w$	$58\cdot05$
δ^2 „	$58\cdot20 - 0\cdot31k + 1\cdot15c_w$	$57\cdot70$
γ „	$58\cdot66 - 0\cdot38k + 1\cdot19c_w$	$58\cdot32$
49 Draconis	$58\cdot74 + 0\cdot13k + 1\cdot76c_w$	$57\cdot15$
	im Mittel	$+1\ 57\cdot78$
	Kreis West	
η Lyrae	$u = +1\ 56\cdot21 - 0\cdot28k - 1\cdot29c_w$	$+1\ 57\cdot67$
$\varkappa$ Cygni	$56\cdot52 + 0\cdot05k - 1\cdot67c_w$	$57\cdot76$
4 „	$56\cdot53 - 0\cdot33k - 1\cdot24c_w$	$58\cdot03$
8 „	$56\cdot69 - 0\cdot36k - 1\cdot21c_w$	$58\cdot22$
θ „	$56\cdot29 - 0\cdot04k - 1\cdot55c_w$	$57\cdot57$
γ Aquilae	$55\cdot64 - 0\cdot67k - 1\cdot02c_w$	$57\cdot50$
α „	$55\cdot66 - 0\cdot69k - 1\cdot01c_w$	$57\cdot54$
β „	$55\cdot72 - 0.71k - 1\cdot01c_w$	$57\cdot63$
	im Mittel	$+1\ 57\cdot74$

Aus den Beobachtungen von δ *ursae minoris* folgt der schon oben angeführte Collimationsfehler $c = -0^s.334$ für Kreis West, und für das Azimuth $k = -1^s.57$, wenn man das Mittel aus den Durchgangszeiten des Polarsternes durch den Mittelfaden bei Kreis W. und Kreis O. zieht, und daraus unter der Annahme eines Uhrstandes $u = +1^m57^s.76$ der dem früheren zufolge unmöglich um Vieles fehlerhaft sein kann, das Azimuth berechnet. Beide Grössen passen ganz gut in die Reihe der Werthe dieser Correctionen, die zwischen dem 11. und 23. September gefunden wurden, geben aber, auf die Reduction der Zeitsterne angewendet, für die Uhrcorrection

$u_o = +1^m58^s.38$ im Mittel der sechs Sterne bei Kreis O.
$u_w = +1\ 57\cdot18$ „ „ „ acht „ „ „ W.

Der enorme Unterschied zwischen u_w und u_o ist seinem bei weitem grössten Theile nach nur durch eine Änderung des Collimationsfehlers wegzuschaffen, indem eine Variation des Azimuthes fast nur den absoluten Uhrstand $u = \frac{1}{2}(u_w + u_o)$ afficiren, aber

die Differenz $u_w - u_o = -1^s20$ so gut wie gar nicht verringern würde, da das Mittel der Declinationen der in beiden Kreislagen beobachteten Sterne sehr nahe gleich ist.

Nehmen wir daher an, der Collimationsfehler habe sich zwischen der Beobachtung von δ ursae minoris und α Lyrae aus unbekannter Ursache sprungweise geändert, und sei dann unverändert geblieben, so lässt sich der neue Werth desselben ziemlich sicher angeben. Nach Tafel II gibt das Mittel der bei Kreis Ost, und das Mittel der ersten sechs bei KW. beobachteten Sterne:

$u = +1^m58^s43 - 0\cdot25k + 1\cdot32c_w$ aus sechs Sternen bei KO.
$u = +1\ 56\cdot31 - 0\cdot27k - 1\cdot33c_w$ „ sechs „ „ KW.

Die letzten zwei bei KW. beobachteten Sterne wurden hier vorläufig weggelassen, um die Coëfficienten von Azimuth und Collimationsfehler in beiden Kreislagen möglichst gleich zu erhalten. Die beiden vorstehenden Gleichungen liefern nach u und c aufgelöst:

$$u = +1^m57^s37 - 0\cdot26k$$
$$2\cdot65c_w = -2^s12 - 0\cdot02k$$

also mit dem obigen Werthe von $k = -1^s57$

$$u = +1^m57^s78$$
$$c_w = -0^s79$$

Mit diesen Werthen, nämlich $c_w = -0^s79$ und $k = -1^s57$ ist die letzte Columne (u') der Tafel II gerechnet. Die Uebereinstimmung der aus den einzelnen Sternen folgenden Uhrcorrectionen u' unter einander, ist jedoch insbesondere bei Kreis Ost alles eher als befriedigend. Ich werde später noch einmal darauf zurückkommen.

Gehen wir jetzt auf die Registrirsterne über, so haben wir nach den Ablesungen auf dem Leipziger Registrirstreifen:

I*

Name des Sternes	Grösse des Sternes	Durchgangszeit durch den Mittelfaden	Zahl d. Fäden	Correct. wegen Neig.	Rectascension des Sternes	$u + mk$ $\pm c$ sec. δ
			Kreis West			
ε Cephei	5·1	22ʰ 8ᵐ 8ˢ71	19	−0ˢ10	22ʰ 10ᵐ 4ˢ35	+1ᵐ 55ˢ74
2 Lacertae	5·0	13 31·18	25	−0·08	15 26·55	55·45
α „	4·0	23 48·24	24	−0·08	25 43·65	55·49
8 „	5·7	27 55·76	25	−0·07	29 51·15	55·46
			Kreis Ost			
7953 B.A.C.	6·3	(22 40 2·73)	19	+0·48	22 42 2·40	(+1 59·19
15 Lacertae	5·0	43 57·10	15	+0·35	45 56·24	58·79
0 Androm.	3·7	53 43·04	23	+0·34	55 42·00	58·62
3 „	4·8	56 7·64	23	+0·40	22 58 7·10	59·06
8056 B.A.C.	6·5	22 59 8·25	5	+0·37	23 1 7·18	58·56
8 Androm.	4·9	23 9 29·70	20	+0·39	11 28·94	58·85
12 „	6·0	12 22·68	23	+0·32	14 21·49	58·49
			Kreis West			
72 Pegasi	5·0	23 25 18·51	25	−0·06	23 27 14·22	+1 55·77
λ Androm.	3·5	29 1·13	20	−0·08	30 57·01	55·96
79 Pegasi	6·2	40 52·78	23	−0·06	42 48·36	55·64
ρ Cassiop.	5·0	45 43·25	25	−0·10	47 38·76	55·61

Schreibt man auch hier wieder die letzte Columne in der selben Form wie früher bei den Beobachtungen mit Aug und Ohr, so hat man:

II*

Stern	Uhrcorrection u	u''
	Kreis West	
ε Cephei	$u = +1^m 55^s74 + 0·16k - 1·81c_w$	+1ᵐ 57ˢ48
2 Lacertae	$55·45 - 0·14k - 1·44c_w$	57·25
α „	$55·49 - 0·05k - 1·54c_w$	57·26
8 „	$55·46 - 0·28k - 1·29c_w$	57·32
	Im Mittel..	+1 57·33

Stern	Uhrcorrection u	u''
	Kreis Ost	
7953 B.A.C.	$u = +1^m 59^s 19 + 0.21k + 1.87c_w$	$+1^m$ $(56^s 80)$
15 Lacertae	$58.79 - 0.21k + 1.36c_w$	57·62
0 Androm.	$58.62 - 0.23k + 1.34c_w$	57·51
3 „	$59.06 - 0.05k + 1.53c_w$	57·46
8056 B.A.C.	$58.56 - 0.15k + 1.42c_w$	57·24
8 Androm.	$58.85 - 0.08k + 1.50c_w$	57·33
12 „	$58.49 - 0.30k + 1.26c_w$	57·57
	Im Mittel..	+1 57·46
	Kreis West	
72 Pegasi	$u = +1^m 55^s 77 - 0.41k - 1.16c_w$	+1 57·69
λ Androm.	$55.96 - 0.14k - 1.43c_w$	57·75
79 Pegasi	$55.64 - 0.45k - 1.13c_w$	57·59
ρ Cassiop.	$55.61 + 0.17k - 1.82c_w$	57·34
	Im Mittel..	+1 57·59

Die Beobachtung des Sternes 7953 B. A. C. ist bereits im Beobachtungsjournale als misslungen angeführt, und es weichen in der That die einzelnen Fädenantritte, auf den Mittelfaden reducirt, um mehr als eine Zeitsekunde von einander ab. Er wurde deshalb in den folgenden Untersuchungen ausser Acht gelassen. Die übrigen Sterne ergeben:

$u = +1^m 55^s.64 - 0.14k - 1.45c_w$ aus 8 Sternen bei K. W.
$u = +1\ 58.73 - 0.17k + 1.40c_w$ „ 6 „ „ K. O.

und damit:

$$2.85c_w = -3^s.09 + 0.03k$$

also wieder $k = -1^s.57$ setzend:

$$c_w = -1^s.10.$$

Mit diesem Werthe ist die letzte Columne (u'') berechnet. Die Übereinstimmung der einzelnen Werthe von u'' unter einander lässt kaum etwas zu wünschen übrig, wenn man bedenkt, dass die Rectascensionen auf keine grosse Genauigkeit Anspruch machen können, da die Grösse der Sterne die fünfte fast nie übersteigt, in einzelnen Fällen aber sogar unter die sechste herabsinkt. Zugleich zeigen die Werthe von u'' keinen merklichen, von der Zenithdistanz abhängigen Gang, beweisen also mit einem allerdings nur mässigen Gewichte, dass das angenom-

mene Azimuth von der Wahrheit nicht beträchtlich abweiche, mit anderen Worten, dass das Azimuth im Laufe des Abendes keine anomale Änderung erlitten habe. Es ist nämlich im Mittel aus:

ρ Cassiop. u. ε Cephei....	$u'' = +1^m 57^s.41$	Azim. Coëf.	—0·17
α Lacert. 3 u. 8 Androm ..	57·35	„ „	+0·06
λ Androm. 2 Lacert. und 8056 B. A. C.	57·41	„ „	+0·14
15 Lacert. u. 0 Androm...	57·56	„ „	+0·22
8 Lacert. u. 12 Androm...	57·45	„ „	+0·29
72 u. 79. Pegasi........	57·64	„ „	+0·43

Es kann daher wohl keinem Zweifel unterliegen, dass das Fadennetz nach der Beobachtung des Polarsternes aus seiner normalen Position in eine zweite, wenn man so sagen darf, labile verschoben worden sei, in der es durch mehrere Stunden verweilte; dass es jedoch, wie die Beobachtungen der folgenden Tage darthun, nach einiger Zeit wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehrte.

Bei dieser Erklärung bieten indess die Aug- und Ohrbeobachtungen eine Schwierigkeit dar, da sie zur Reduction einen dritten mittleren Werth des Collimationsfehlers fordern. Wir fanden nämlich:

aus den Polarstern-Beobachtungen.... $c_w = -0^s.33$
„ „ Aug- und Ohr- „ .... $= -0·79$
„ „ Registrir- „ .... $= -1·10.$

Wohl könnte man annehmen, dass die Verschiebung des Fadennetzes nicht sprungweise, sondern successive erfolgte, und es daher bei den Beobachtungen mit Aug und Ohr eine mittlere Lage inne hatte; allein abgesehen davon, dass ich dies, später mitzutheilenden ähnlichen Vorkommnissen zufolge, für sehr unwahrscheinlich halte, zeigen auch die grossen Differenzen, welche die einzelnen Werthe von u' (in Tafel II) unter einander aufweisen, dass der Collimationsfehler $c_w = -0^s.79$ blos ein Rechnungsresultat ist, welches das Mittel der Beobachtungen bei Kreis Ost und Kreis West mit einander in Einklang bringt, aber keineswegs der Natur entspricht. Ich glaube vielmehr, dass bei den Beobachtungen der Zeitsterne mit Aug und Ohr das Instru-

ment sich allerdings in einem Übergangstadium befand, während welchem noch mehrere Rückschläge auf den normalen Collimationsfehler vorkamen, und dass erst in der Pause zwischen den Aug- und Ohr-, und den Registrir-Beobachtungen eine gewisse Stabilität eintrat. In der That findet man, wenn man den ersten und letzten Werth des Collimationsfehlers mit c_1 und c_2 bezeichnet, also $c_1 = -0^s.33$, $c_2 = -1^s.10$ setzt und reducirt:

Kreis Ost.

α Lyrae	mit c_1	$u = +1^m 58^s.01$
ζ^1 "	" c_2	57·53
β "	" c_2	57·68
δ^2 "	" c_1	58·27
γ "	" c_2	57·96
49 Dracon.	" c_1	57·95
	Im Mittel	$u = +1$ 57·90.

Kreis West.

η Lyrae	mit c_2	$u = +1$ 58·07
κ Cygni	" c_2	58·28
4 "	" c_1	57·46
8 "	" c_1	57·66
θ "	" c_2	58·05
γ Aquilae	" c_2	57·81
β "	" c_2	57·85
α "	" c_2	57·94
	Im Mittel	$u = +1$ 57·89.

Die Uhrcorrection aus dem Mittel der Beobachtungen bei Kreis West, ist gleich jener aus dem Mittel der Beobachtungen bei Kreis Ost, wie es auch sein muss, wenn der Collimationsfehler richtig angenommen ist. Die Übereinstimmung der Werthe von u unter einander lässt zwar noch manches zu wünschen übrig, ist indess bei weitem besser geworden. Auch fallen jetzt die Hauptabweichungen auf jene Sterne, die an den wenigsten Fäden, also voraussichtlich am unsichersten beobachtet sind, und da dem Original-Tagebuche zufolge die Bilder der Sterne im Allgemeinen sehr unruhig waren, kann man eine gute Übereinstimmung schon von vorne herein nicht erwarten.

Die hier soeben nachgewiesene sprungweise Änderung des Collimationsfehlers steht übrigens nicht vereinzelt da. So findet sich bei der Mittheilung der Beobachtungen vom 8. October 1825 am Reichenbachischen Meridiankreise der Königsberger Sternwarte [1] folgende Notiz von Bessel:

„Gestern, nach der Beobachtung von α Lyrae, allein vor der Beobachtung der Zone, hat das Instrument eine bedeutende Veränderung erlitten, deren Ursache mir unbekannt ist. Der mittlere Faden wich sehr weit vom Meridianzeichen ab, die Axe hatte dieselbe Lage wie am 23. September, denn die Wasserwage zeigte 1·60 L. Ost, und nach der Umlegung 2·85 L. Ost; und nachdem der Faden durch die Schrauben am Netze auf das Meridianzeichen zurückgestellt war, zeigte das Instrument nach der Umlegung 2ˢ8 Ost, woraus hervorgeht, dass die Änderung allein im Fadennetze stattgefunden hat. Der Kreis wurde gegen Westen gewandt."

Aus den weiteren Angaben ist ersichtlich, dass Bessel vom 23. September bis inclusive der Beobachtung von α Lyrae vom 7. October für den Collimationsfehler bei Kreislage Ost $c = -0^s190$, und von da bis zum Zurückschrauben des Mittelfadens auf das Meridianzeichen $c = -1^s932$ annahm, was auf eine Verschiebung des Fadennetzes um -1^s74 bei Kreislage Ost, oder um $+1^s74$ bei Kreislage West schliessen lässt. Nach dem Zurückschrauben des Fadennetzes und Umlegen des Fernrohres betrug der Collimationsfehler in Kreislage West $c = +0^s088$. Damit waren jedoch die abnormen Bewegungen des Fadennetzes noch nicht beendet. Denn als O. Struve bei Gelegenheit der Herausgabe der Weisse'schen Reduction von Bessel's Zonen zwischen $+15°$ und $+45°$ Declination, die Zonentafeln einer sehr sorgfältigen Revision unterziehen liess, fand sich bei der am 9. October 1825 beobachteten Zone 323 eine eigenthümliche Erscheinung, die er mit folgenden Worten beschreibt [2]:

„Zona 323 singulare offert phaenomenon. Extendit a 20^h58^m ad 22^h33^m et insunt stellae communes cum zonis 198, 309, 315

---

[1] Astron. Beob. auf der königl. Univ. Sternw. Königsberg XI, p. 62.

[2] M. Weisse, Positiones mediae stellarum fixarum in Zonis Regiomontanis a Besselio inter + 15° et + 45° Declinationis observatarum p. XXI.

et 319. In initio nulla vel minima tantum exstat differentia inter ascensiones rectas ex his vel illa deductas. Est enim inter 20^h58^m et 21^h16^m

$$\begin{aligned}\alpha\,323 = \alpha\,315 &- 0^s\!.09 \text{ ex } 11 \text{ stellis}\\ \alpha\,198 &- 0\cdot07 \;\;\text{„}\;\; 2 \;\;\text{„}\end{aligned}$$

tum subito apparent differentiae gravissimae quantitatis proxime constantis usque ad finem zonae, nempe

$$\begin{aligned}\alpha\,323 = \alpha\,198 &+ 1^s\!.34 \text{ ex } 8 \text{ stellis}\\ \alpha\,309 &+ 1\cdot49 \;\;\text{„}\;\; 14 \;\;\text{„}\\ \alpha\,319 &+ 1\cdot22 \;\;\text{„}\;\; 6 \;\;\text{„}\end{aligned}$$

unde per medium, ponderibus positis secundum numeros stellarum comparatarum evadit correctio α 323 = —1ˢ.38. Ad explicandum hunc transitum, variationem subitam in positione totius instrumenti vel alicujus ejus partis, ex. gratia reticuli, per vim externam effectam, supponere debemus“.

Es betrug daher der Sprung des Instrumentes an diesem Tage —1ˢ.38 —0ˢ.09 = —1ˢ.47, oder dies ganz auf den Collimationsfehler geworfen, bei einer mittleren Declination der Zone von +24° die Variation desselben —1ˢ.34, während dem obigen zufolge die Verschiebung des Fadennetzes am 7. October auf +1ˢ.74 sich belaufen hatte. Beide Zahlen sind wohl um 0ˢ.40 von einander verschieden; doch hat dieser Unterschied kaum viel zu bedeuten, da sich weder die Verschiebung des Fadennetzes vom 9. October mit grosser Schärfe ermitteln lässt, noch auch Bessel's Angabe c = —1ˢ.932 für den Collimationsfehler nach dem räthselhaften Sprunge vom 7. October auf einen sehr hohen Grad von Präcision Anspruch machen dürfte. Denn er kann diesen Werth wohl nur aus Einstellungen auf das Meridianzeichen erhalten haben, die er selbst im sechsten Bande pag. XIII der Königsberger Beobachtungen für wenig sicher erklärt, und auch der Umstand, dass die Collimationsfehler vor und nach dem Zurückschrauben des Fadennetzes ohne tägliche Aberration (—0ˢ.012) zu —1ˢ.92[0] und +0ˢ.10[0], also im Grunde nur au zwei Decimalen d. h. um eine weniger als sonst angegeben werden, spricht dafür, dass sie Bessel nicht für sehr genau hielt. Ich glaube daher annehmen zu dürfen, dass auch hier das Fadennetz am 9. October

wieder ganz in jene Lage zurückgesprungen sei, die es vor der Störung am 7. October hatte, wenn auch nur auf kurze Zeit, da bei der bald darauf beobachteten Zone 324 das Instrument schon wieder in die Position zurückgekehrt war, die es beim Beginne der Zone 323 eingenommen hatte.

In dieselbe Kategorie, nämlich einer sprungweisen Verschiebung des Fadennetzes, scheint mir auch die Veränderlichkeit zu gehören, welche am Leidener Meridiankreise während der Bestimmung der Längendifferenz zwischen den Sternwarten Leiden und Brüssel auftrat. Prof. F. Kaiser gibt im II. Bande der Annalen der Sternwarte in Leiden einen ausführlicheren Bericht über diese Operation, dem ich die folgenden auf diesen Gegenstand bezüglichen Stellen entnehme. Zur Erläuterung bemerke ich nur noch, dass die Längenbestimmung zwischen dem 1. und 11. September 1868 ausgeführt, und der Meridiankreis täglich umgelegt wurde, und dass Dr. N. M. Kam, damals Observator der Sternwarte in Leiden, die bezüglichen Beobachtungen anstellte.

Auf Seite [154] des oben angezogenen II. Bandes der Annalen schreibt Prof. Kaiser:

„...Während der ausserordentlich schönen Tage vom 1. bis 11. September 1868 hat Herr van Hennekeler täglich die Sonne, und um die Mittagsstunde α urs. min. mit einigen Fundamentalsternen beobachtet. Dabei wurden jedesmal die Meridianzeichen abgelesen, und der Collimationsfehler durch Niveau und Quecksilberhorizont bestimmt. Nachmittags, ungefähr um 6 Uhr, wurde von den Herren Kam und van Hennekeler das Instrument umgelegt, und unmittelbar vor und nach der Umlegung wurden die Meridianzeichen, das Niveau, und das Bild des Mittelfadens abgelesen. Um die Mitternachtsstunde stellte Herr Kam seine Beobachtungen für die Längenbestimmung an, welche jedesmal mit den oben genannten Ablesungen angefangen und beschlossen wurden. Aus den Ablesungen der Meridianzeichen geht hervor, dass das Azimuth des Instrumentes sich im Verlaufe eines der damals sehr warmen Tage, nur um einen sehr kleinen Bruchtheil einer Bogensekunde änderte. Leitet man den Collimationsfehler aus den Ablesungen der Meridianzeichen bei der Umlegung, ferner aus den Ablesungen die des Mittags, und aus denen, die um Mitternacht gemacht sind, ab, so findet man

für diese drei ganz verschiedenen Tageszeiten Resultate, welche im Mittel nicht einmal ein Zehntel Bogensekunde von einander verschieden sind[1]. Die Bestimmungen des Collimationsfehlers durch Niveau und Quecksilberhorizont zu drei ganz verschiedenen Stunden des Tages geben ebenso fast vollkommen dieselben Resultate, und diese kommen mit den aus den Meridianzeichen abgeleiteten sehr gut überein. Die täglichen Sternbeobachtungen des Herrn van Hennekeler sind mit allen diesen Ergebnissen vollkommen in Einklang, aber die Nachtbeobachtungen des Herrn Kam sind damit in Widerspruch....“

ferner auf Seite [164]:

„....Herr Dr. Kam brachte mir im December 1868 die ersten aus seinen Beobachtungen abgeleiteten Zeitbestimmungen, wobei er den Collimationsfehler angenommen hatte, so wie er jeden Tag mittelst des Niveaus und des Quecksilberhorizontes bestimmt worden war, und diese Zeitbestimmungen entsprachen Schwankungen nicht nur im Azimuthe des Instrumentes, sondern auch im Gange der vortrefflichen Hauptuhr Hohwü Nr. 17, welche ich für durchaus unmöglich halten musste. Nachdem ich mich bald überzeugt hatte, dass keine Rechenfehler die Ursache dieser sonderbaren Erscheinung waren, wünschte ich die Resultate der Zeitbestimmungen zu kennen, welche sich aus den von Herrn Dr. van Hennekeler um die Mittagsstunde angestellten Beobachtungen ableiten liessen, und diese wurden mir bald darauf verschafft. Herr Dr. Kam beobachtete jeden Tag den Stern α ursae min. in der unteren Culmination mit den übrigen für die Zeitbestimmung ausgewählten Pol- und Zeitsternen. Herr Dr. van Hennekeler beobachtete jeden Tag den Stern α urs. min. in der oberen Culmination mit zwei oder mehreren der Sterne α Bootis, η urs. maj., α Leonis und α Virginis, und nahm ebenfalls

---

[1] Nach der Zusammenstellung auf Seite [162] sind die Mittelwerthe des Collimationsfehlers für den ganzen Verlauf der zehn Tage vom 1. bis zum 11. September:

Aus den Beobachtungen um die Mittagsstunde:		$c = -1\overset{s}{.}23$
„ „ „	Nachmittags um 6 Uhr	$-1\cdot12$
„ „ „	um die Mitternachtsstunde	$-1\cdot24$
	im Mittel:	$c = -1\cdot20$

den aus Niveau und Quecksilberhorizont abgeleiteten Collimationsfehler an. Die folgende Tabelle enthält nach Verbesserung einiger Rechnungsfehler die Zusammenstellung der Zeitbestimmungen, so wie ich dieselben von Herrn Dr. Kam erhalten habe.

Zeitbestimmungen von Dr. Kam.

1868	Arml.	St. Z.	Uhrstand	tgl. G.	Azim.
Sept. 1	O	23^h 3^m	-16^m50^s44		-1^s09
„ 2	W	23 3	51·55	-1^s11	+4·05
„ 3	O	23 3	51·27	+0·28	−3·45
„ 4	W	23 3	52·69	−1·42	+9·06
„ 5	O	23 3	52·34	+0·35	−0·04
„ 6	W	23 3	53·14	−0·80	+6·63
„ 7	O	23 3	53·06	+0·08	−1·17
„ 8	W	0 20	54·00	−0·90	+3·52
„ 9	W	23 3	54·25	−0·26	+3·90
„ 10	O	23 3	53·73	+0·52	−0·91
„ 11	W	23 3	54·73	−1·00	+5·07

Zeitbestimmungen von Dr. van Hennekeler.

1868	Arml.	St. Z.	Uhrstand	tgl. G.	Azim.
Sept. 2	O	11^h40^m	-16^m51^s22		$+2^s73$
„ 3	W	11 40	51·65	-0^s43	+4·03
„ 4	O	13 13	51·99	−0·34	+2·85
„ 5	W	13 54	52·65	−0·64	+3·51
„ 6	O	12 33	52·96	−0·33	+1·92
„ 7	W	12 48	53·31	−0·35	+2·13
„ 8	O	12 38	53·59	−0·28	+1·18
„ 9	W	13 44	53·97	−0·27	+1·26
„ 10	W	13 44	54·13	−0·16	+1·36
„ 11	O	12 48	54·35	−0·23	+2·68

Kleine Fehler in täglichen Zeitbestimmungen können bedeutende falsche Unregelmässigkeiten in den daraus abgeleiteten täglichen Uhrgängen zur Folge haben; aber so grosse Abwechslungen im Gange einer sehr vortrefflichen Uhr, als Herr Kam gefunden hat, lassen sich keineswegs aus gewöhnlichen Beobachtungsfehlern erklären, und sie zeigen, dass der angenommene Collimationsfehler des Instrumentes mit den Beobachtungen unvereinbar ist. Die für die einzelnen Tage angenommenen Werthe des Collimationsfehlers waren wenig von einander verschieden und deren Verbindung mit den Beobachtungen gab täg-

liche Schwankungen im Azimuthe des Instrumentes, welche selbst einen Betrag von 12″ erreichten, und durchaus unmöglich sind. Ganz verschieden davon sind die Resultate der Beobachtungen des Herrn van Hennekeler, obschon diese nicht absichtlich für eine genaue Zeitbestimmung angestellt waren. Bedenkt man, dass die täglich bestimmten Werthe des Collimationsfehlers keineswegs vollkommen sind, und dass bei einer Zeitbestimmung aus dem Polarsterne und einem Äquatorsterne ein Fehler in dieser Bestimmung 2·3mal vergrössert in die Zeitbestimmung selbst und 1·6mal vergrössert in das berechnete Azimuth des Instrumentes übergeht, so kommt man zu dem Schlusse, dass die Beobachtungen des Herrn Dr. van Hennekeler innerhalb der gewöhnlichen Beobachtungsfehler, der aus den Hilfsapparaten abgeleiteten Stabilität des Instrumentes und dem Werthe des Collimationsfehlers entsprechen.“

Endlich heisst es auf Seite [165]:

„Der Fehler in den Zeitbestimmungen des Herrn Dr. Kam ist mir unerklärlich geblieben; doch unmittelbar fiel mir der Zeichenwechsel der abgeleiteten Uhrgänge auf, woraus es sich ergab, dass aus den sämmtlichen Beobachtungen des Herrn Dr. Kam sich ein, wenngleich irriger Collimationsfehler ableiten liess, womit sie wenigstens mit einander ziemlich gut in Übereinstimmung gebracht werden konnten. Leitete man aus den so reducirten Beobachtungen die Uhrstände ab, für die Zeiten, worauf diese von Herrn Dr. van Hennekeler bestimmt worden sind, so kamen ihre Unterschiede sonderbar gut mit der bekannten persönlichen Gleichung zwischen den Herren Kam und van Hennekeler überein. Der Unterschied betrug im Mittel nicht einmal eine Zehntelsekunde.....“

Der letzte Passus zeigt, dass weder die Zeitbestimmungen des Herrn Dr. Kam fehlerhaft sind, noch auch der aus ihnen abgeleitete Collimationsfehler ein irriger ist, sondern dass das Instrument während der Beobachtungen von Dr. Kam in der That andere Reductionselemente erforderte, als während der Beobachtungen von Dr. van Hennekeler. Noch mehr wird man in dieser Annahme bestärkt, beim Anblicke des folgenden (S. [170] abgedruckten) Tableau's, welches Dr. Becker mit dem aus der Gesammtheit der Beobachtungen von Dr. Kam folgenden, als

constant angenommenen mittleren Collimationsfehler $c = -0^s186$ berechnet hat, und in dem die Stände der Uhr für 23^h0^m Sternzeit gelten.

1868	Arml.	Corr. der Uhr	Tägl. Gang	Azimuth
Sept. 1	O	-16^m50^s72	-0^s42	$+0^s12$
„ 2	W	51·14	−0·34	−0·04
„ 3	O	51·48	−0·75	−0·06
„ 4	W	52·23	−0·26	+0·24
„ 5	O	52·49	−0·43	+0·06
„ 6	W	52·92	−0·38	+0·03
„ 7	O	53·30	−0·33	+0·12
„ 9	W	53·97	−0·05	+0·09
„ 10	O	54·02	−0·45	+0·12
„ 11	W	54·47		+0·17

Wie man sieht, sind nicht nur die grossen Sprünge im täglichen Uhrgange, sondern auch die im Azimuthe verschwunden, und es stimmt auch das letztere im Mittel beiläufig mit dem Mittel von van Hennekeler's Azimuthen überein, sowie begreiflicher Weise jetzt die Uhrgänge beider Herren nahezu identisch sind. Genauer den Gegenstand zu verfolgen, ist leider nicht möglich, da Prof. Kaiser das dazu nöthige Detail nicht veröffentlicht hat.

Ich glaube daher auch hier annehmen zu dürfen, dass täglich vor der Beobachtung der Zeitsterne eine sprungweise Verschiebung des Fadennetzes um beiläufig 0^s1 (nämlich dem Collimationsfehler -0^s186 aus den Beobachtungen der Sterne, weniger dem -0^s080 aus den Ablesungen der Collimatoren) eintrat und nach den Zeitbestimmungen wieder eine Verschiebung im entgegengesetzten Sinne erfolgte. Man wird allerdings und mit Recht einwenden, dass schon das Stattfinden eines einmaligen Vorganges dieser Art sehr unwahrscheinlich sei: um wie viel mehr aber erst ein mehrmaliges so zu sagen periodisches Auftreten dieser Erscheinung. Allein trotzdem kann ich auch hierzu aus meiner eigenen Erfahrung ein wenigstens sehr analoges Seitenstück beibringen.

Im Herbste des Jahres 1864 wurde auf dem Laaerberge in der Nähe von Wien (4^s56 östlich und 3′4″3 südlich von der k. k. Sternwarte) für Zwecke der europäischen Gradmessung Breite und

Azimuth bestimmt, und es betraute Herr Director v. Littrow mich mit der Leitung der bezüglichen Beobachtungen. Die Breitenbestimmungen mittelst Polarstern und mittelst Circummeridianhöhen wurden an einem, von Herrn G. Starke in der Werkstätte des k. k. polytechnischen Institutes verfertigten Universale angestellt, dessen verstellbarer, 10zölliger Höhenkreis direct von 5′ zu 5′ getheilt war. Die Parallelfäden der Ablesemikroskope, bei denen jeder Trommeltheil der Mikrometerschraube sehr nahe 1″ repräsentirte, waren durch eine Glasplatte mit einer eingeritzten Doppellinie ersetzt. Solcher Doppellinien waren in jeder Platte zwei, in einer Distanz von nahezu $4^1/_2{}'$ eingerissen, um mit einer halben Schraubenumdrehung zwei benachbarte Theilstriche einstellen zu können, und dadurch beim Mittelnehmen aus beiden Lesungen nicht nur von den zufälligen Theilungsfehlern unabhängiger zu werden, sondern auch zugleich einen Theil der periodischen Ungleichheiten der Schraube zu eliminiren.

Herr Director v. Littrow steht eben im Begriffe, einen detaillirten Bericht über die ganze Operation der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften vorzulegen, in deren Denkschriften er in der nächsten Zeit erscheinen wird. Diesem Berichte entnehme ich nun die nachstehenden Indexfehler ($J = {}^1/_2$ Kr. West $+ {}^1/_2$ Kr. Ost) des Höhenkreises, wie sie aus, in der Regel je fünf Einstellungen eines Sternes bei Kreis Ost und West resultiren.

1864	Sternzeit	Stern	Indexfehler
Sept. 10	21ʰ38ᵐ	ε Pegasi	15°44′23″7
„ 10	8 38	α Ursae min.	25·7
„ 11	21 38	ε Pegasi	23·7
„ 11	22 35	η Aquarii	35·3
„ 11	23 36	γ Cephei	33·4
Inzwischen wurde der Kreis viermal um je 30° verstellt.			
Sept. 26	21ʰ40ᵐ	ε Pegasi	134°21′58″0
„ 26	23 1	α Pegasi	58·3
„ 26	23 41	γ Cephei	60·1
„ 27	21 38	ε Pegasi	59·7
„ 27	10 43	α Urs. min.	46·7
„ 28	18 41	α Urs. min.	57·3
„ 28	19 49	α Aquilae	58·3

1864	Sternzeit	Stern	Indexfehler
Sept. 28	21ʰ25ᵐ	β Cephei	134°21'59"6
„ 28	22 28	η Aquarii	58·6
„ 28	22 58	α Pegasi	58·0
„ 28	23 33	γ Cephei	58·1
„ 28	0 10	γ Pegasi	58·9
„ 28	0 54	ε Piscium	58·8
Kreis um 30° verstellt.			
Oct. 2	19ʰ49ᵐ	α Aquilae	164°48'51"9
„ 2	21 42	ε Pegasi	51·3
„ 2	22 30	η Aquarii	50·2
„ 2	23 0	α Pegasi	51·9
„ 4	18 12	α Urs. min.	38·7
„ 4	18 30	α Urs. min.	49·6
„ 4	19 41	γ Aquilae	50·8
„ 4	21 40	ε Pegasi	48·9
„ 4	22 36	η Aquarii	50·5
„ 4	23 2	α Pegasi	51·3
„ 4	23 39	γ Cephei	49·6
„ 4	0 10	γ Pegasi	47·3
„ 4	0 53	ε Piscium	48·7
Den Kreis zweimal verstellt; zuerst um 15°, und hierauf um 80°.			
Oct. 17	17ʰ19ᵐ	α Ursae min.	69°18'41"0
„ 18	0 14	α „ „	54·7
„ 19	17 1	α „ „	52·5

Beim Anblicke dieser Tabelle fallen sogleich mehrfach Sprünge im Indexfehler auf, wie am 11. September zwischen der Beobachtung von ε Pegasi und η Aquarii. Hier könnte man jedoch ganz einfach die Änderung des Collimationsfehlers für eine kleine, in Folge eines unbemerkten Stosses eingetretene Verschiebung des Höhenkreises halten: allein diese Erklärung ist schon bei der nächsten Gruppe unzulässig, indem die ersten vier bei dieser Stellung des Kreises beobachteten Sterne für den Indexfehler im Mittel $J = 134° 21' 59"0$ und die letzten sechs im Mittel $J = 134° 21' 58"5$ liefern, während aus einer dazwischen liegenden Beobachtung des Polarsternes $J = 134° 21' 46"7$ folgt. Dasselbe gilt auch von der dritten Gruppe, wo sich am 4. October überdies der merkwürdige Fall ereignete, dass in einer grösseren Reihe von Einstellungen des Polarsternes die ersten einen andern Indexfehler ergeben als die letzten, und die vorher und nachher beobachteten Sterne. Nimmt man ferner in jeder Gruppe

das Mittel der nahe gleichen Indexfehler, so erhält man für den Betrag der Änderung des Indexfehlers:

am 11. September	....	10·0
„ 27. „	....	12·0
„ 4. October	......	10·9
„ 18. „	......	12·6

also Grössen, die so nahe constant sind, und von ihrem Mittelwerthe 11'4 so wenig abweichen, dass auch aus diesem Grunde an Verschiebungen des Kreises nicht gedacht werden kann.

Eben so wenig kann diese eigenthümliche Erscheinung die Folge einer Drehung des Mikroskopträgers sein, da eine solche durch die Libelle hätte angezeigt werden müssen; es kann daher ihr Grund nur in einer Verschiebung des Fadennetzes im Oculare des Fernrohres oder in einer Verschiebung des Mikrometerapparates eines Mikroskopes zu suchen sein. Um nun zu entscheiden, welcher von beiden Fällen hier eintrat, habe ich aus dem Originaltagebuche alle jene Beobachtungen des Polarsternes, bei welchen zwischen den Einstellungen desselben eine ruckweise Änderung des Indexfehlers sich aussprach, von neuem reducirt, und zwar so, dass ich die Reduction auf den Pol nicht an das Mittel der beiden Mikroskope, sondern an jedes einzelne anbrachte, um zu sehen, ob die Variation des Indexfehlers sich gleichmässig auf beide Mikroskope vertheile, was auf die erste Alternative hindeuten würde, oder blos einem derselben zur Last falle. Dadurch entstand die nachfolgende Zusammenstellung, zu der ich nur bemerken will, dass die zweite Columne das Mittel der Lesungen an beiden Parallelfäden des Mikroskopes I, reducirt auf Bogensekunden enthält, und die dritte Columne dasselbe für Mikroskop II. Die Reduction auf den Pol ist mit Petersen's Tafel, in der Schumacher-Warnstorffischen Sammlung von Hilfstafeln ausgeführt, und der Ort des Polarsternes dem Nautical Almanac entnommen.

Sternzeit	Mikroskop		Correct. weg.		Reduction auf den Pol	Instrument. P.	
	I	II	Libelle	Refraction		I	II
1864 September 27.							
Kreis Ost.							
18ʰ 8ᵐ15ˢ8	356°35'26"21	18"69	—7"54	+51"79	—0°23'52"54	356°12'17"92	10"40
11 18·8	34 21·23	13·90	—7·97	+51·76	22 47·77	17·25	9·92
14 25·8	33 15·14	7·39	—8·18	+51·73	21 41·33	17·36	9·61
16 38·8	32 24·90	18·02	—7·65	+51·70	20 53·90	15·05	8·17
18 59·8	31 36·87	29·04	—8·18	+51·68	20 3·51	16·86	9·03
					Im Mittel. .	356 12 16·89	9·43
Kreis West.							
18 26 5·8	272 14 43·59	64·73	—0·21	—51·60	+0 17 30·43	272 31 22·21	43·35
28 48·8	15 42·03	62·88	+0·11	—51·57	16 31·63	22·20	43·05
31 42·8	16 43·67	64·81	+2·13	—51·54	15 28·63	22·89	44·03
34 4·8	17 35·33	57·87	+1·59	—51·51	14 37·12	22·53	45·07
36 55·8	18 36·86	59·05	+1·17	—51·48	13 34·22	20·77	42·96
					Im Mittel. .	272 31 22·12	43·69

Sternzeit	Mikroskop I	Mikroskop II	Correction weg. Libelle	Correction weg. Refraction	Reduction auf den Pol	Instrument. P. I	Instrument. P. II.
			1864 September 27.				
			Kreis West.				
10ʰ17ᵐ35ˢ7	271°30' 8"89	9"26	—6"38	—53"25	+1° 2' 12"20	272°31' 21"46	21"83
19 46·7	29 35·22	36·53	—5·95	—53·26	2 44·57	20·58	21·89
21 43·7	29 4·53	6·08	—6·17	—53·28	3 13·21	18·29	19·84
24 19·7	28 26·73	28·51	—4·68	—53·30	3 50·95	19·70	21·48
26 16·7	28 0·21	2·60	—5·32	—53·32	4 18·95	20·52	22·91
					Im Mittel . .	272 31 20·11	21·59
			Kreis Ost.				
10 34 36·7	357 17 42·07	38·24	—5·64	+53·38	—1 6 15·47	356 12 14·34	10·51
36 41·7	18 9·89	5·83	—6·17	+53·40	6 43·78	13·34	9·28
37 55·7	18 26·48	21·78	—4·79	+53·40	7 0·37	14·72	10·02
39 29·7	18 50·16	45·15	—7·97	+53·41	7 21·34	14·26	9·25
40 52·7	19 7·50	2·49	—7·86	+53·42	7 39·68	13·38	8·37
44 8·7	19 48·58	44·84	—5·42	+53·45	8 22·39	14·22	10·48
45 47·7	20 12·80	7·68	—8·50	+53·46	8 43·65	14·11	8·99
47 14·7	20 30·49	25·66	—7·86	+53·46	9 2·17	13·92	9·09
48 40·7	20 46·67	42·80	—7·44	+53·48	9 20·30	12·41	8·54
50 0·7	20 63·40	58·84	—6·59	+53·49	9 37·03	13·27	8·71
					Im Mittel . .	356 12 13·80	9·32

Kreis West.

10 55 14·7	271 21 33·39	37·51	—1·39	—53·52	+1 10 41·37	272 31 20·35	23·97
57 4·7	21 11·72	16·44	0·00	—53·53	11 3·38	21·57	26·29
11 0 17·7	20 34·98	37·47	—1·17	—53·55	11 41·36	21·62	24·11
2 5·7	20 13·05	15·65	—2·13	—53·56	12 2·31	19·67	22·27
4 14·7	19 49·79	52·72	—0·74	—53·57	12 26·87	22·35	25·28
					Im Mittel . .	272 31 21·11	24·38

1864 September 28.

Kreis West.

18 21 48·2	272 13 12·21	15·91	—3·08	—52·05	+0 19 3·15	272 31 20·23	23·93
26 19·2	14 47·32	71·75	—1·39	—52·00	17 25·64	19·57	44·00
31 54·2	16 47·74	70·34	—0·74	—51·94	15 24·51	19·57	42·17
34 2·2	17 33·97	56·87	—1·28	—51·92	14 38·08	18·81	41·71
36 48·2	18 35·10	58·75	—0·85	—51·89	13 37·71	20·07	43·71
				Im Mittel.	Erste Einst. . .	272 31 20·23	23·93
				„ „	2.—5. „ . .	19·50	42·90

Kreis Ost.

18 40 19·2	356 23 47·95	65·08	—4·79	+51·85	—0 12 20·83	356 12 14·18	31·31
43 23·2	22 40·82	58·91	—5·53	+51·80	11 13·67	13·42	31·51
45 47·2	21 48·26	67·30	—4·47	+51·78	10 20·96	14·61	33·65
48 12·2	20 54·58	72·90	—4·89	+51·75	9 27·85	13·59	31·91
51 35·7	19 41·68	60·34	—6·27	+51·72	8 13·12	14·01	32·67
					Im Mittel . .	356 12 13·96	32·21

Sternzeit	Mikroskop I	Mikroskop II	Correction weg. Libelle	Correction weg. Refraction	Reduction auf den Pol	Instrument. P. I	Instrument. P. II
			1864 October 4.				
			Kreis West.				
18h 2m24s5	302°33'25"47	5"29	—4"79	—52"91	+0°25'55"98	302°58'23"75	3"57
4 54·5	33 77·68	56·81	—4·47	—52·88	25 3·34	23·67	2·80
6 51·0	34 57·75	37·32	—4·04	—52·86	24 22·33	23·18	2·75
8 12·5	35 28·07	5·83	—3·72	—52·85	23 53·51	25·01	2·77
9 46·5	36 59·58	37·22	—2·66	—52·83	23 20·33	24·42	2·06
					Im Mittel . .	302 58 24·01	2·79
			Kreis Ost.				
18 12 24·5	27 0 40·97	32·44	—2·34	+52·91	—0 22 24·35	26 38 67·19	58·66
14 19·5	26 59 60·27	51·92	—0·53	+52·88	21 43·50	69·10	60·77
16 20·5	59 18·24	10·33	—2·02	+52·87	21 0·38	68 71	60·80
18 42·0	58 25·72	19·39	—1·49	+52·84	20 9·86	67·21	60·88
20 30·5	57 46·76	58·81	—1·60	+52·82	19 31·00	66·98	79·03
22 5·5	57 13·71	25·09	—0·95	+52·80	18 56·94	68·62	80·00
23 39·5	56 41·25	51·85	—1·49	+52·79	18 23·16	69·39	79·99
25 21·0	56 3·95	15·44	—1·06	+52·77	17 46·67	68·99	80·48
27 13·0	55 27·22	38·57	—0·63	+52·75	17 9·92	69·42	80·77
28 47·5	45 48·78	60·39	+0·21	+52·73	16 32·20	69·52	81·13
				Im Mittel 1.— 4. Einst. .		26 39 8·05	0·28
				„ „ 5.—10. „ . .		8·82	20·23

Kreis West.

18 32 17·0	302 44 2·76	4·48	—2·23	—52·78	+0 15 16·38	302 58 24·13	25·85
34 42·0	44 56·34	57·15	—3·40	—52·77	14 24·74	23·91	24·72
36 52·0	45 43·39	45·38	—2·76	—52·74	13 36·50	24·39	26·38
39 28·0	46 38·68	40·65	—1·81	—52·72	12 39·68	23·83	25·80
41 49·5	47 29·68	31·36	—1·92	—52·69	12 48·05	23·12	24·80
					Im Mittel . .	302 58 23·88	25·51

1864 October 19.

Kreis Ost.

16 43 35·2	111 59 43·40	57·85	+0·21	+50·95	—0 51 23·66	111 9 10·90	25·35
45 23·2	59 12·04	28·05	+0·96	+50·93	50 52·15	11·78	27·79
46 49·2	58 46·92	61·00	+0·21	+50·92	50 26·93	11·12	25·20
48 40·2	58 12·67	28·36	+1·80	+50·90	49 52·23	11·14	26·83
49 57·7	57 50·64	66·09	+1·06	+50·89	49 31·25	11·34	26·79
17 16 50·2	49 34·93	45·44	—0·32	+50·65	—0 21 13·39	111 9 11·87	22·38
18 33·2	48 64·43	55·77	—1·28	+50·63	40 40·35	13·43	4·77
19 47·7	48 41·00	31·90	—1·70	+50·62	40 16·35	13·57	4·47
21 35·2	47 63·95	55·78	—1·06	+50·60	39 41·64	11·85	3·68
22 58·2	47 37·09	29·22	—1·17	+50·59	39 14·69	11·82	3·95
				Im Mittel 1.— 6. Einst. . .		111 9 11·36	25·72
				„ „ 7.—10. „ . .		12·67	4·22

Die Resultate der vorstehenden Rechnung übersichtlich zusammengestellt, sind daher:

1864 Sternzeit	Kreis Ost			Kreis West		
	Mikroskop I	II	Zahl d. Einst.	Mikroskop I	II	Zahl d. Einst.
Sept. 27 18h2	356°12'16"9	9"4	5	. . . . . .	. . .	. . .
18·5	. . . . . .	. . .	. . .	272°31'22"1	43"7	5
27 10·7	. . . . . .	. . .	. . .	272 31 20·6	23·0	10
10·7	356 12 13·8	9·3	10	. . . . . .	. . .	. . .
28 18·4	. . . . . .	. . .	. . .	272 31 20·2	23·9	1
18·5	. . . . . .	. . .	. . .	272 31 19·5	42·9	4
18·8	356 12 14·0	32·2	5	. . . . . .	. . .	. . .
Oct. 4 18·1	. . . . . .	. . .	. . .	302 58 24·0	2·8	5
18·3	26 39 8·0	0·3	4	. . . . . .	. . .	. . .
18·4	26 39 8·8	20·2	6	. . . . . .	. . .	. . .
18·6	. . . . . .	. . .	. . .	302 58 23·9	25·5	5
Oct. 19 16·9	111 9 11·4	25·7	6	. . . . . .	. . .	. . .
17·3	111 9 12·7	4·2	4	. . . . . .	. . .	. . .

Hier sieht man auf den ersten Blick, dass Mikroskop I in keiner der drei Gruppen eine verbürgbare Änderung erlitten, in dem die kleinen Variationen in den Angaben desselben sich leich aus den Beobachtungsfehlern u. s. w. erklären lassen. Anders bei Mikroskop II. Dies zeigt in der zweiten und dritten Periode je einen Sprung, in der ersten aber sogar deren drei: den ersten September 27 zwischen 18h2 und 18h5, den zweiten zwischen 18h5 und 10h7 und den dritten, September 28 nach 18h4. Bildet man bei Mikroskop II die Differenz der Nachbarwerthe, zwischen denen eine Verschiebung liegt, so erhält man für die Grösse derselben der Reihe nach:

am 27. September.... 20"7
„ 28. „ .... 19·0
„ 28. „ .... 22·9
„ 4. October ..... 19·9
„ 4. „ ..... 22·7
„ 19. „ ..... 21·5

Im Mittel: 21·12

Die Hälfte dieser Grösse, also 10ʳ6 würde als Änderung des Indexfehlers auftreten, und diese Zahl ist, wie man sieht, so gut wie vollkommen identisch mit der früher aus grösstentheils anderen Beobachtungen dafür abgeleiteten 11ʳ4. Zugleich sind auch hier die einzelnen Angaben für die Variation von Mikroskop II einander bis auf unverbürgbare Grössen gleich, indem der am meisten abweichende zweite Werth blos auf einer einzigen Einstellung in der einen Lage beruht. Die vorstehenden Untersuchungen führen daher, glaube ich, zu folgendem Ergebnisse:

Die Mikrometerapparate der Fernrohre und Mikroskope besitzen trotz sorgfältiger Adjustirung nicht immer jene Stabilität und Unveränderlichkeit, welche anzunehmen man sich bisher für berechtigt hielt; sondern sie besitzen zuweilen, wenn man so sagen darf, zwei verschiedene Ruhelagen. Aus bisher noch nicht bekannten Ursachen kann ein sprungweiser Übergang aus der einen dieser Lagen in die andere eintreten, ohne dass die übrigen Reductionselemente des Instrumentes merklich davon afficirt werden. Nach längerer oder kürzerer Zeit kann eine eben so sprungweise Rückkehr in die frühere Position stattfinden.

Solche sprungweise Verschiebungen treten unter Umständen auch bei anerkannt vorzüglichen Instrumenten auf, wie unter anderen bei dem Meridiankreise der Leidener Sternwarte und jenem der Königsberger, beim letzteren sogar unter den Händen eines Bessel. Sie kommen übrigens wahrscheinlich viel häufiger vor als man vermuthen sollte, und sind wohl nur deshalb so lange verborgen geblieben, weil man an deren Möglichkeit gar nicht dachte. Es wird nämlich wohl schon jeder, der sich mit Messungen irgend einer Art befasst, die Erfahrung gemacht haben, dass hin und wieder einzelne Beobachtungen, ja selbst ganze Reihen von den benachbarten Beobachtungen in einem gewissen Sinne abweichen, ohne dass man einen Grund hierfür anzugeben wüsste. Sind diese Abweichungen für Beobachtungsfehler zu bedeutend, so bleibt nichts übrig, als solche Beobachtungen als „verfehlte“ einfach wegzuwerfen, und dies umsomehr, als in der Regel die Reduction nicht unmittelbar, sondern erst nach einiger Zeit ausgeführt wird, wo eine Untersuchung der Aufschreibungen bis ins kleinste Detail nicht mehr thunlich ist.

Können solche Vorkommnisse nicht zum Theile in sprungweisen Änderungen der Reductionselemente des Instrumentes liegen? In der That musste z. B. die erste der hier wiedergegebenen Breitenbestimmungen durch den Polarstern am Abende des 27. September als „verfehlt“ verworfen werden, weil sie ein mit den anderen Bestimmungen unvereinbares Resultat lieferte. Nicht minder traf dasselbe Schicksal einzelne Einstellungen am 28. September, 4. und 9. October.

So starke Sprünge wie in den oben discutirten vier Fällen können allerdings nicht unbemerkt bleiben, und daher auf das gesuchte Resultat keinen schädlichen Einfluss ausüben, weil die davon afficirten Beobachtungen als „fehlerhaft“ ausgeschieden werden. Allein es frägt sich, ob nicht Sprünge von geringerer Grösse weit häufiger vorkommen dürften, als so bedeutende, ja man muss dies von vornherein für viel wahrscheinlicher halten. Tritt nun ein solcher Fall ein, so wird man die Beobachtungen nicht ohne weiteres als „verfehlte“ bezeichnen und demgemäss weglassen können; sondern im Gegentheile beibehalten müssen, und ihnen höchstens als „unsichereren“ ein geringeres Gewicht zutheilen. Der Erfolg hiervon ist der, dass die Endresultate mehrerer Beobachtungsreihen nicht so gut mit einander harmoniren werden, als man aus der Übereinstimmung der einzelnen Resultate unter einander zu erwarten berechtigt wäre. Auch dies ist eine wohlbekannte Thatsache, die man constanten Fehlerquellen zuschreibt, und ich glaube nicht zu irren, wenn ich annehme, dass unter diesen constanten Fehlerquellen häufig eine sprungweise Änderung einzelner Reductionselemente eines Instrumentes sich befindet.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXIV. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

7.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

XVIII. SITZUNG VOM 6. JULI 1871.

Herr Jérôme Coggia in Marseille dankt, mit Schreiben vom 20. Juni, für den ihm zuerkannten Kometen-Preis und bestätigt zugleich den Empfang der betreffenden Preis-Medaille.

Herr Director Dr. K. Hornstein in Prag übersendet eine Abhandlung: „Über die Bahn des ersten Kometen vom Jahre 1870", vom Herrn Aug. Seydler, Assistenten der k. k. Prager Sternwarte.

Herr Prof. Dr. H. Hlasiwetz legt eine Abhandlung des Herrn J. Kachler vor, betitelt: „Studien über die Verbindungen aus der Camphergruppe. I. Abhandlung: Oxydation des Camphers".

Herr Prof. R. Niemtschik überreicht eine Abhandlung: „Über Constructionen der Durchschnitte zweier krummer Flächen mit Benützung von Kugeln und Rotations-Ellipsoiden".

Herr Dr. Jul. Hann übergibt den II. Theil seiner Abhandlung: „Untersuchungen über die Winde der nördlichen Hemisphäre und ihre klimatologische Bedeutung".

Herr Dr. Nowak, Assistent am k. k. Josephinum, legt eine Abhandlung: „Über den Stickstoffgehalt des Fleisches" vor.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia, R., di Scienze, Lettere ed Arti in Modena: Memorie. Tomi X & XI. Modena, 1869 & 1870; 4°. — Gropelli, Emilio Serra, Le finanze dei comuni e delle provincie. (Memoria premiata dell' anno 1868.) 8°. — Mantegazza, Emilio, L'articolo 53 del regolamento di disciplina. Commedia in cinque atti (premiata dell' anno 1868.) 8°.

Akademie, Südslavische, der Künste und Wissenschaften: Rad. Knjiga XV. U Zagrebu, 1871; 8°. — Historija dubrovačke drame. Napisao Profesor Armin Pavić. U Zagrebu, 1871; 8°.

Acland, Henry W., National Health. Oxford & London, 1871; kl. 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 9. Jahrg., Nr. 19. Wien, 1871; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1848 (Bd. 77. 24). Altona, 1871; 4°.

Bunzel, Emanuel, Die Reptilfauna der Gosauformation in der Neuen Welt bei Wiener-Neustadt. (Aus den Abhdlgn. der k. k. geolog. Reichsanstalt, Bd. V.) Wien, 1871; gr. 4°.

Gesellschaft der Wissenschaften, Oberlausitzische: Neues Lausitzisches Magazin. XLVIII. Band, 1. Heft. Görlitz, 1871; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXII. Jahrg. Nr. 26 bis 27. Wien, 1871; 4°.

Jahrbuch des naturhistorischen Landesmuseums von Kärnten. XIII. & XIV., XVII. & XVIII. Jahrgang. Klagenfurt, 1865 & 1870; 8°.

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie etc. von A. Strecker für 1869. I. Heft. Giessen, 1871; 8°.

Landbote, Der steirische. 4. Jahrgang. Nr. 13. Graz, 1871; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1871, Nr. 14. Wien; 8°.

Mayer, J. R., Naturwissenschaftliche Vorträge. Stuttgart, 1871; 8°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 17. Band 1871, VI. Heft. Gotha; 4°.

Nature. Nrs. 86—87, Vol. IV. London, 1871; 4°.

Neumayr, M., Die Cephalopoden-Fauna der Oolithe von Balin bei Krakau. (Aus den Abhdlgn. der k. k. geolog. Reichsanstalt, V. Bd.) Wien, 1871; gr. 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. Jahrgang 1871, XXI. Band, Nr. 1. Wien; 4°. — Verhandlungen. Jahrgang 1871, Nr. 9. Wien; 4°.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXI. Band. Jahrg. 1871, Jänner—Juni-Heft. Wien; 8°.

Revue des cours scientifiques et littéraires de la France et de l'étranger. Ire Année (2e Série). Nr. 1. Paris & Bruxelles,

1871; 4⁰. („Revue politique et littéraire“ & „La Revue scientifique de la France et de l'étranger“.)

Riccardi, P., Biblioteca matematica italiana. Fasc. 1° & 2°. Modena, 1871; 4⁰.

Société botanique de France: Bulletin. Tome XVIIe, 1870. Comptes rendus des séances. 3. Paris; 8⁰.

Toczynski, Friedrich, Über die Platincyanide und Tartrate des Berylliums. (Inaugural-Dissertation.) Dorpat, 1871; 8⁰.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXI. Jahrgang, Nr. 25—26. Wien, 1871; 4⁰.

Zeitschrift für Chemie, von Beilstein, Fittig & Hübner. XIV. Jahrgang. N. F. VII. Band, 7. Heft. Leipzig, 1871; 8⁰.

Bericht über die von Herrn Prof. E. Weiss ausgeführte Bestimmung der Breite und des Azimuthes auf dem Laaer Berge bei Wien.

Von dem w. M. **Karl v. Littrow.**

(Auszug einer am 20. Juli 1871 für die Denkschriften vorgelegten Abhandlung.)

Diese Arbeit bildet einen Beitrag zur Mitteleuropäischen (jetzt Europäischen) Gradmessung, den ich als österreichischer Commissär nach Beschluss der ersten allgemeinen Conferenz im Jahre 1864 ins Werk zu setzen hatte. Es galt eigentlich die geographische Position von Wien zu bestimmen (die Längendifferenz mit Leipzig und Berlin wurde das Jahr darauf geliefert); da aber die Lage der Wiener Sternwarte, im Innern der Stadt, auf einem hohen, der Insolation und der Erschütterung von allen Seiten ausgesetzten Gebäude, das eine isolirte Fundamentirung der Instrumente nicht zulässt, zu absoluten Beobachtungen ganz ungeeignet ist, so wurde auf dem Laaer Berge im Azimuthe S 346°1 W und 3093·0 Wiener Klafter von der Sternwarte ein Feldobservatorium errichtet, das bei einer Höhe von etwa 200 Fuss über dem mittleren Donauspiegel die ganze Umgegend beherrschte. Die in Anwendung gebrachten, mit Gebrochenen Fernrohren versehenen Instrumente: ein Mittagsrohr mit 30‴ Öffnung von Pistor & Martins in Berlin, ein Universale mit zehnzölligem Höhen- und zwölfzölligem Azimuthalkreise, 24‴ Öffnung, in der Werkstätte des Wiener Polytechnicums von G. Starke gebaut, standen unter einem und demselben Einschnitte einer zerlegbaren Hütte, auf sehr starken Pfeilern.

Nach früher zwischen uns vereinbartem Plane wurden die Beobachtungen theils von Prof. E. Weiss, theils von Dr. A. Murmann, die Reductionen von Prof. Weiss unmittelbar oder unter dessen Leitung besorgt.

Ohne uns hier in das, aus der Abhandlung ersichtliche Detail der Berechnung und Discussion einzulassen, führen wir zunächst die Resultate der Breitenbestimmung an.

Es ergab sich die Polhöhe:

1. Aus Beobachtungen des Polarsternes in beliebigen Stundenwinkeln und aus Circummeridianhöhen
   48°9′32″81 ± 0″088 m. F.
2. Aus Beobachtungen im ersten Vertical:
   a) mit dem Universale ... 48 9 32·84 ± 0·444 „
   b) mit dem Mittagsrohre .. 48 9 33·55 ± 0·149 „

Die unseres Erachtens an die merkwürdige Discrepanz der beiden letzten Messungen sich knüpfenden Betrachtungen führen zu dem Gesammtresultate:

Polhöhe des Universale ..... 48°9′33″14 ± 0″083 m. F.

Für das Azimuth diente als Object der trigonometrische Punkt Hundsheimer Berg bei Hainburg, 21334 Wiener Klafter nahe östlich von unserem Feldobservatorium, wo ein Heliotrop, leider nicht so pünktlich wie man wünschen musste, in Thätigkeit war.

Ausser der gewöhnlichen Methode der Azimuthbestimmung durch Horizontaldistanzen des Polarsternes wurde auch die von mir vorgeschlagene und in das Programm der Gradmessung bei der ersten allgemeinen Conferenz zu Berlin 1864 aufgenommene

Methode der Azimuthbestimmung durch das Mittagsrohr als Collimator

in Anwendung gebracht, zu welchem Behufe die optischen Achsen vom Mittagsrohr und Universale sehr nahe in dieselbe Horizontalebene gestellt waren. Da bei dieser Methode Fehler im angenommenen Azimuthe des Mittagsrohres ihrer ganzen Grösse nach auf das Resultat einwirken, trug man dafür Sorge, dass das Azimuth des Mittagsrohres thunlichst gleichzeitig mit der Winkelmessung zwischen dem terrestrischen Objecte und dem Fadennetze des Mittagsrohres bestimmt wurde. Für das Azimuth

des Mittagsrohres benützte man desshalb δ Ursae minoris, welcher Stern zur fraglichen Jahreszeit in den ersten Abendstunden culminirte, und zwar derart, dass während des Durchganges desselben, um auch hier den Collimationsfehler zu eliminiren, das Instrument umgelegt, dann aus dem Mittel der auf den Mittelfaden reducirten Durchgangszeiten bei Kreis Ost und Kreis West und einem in der ersten und einem in der zweiten Kreislage beobachteten Fundamentalsterne die gesuchte Abweichung der optischen Achse vom Meridiane gerechnet wurde. Nur an einem Tage (7. October) konnte δ Ursae minoris nicht genommen werden und ist dafür α Ursae minoris beobachtet.

Die gewöhnliche Methode der Horizontaldistanzen des Polarsternes hatte unter der Voraussetzung, dass den Einstellungen des Polarsternes gleiches Gewicht mit denen des Heliotropenlichtes zukommt, folgende Resultate ergeben:

1864		Azimuth	Gewicht	Tageszeit
September	25	273°50′6″67	19·2	Morgens
„	26	8·32	17·8	„
„	27	1·53	19·2	Abends
„	27	4·16	19·2	Morgens
„	28	6·76	19·2	Abends
October	4	1·71	20·0	„
„	5	5·88	32·0	„
„	6	4·14	40·0	„
„	7	6·77	40·0	„
„	20	6·80	40·0	„
„	22	7·33	40·0	„

Diese Tagesmittel weichen weit stärker von einander ab als nach der Übereinstimmung der einzelnen Einstellungen zu erwarten stand, zeigen also, dass constante Fehler, wahrscheinlich seitliche Refractionen, Nachbewegungen des Instrumentes und Unregelmässigkeiten im Leuchten dabei eine bedeutende Rolle spielen. Es ist daher wohl am besten aus den Resultaten der verschiedenen Tage das einfache Mittel ohne Rücksicht auf das

Gewicht als Gesammtergebniss gelten zu lassen, wonach man für obiges Azimuth erhält:

273° 50′ 5ʺ46 ± 0ʺ684 m. F.

während der mittlere Fehler eines Tagesmittels

± 2ʺ27

beträgt.

Hingegen führte die neue Methode, durch das Mittagsrohr als Collimator, auf nachstehende Resultate:

September 27	273° 50′	3ʺ92
„ 27		3·38
„ 28		6·79
October 4		1·88
„ 6		5·08
„ 7		4·46.

Der mittlere Fehler eines Tagesmittels ist hier ± 1ʺ65, also bedeutend geringer, als bei der älteren Methode, was ohne Zweifel daher rührt, dass die Einstellung auf das Fadennetz des Mittagsrohres bei weitem schärfer ist, als die Pointirung des Polarsternes.

Das Gesammtergebniss aus dieser Methode ist

273° 50′ 4ʺ25 ± 0ʺ675 m. F.

so dass die sechs Tage, an welchen diese Methode angewendet wurde, bereits ein etwas genaueres Resultat geben, als die elf Tage, an denen nach der älteren Methode beobachtet wurde. Dass beide Methoden für die verschiedenen Tage nahezu gleiche Abweichungen vom Mittelwerthe zeigen, bürgt dafür, dass diese Abweichungen hauptsächlich ausser dem Instrumente ihren Grund haben.

Aus beiden Methoden zusammen folgt

273° 50′ 4ʺ85 ± 0ʺ324 w. F.

Ein Überblick der ganzen Arbeit führt zu folgenden Bemerkungen:

Bei den Breitenbestimmungen mittelst des Polarsternes in beliebigen Stundenwinkeln und mittelst Circummeridianhöhen zeigt sich wieder die von uns bereits an anderen Orten hervorgehobene Thatsache, dass die Tagesmittel weiter von einander abweichen als man nach der Übereinstimmung der einzelnen Einstellungen erwarten sollte. Dessenungeachtet hat die Trennung der ganzen Beobachtungsreihe in zwei Theile dargethan, dass etwa 300 Einstellungen des Polarsternes und einiger südlich vom Zenithe culminirenden Sterne, vertheilt auf vier bis fünf Beobachtungstage, bereits ein Resultat liefern, dessen Genauigkeit durch Hinzufügen weiterer Einstellungen nicht mehr erheblich gesteigert werden kann. Ferner hat die Vergleichung der Ergebnisse aus den eben genannten Methoden und aus Durchgängen im Ersten Verticale neuerdings zu der Überzeugung geführt, dass die Positionsbestimmungen selbst der Fundamentalsterne noch nicht jene Präcision erreicht haben, die man in der Regel denselben beilegt, und dass daher eine systematische Neubestimmung aller Sterne, welche zu Breitenbestimmungen für die Gradmessung verwendet wurden, dringend noth thut. Ohne das wären die angegebenen Unsicherheiten der Polhöhe ganz und gar illusorisch, da die Unterschiede von Sternpositionen verschiedener Quellen die wahrscheinlichen Fehler des Resultates oft um ein Vielfaches derselben übertreffen.

Endlich haben mehrere oben erwähnte plötzliche Änderungen des Indexfehlers am Höhenkreise erkennen lassen, dass die Mikrometerapparate der Fernrohre und Mikroskope trotz sorgfältiger Adjustirung nicht immer jene Stabilität besitzen, welche man bisher annehmen zu dürfen glaubte, sondern dass zuweilen ohne ersichtliche Ursache sprungweise Verschiebungen in eine zweite Ruhelage, sowie Rücksprünge in die erste vorkommen. Eine nähere Untersuchung dieser eigenthümlichen Erscheinung hat Prof. Weiss in einer besonderen Abhandlung niedergelegt. (Sitzungsberichte der k. Akad. d. Wiss. math.-naturw. Classe. Juni-Heft 1871.)

Die Beobachtungen im Ersten Verticale am portativen Mittagsrohre von 30''' und am Universale von 21''' Objectivöffnung

haben eine bedeutende Überlegenheit des ersteren Instrumentes gegen das zweite für diese Art von Beobachtungen nachgewiesen, die wohl nur aus der grösseren Stabilität und der, ohne Schaden für die Tragbarkeit möglichen grösseren optischen Kraft des Mittagsrohres entspringen kann. Man sollte daher für Beobachtungen im Ersten Verticale wo möglich nur Passagen-Instrumente in Anwendung bringen. In diesem Falle würden drei bis vier Abende mit je drei bis vier Sternen billigen Anforderungen genügen.

Bei den Beobachtungen im Ersten Verticale war die optische Kraft des hier gebrauchten Universale von 21''' Öffnung eben noch hinreichend. Die bekannte theoretische Vorschrift, thunlichst nahe am Zenithe culminirende Sterne zu wählen, modificirt sich nämlich praktisch insoferne, als bei zu grosser Annäherung zum Zenithe das sehr schiefe Schneiden der Fäden durch den Stern die Unsicherheit des Auffassens des Antrittes in stärkerem Masse vergrössert, als die Sicherheit des Resultates durch die Lage des Sternes gegen das Zenith wächst. Es zeigt sich so etwas Ähnliches wie bei Bestimmung der Fadendistanzen durch Polarsterne, wo ebenfalls, besonders bei kleinen Instrumenten, jenseits einer gewissen Grenze die Nähe des Sternes am Pole eher vom Übel als von Vortheil ist. Diese Grenze verengt sich in beiden Fällen selbstverständlich mit der stärkeren Kraft der Fernrohres. Das Instrument sollte also so gross sein, als es Rücksichten für Transportabilität, Construction etc. irgend gestatten.

Was schliesslich das Azimuth betrifft, so haben wir in Bezug auf die Bestimmung desselben durch Azimuthal-Differenzen der Polaris dem in der eben citirten Publication Mitgetheilten nichts wesentliches hinzuzufügen. Die neue Methode der Azimuthbestimmung durch Collimiren des Universale mit dem Mittagsrohre wird durch ihre ungemeine Einfachheit überall dort gute Dienste leisten, wo man sich auf die Stabilität des Mittagrohres verlassen oder wo man dessen Azimuth nahe gleichzeitig mit dem des terrestrischen Objectes bestimmen kann. In diesen Fällen wird sich die neue Methode wohl immer wie hier als die genauere erweisen. Eine Beschränkung für den Gebrauch der Methode liegt in der Bedingung, dass die optischen Achsen der

beiden Instrumente in der Ebene des Meridianes liegen müssen, was übrigens bei Gebrochenen Fernrohren keine Schwierigkeit hat. Der Umstand, dass man über Universale und Mittagsrohr verfügen können muss, wird bei genauen geographischen Ortsbestimmungen als eine besondere Voraussetzung kaum anzusehen sein aus längst bekannten und anderen aus unseren Arbeiten ersichtlichen Gründen.

Wenn auch die vorliegenden Versuche noch nicht völlig concludent sind, so scheinen sie mir doch günstig genug für die neue Methode zu sprechen, um dieselbe der Aufmerksamkeit meiner Herren Collegen zu empfehlen.

Über die Construction des Durchschnittes zweier krummen Flächen unter Anwendung von Kugeln und Rotations-Flächen.

Von **R. Niemtschik,**

Professor am k. k. polytechnischen Institute in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

1. Der Durchschnitt *D* einer Rotationsfläche *F* mit einer Fläche (*F*), welche letztere durch die Bewegung eines Kreises erzeugt wird, dessen Mittelpunkt in einer durch die Rotationsaxe von *F* gelegten Ebene *E* eine Gerade oder eine Curve durchlauft und dessen Ebene in jeder Lage auf *E* senkrecht steht, kann auf folgende Weise construirt werden.

Man lege durch einen, die Rotationsfläche *F* schneidenden Kreis (*k*) von (*F*) eine Kugel *K*, deren Mittelpunkt in der Rotationsaxe von *F* liegt, bestimme den Durchschnittskreis *k* der Flächen *K*, *F* und dann die gemeinschaftlichen Punkte der Kreise (*k*), *k* als dem fraglichen Durchschnitte *D* angehörig. Diesen Vorgang wende man bei entsprechend vielen Kreisen der Fläche (*F*) an und ziehe durch die erhaltenen Punkte die Linie *D*.

Von den vielen Fällen, welche auf die vorstehende Aufgabe sich zurückführen lassen, wollen wir nur den folgenden weiter behandeln.

2. Es soll der Durchschnitt 128 der Rotationsfläche *abcd* mit dem dreiaxigen Ellipsoide *AB..EF* Fig. 1 dargestellt werden.

AB, *CD*, *EF* sind Axen des Ellipsoides; *AB* steht auf der horizontalen und *EF* auf der verticalen Projectionsebene senkrecht, folglich ist *CD* mit der Projectionsaxe *X*(*X*) parallel. Die Axe *ab* der Rotationsfläche liegt in der Ebene des mittleren Hauptschnittes *ABCD* des Ellipsoides. $a''b''c''d'$ ist der Vertical-Umriss und $e'f'g'h'$ der Horizontal-Umriss der Rotationsfläche.

Man beschreibe aus M mit dem Halbmesser $ME = MF$ eine Kugel; dieselbe schneidet die Ellipse $ABCD$ in den Punkten G, H, I, K und das Ellipsoid ABF in den grössten (nicht gezeichneten) Kreisen $EFGH$ und $EFIK$, deren verticale Projectionen als Durchmesser $G''H'', I''K''$ der Ellipse $A''B''C''D''$ erscheinen. $M''G'' = M''H'' = M''I'' = M''K'' = M''E''$.

Nun ist bekannt, dass die verticalen Projectionen der Kreise des Ellipsoides ABF beziehungsweise mit $G''H''$ und mit $I''K''$ parallele Sehnen der Ellipse $A''B''C''D''$ sind und dass diese Sehnen die Längen der Durchmesser jener Kreise darstellen. Ferner ist bekannt, dass die Mittelpunkte der Kreise in den mit GH und IK verwandten Durchmessern $(G)(H)$, $(I)(K)$ der Ellipse $ABCD$ liegen.

Der Meridian $abcd$ und die Ellipse $ABCD$ treffen sich in den Punkten 1, 2, weshalb diese Punkte der Linie 1 2 8 angehören. Nur jene Kreise des Ellipsoides, welche durch Punkte des Bogens $1D2$ gezogen werden können, schneiden die Rotationsfläche abd.

Um nun die Durchschnittspunkte 3, 4 eines beliebigen Kreises LNO des Ellipsoides mit der Rotationsfläche zu finden, ziehe man durch den Kreis-Mittelpunkt N die zu der Ebene LNO senkrechte Gerade Nr, bis sie die Rotationsaxe ab in dem Punkte r trifft; dann schneide man die Rotationsfläche mit der durch den Kreis LNO gelegten Kugel, welche r als Mittelpunkt hat, wodurch der Kreis lno erhalten wird, und bestimme die gemeinschaftlichen Punkte 3, 4 der Kreise LNO, lno.

Die Geraden $L''N''O''$ ($\| G''H''$) und $l''n''o''$ ($N''r'' \perp G''H''$, $r''l'' = r''o'' = r''L'' = r''O''$) sind die verticalen Projectionen der Kreise LNO und lno; folglich bildet der Begegnungspunkt dieser Geraden die verticalen Projectionen $3''$, $4''$ der Punkte 3, 4. Die horizontalen Projectionen $3'$, $4'$ ergeben sich aber, wenn die Entfernung $3''(3)$ des Punktes 3 (oder 4) von der Ebene ABb bestimmt, also etwa $3''(3) \perp l''o''$ gezogen, $n''(3) = n''l''$ und $t'3' = t'4' = 3''(3)$ gemacht wird.

Weil die Ebene ABb sowohl die Rotationsfläche als auch das Ellipsoid in symmetrische Hälften theilt, so ist $AB\,ab$ ebenfalls eine Symmetrieebene für die Durchschnittslinie 1 2 8.

Die Tangente $T3$ der Schnittlinie 1 2 8 ergibt sich als Durchschnitt der Ebenen $3pT$ und $3PT$, welche in dem Punkte 3 beziehungsweise die Rotationsfläche und das Ellipsoid berühren.

Die Ebene $3pT$ ist durch die Tangente $3p$ des Kreises lno und senkrecht zu der Normalen 3ρ der Rotationsfläche gelegt; p bildet den Durchschnittspunkt der Tangente $3p$ mit der Ebene ABb und pT die Durchschnittslinie der Ebenen $3pT$ und ABb. $(3)p'' \perp n''(3)$; $p''T'' \perp 3''\rho''$. $3pT$ ist auch eine Berührungsebene des die Rotationsfläche längs des Kreises lno berührenden Kegels, dessen Scheitel s im Durchschnitte der Axe ab mit der dem Punkte l (oder o) des Meridianes abd entsprechenden Tangente ls (oder os) erhalten wird. pT und s liegen also in der Ebene $3pT$ sowie auch in der Ebene ABb, folglich liegt s gleichfalls in der Geraden pT. Deshalb kann die Gerade $p''T''$ auch dadurch gefunden werden, dass man p'' mit dem Durchschnittspunkte s'' der Axe $a''b''$ und der Tangente $l''s''$ (oder $o''s''$) des Umrisses $a''b''d''$ verbindet.

Die Ebene $3PT$ ist aber durch die Tangenten $3P$, $3Q$ der durch den Punkt 3 gezogenen Kreise $O3L$ und $R3S$ des Ellipsoides bestimmt. P, Q sind Durchschnittspunkte der Tangenten $3P$, $3Q$ mit der Ebene ABb und daher ist PQ die Durchschnittslinie der Ebenen $3PT$ und ABb. $3''[3] \perp O''L''$, $3''[3] = 3''(3)$, $N''[3] = N''O''$, $[3]P'' \perp N''[3]$; $3''\{3\} \perp R''S''$, $3''\{3\} = 3''(3)$, $R''U'' = U''S''$, $\{3\}Q'' \perp U''\{3\}$. Die Trace $P''Q''$ steht wieder senkrecht auf der verticalen Projection der dem Punkte 3 des Ellipsoides entsprechenden Normalen und geht auch durch die verticalen Projectionen σ'', (σ'') der Spitzen σ, (σ) jener Kegel, welche das Ellipsoid längs der Kreise $R3S$ und LNO berühren.

Der gemeinschaftliche Punkt T der Tracen pT und PQ gehört den beiden Berührungsebenen $3pT$ und $3PT$, also auch der Tangente $3T$, als der Durchschnittslinie dieser Ebenen an.

Weil T in der Symmetrieebene ABb liegt und 3, 4 symmetrische Punkte der Schnittlinie 1 2 8 sind; so ist $T4$ die dem Punkte 4 entsprechende Tangente.

In den Durchschnitten der Linien $1''2''3''$ und $C''D''$ ergeben sich die verticalen Projectionen $5''$, $6''$ von den in der Ellipse CDF befindlichen Punkten 5, 6 der Linie 1 2 8; weshalb $5'$, $6'$ Berührungspunkte der Linien $1'2'8'$ und $C'D'E'F'$ sind.

In den Durchschnitten der Linie 1″3″2″ mit der verticalen Projection *g″..h″* des Horizontal-Umrisses *efgh* liegen aber die verticalen Projectionen 7″, 8″ der gemeinschaftlichen Punkte 7, 8 von 1 2 8 und *efgh*, weshalb wieder 7′, 8′ Berührungspunkte der Linien 1′2′8′ und *e′f′g′h′* bilden.

Weil in Fig. 1 statt einer allgemeinen Rotationsfläche ein Rotations-Ellipsoid gezeichnet wurde, ist der Umriss *e′f′g′h′* eine Ellipse und die verticale Projection *g″h″* desselben eine Gerade.

Wenn die Ebene *ABab* gegen eine oder gegen beide Projectionsebenen geneigt wäre, könnte die Durchschnittslinie 1 2 8 dadurch dargestellt werden, dass man die Ebene *ABb* sammt den in ihr befindlichen Diametralschnitten *ABCD* und *abd* in eine Projectionsebene oder parallel dazu nach (*A*)(*B*)(*C*)(*D*), (*a*)(*b*)(*d*) dreht, in dieser Lage den Durchschnitt (1)(2)(8) der Flächen (*A*)(*B*)(*F*), (*a*)(*b*)(*f*) wie in Fig. 1 construirt und dann die Curve (1)(2)(8) um dieselbe Gerade und denselben Winkel zurückdreht, um welche *AB...d* nach (*A*)(*B*)..(*d*) gedreht worden sind.

In dem speciellen Falle, wenn auch *ABF* eine Rotationsfläche mit der Hauptaxe *AB* ist, liegt der gemeinschaftliche Mittelpunkt aller Hilfskugeln im Durchschnitte der Rotationsaxen *AB*, *ab*.

3. Der Durchschnitt *D* einer Rotationsfläche *F* mit einer Fläche (*F*), welche durch Bewegung einer Ellipse erzeugt wird (und nach Kreisen nicht geschnitten werden kann), deren Mittelpunkt in einer durch die Rotationsaxe der Fläche *F* gelegten Ebene *E* eine gerade oder krumme Linie durchlauft und deren eine Axe in jeder Lage senkrecht zu der Ebene *E* steht, ergibt sich einfach auf folgende Weise.

Man construire eine Rotationsfläche, welche die Fläche (*F*) nach einer Ellipse und die Rotationsfläche *F* nach Kreisen schneidet und bestimme die Punkte, welche die Ellipse und die Kreise gemeinschaftlich haben und welche offenbar auch der Linie *D* angehören. Dieses Verfahren ist so oft zu wiederholen, bis die zur Darstellung der Linie *D* erforderlichen Punkte gefunden sind. Um eine grössere Genauigkeit zu erzielen, wird man auch einige Tangenten von *D* im voraus zu ziehen haben.

Als Beispiel diene die nachstehende Aufgabe.

4. Es sollen die Durchschnitte 1 2 6 und I II VI der Rotationsfläche *ab..f* mit der Fläche *AB..F* Fig. 2 construirt werden.

Die Rotationsaxe *ab* ist parallel mit der Projectionsaxe $X(X)$. Die Gerade *AB* steht senkrecht auf der horizontalen Projectionsebene; *CD*, *EF* sind Axen der Ellipse *CDEF*. $CD \parallel X(X)$. Alle horizontalen Schnitte der Fläche *ABF* sind mit *CDEF* ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen, deren Mittelpunkte in der Geraden *AB* liegen.

Der Diametralschnitt *CAD* der Fläche *ABF* und der Meridian *abf* der Rotationsfläche *abf* haben die Punkte I, II, 1, 2 gemeinschaftlich, weshalb diese Punkte den fraglichen Durchschnittslinien angehören.

Um andere Punkte der Linien 1 2 6, I II VI zu erhalten, ziehe man durch einen in dem Bogen $A''C''$, zwischen I'', II'' gelegenen Punkt H'' die mit $X(X)$ parallele Gerade $H''I''K''$ und betrachte sie als verticale Projection der auf der Fläche *ABF* befindlichen, also mit *CDEF* ähnlichen Ellipse *HIK*. Diese Ellipse benütze man als Erzeugungslinie sowie die Gerade *ab* als Axe des Rotations-Ellipsoides *R*. Das Ellipsoid *R* hat zum Meridian die mit *CDEF* ähnliche Ellipse $\alpha\beta\gamma\delta$ und schneidet die Rotationsfläche *abf* in den Kreisen *ghi* und *klo*; diese beiden Kreise schneiden wieder die Ellipse *HIK* in den Punkten 3, 4, III, IV, welche also auch in den Durchschnitten der beiden Flächen *abf* und *ABF* liegen.

Zieht man $K''\varepsilon \parallel E'D'$; so ist $I''\varepsilon$ gleich der zu *HK* senkrechten Halbaxe der Ellipse *HIK*. Macht man $I''\varphi = I''\varepsilon$, $G''\alpha = G''\beta = G''\varphi$, $\alpha\delta \parallel E'D'$ und $G''\gamma = G''\delta$, so sind $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ die Axen des zur verticalen Projectionsebene parallelen Meridianes des Ellipsoides *R*. Bestimmt man die Durchschnittspunkte g'', k'' (oder h'', l'') der Ellipse $\alpha\beta\gamma\delta$ mit dem Meridiane $a''b''f''$ und zieht die Geraden $g''i''h''$ und $k''o''l'' \perp a''b''$; so bilden $g''h''$, $k''l''$ die verticalen Projectionen der Durchschnittskreise *gih* und *klo* der Flächen *R* und *abf*, sowie 3'', 4'', III'', IV'' die gleichnamigen Projectionen der Punkte 3, 4, III, IV, welche die Ellipse *HIK* beziehungsweise mit dem Kreise *klo* und jenem *gih* gemeinschaftlich hat.

Um die horizontalen Projectionen 3', 4', III', IV' zu erhalten, hat man die Abstände 3''(3), III''(III) der Punkte 3, 4, III, IV

von der Ebene *CAD* zu bestimmen, $[o''(3) = o''k'', i''(\mathrm{III}) = i''g']$ und $o'3' = o'4' = 3^{\cdot}(3)$, sowie $i'\,\mathrm{III}' = i'\,\mathrm{IV}' = \mathrm{III}''(\mathrm{III})$ zu machen.

Wie die Durchschnittspunkte der Ellipse *HIK* mit der Rotationsfläche *ab f* bestimmt wurden, so können auch die Durchschnittspunkte III, IV eines beliebigen Kreises *gih* der Rotationsfläche *abf* mit der Fläche *ABF* gefunden werden, wenn man nämlich *gih* als Parallelkreis eines Rotations-Ellipsoides *R* betrachtet, welches *ab* zur Axe, *G* zum Mittelpunkt hat und dessen Meridian $\alpha\beta\gamma\delta$ eine mit *CDEF* ähnliche Ellipse ist.

Das Ellipsoid *R* schneidet die Fläche *ABF* in einer horizontalen, mit *CDEF* ähnlichen Ellipse *HIK* und diese schneidet den Kreis wieder in den Punkten III, IV.

Demnach hat man $A'L' \| G''g''$, $g''\beta \| L'F'$, $\beta\delta \| FD'$ zu ziehen, $G''\alpha = G''\beta$, $G''\gamma = G''\delta$ zu machen, den Durchschnittspunkt H'' (oder K'') der Ellipse $\alpha\beta\gamma\delta$ mit $C'\lambda''$ (oder $D''A''$) zu bestimmen und die Gerade $H''K'' \| X(X)$ zu ziehen. Die Geraden $H''K''$ und $g''k''$, als verticale Projectionen der Ellipse *HIK* und des Kreises *gih* schneiden sich in einem Punkte, welcher die verticalen Projectionen III'', IV'' der Durchschnittspunkte III, IV der genannten Linien bezeichnet. Die horizontalen Projectionen III', IV' können aber wie bei dem ersten Vorgange gefunden werden.

Weil die Ebene *aAb* die beiden Flächen *abf* und *ABF* symmetrisch theilt, so sind auch die Curven 126 und I II VI symmetrisch mit Bezug auf jene Ebene, und da dieselbe auf der horizontalen Projectionsebene senkrecht steht, so erscheinen auch die Projectionen 1′ 2′ 6′ und I′ II′ VI′ symmetrisch gegen *a′b′*.

Die Tangente *t* III der Curve I II VI ergibt sich als Durchschnittslinie der Ebenen III*mn* und III*MN*, von denen die erstere die Rotationsfläche *abf*, die letztere die Fläche *ABF* in demselben Punkte III berührt.

Die Ebene III*mn* kann entweder durch die Tangente III*z* des Kreises *gih* und die Spitze *s* des die Rotationsfläche *abf* längs des Kreises *gih* berührenden Kegels, oder durch den Punkt III und die zur Normalen IIIμ der Rotationsfläche *abf* senkrechte Lage bestimmt werden. Zur Bestimmung der Ebene III*MN* kann man wieder entweder die Tangente III*T* der Ellipse *HIK* und den Scheitel *S* des die Fläche *ABF* längs der Ellipse

HIK berührenden Kegels, oder die dem Punkte III entsprechende Normale der Fläche *ABF* benützen.

Zieht man $(\mathrm{III})q \perp i''(\mathrm{III})$ und macht $i'z' = z''q$, so ist z als Durchschnitt der Tangente IIIz des Kreises *gih* mit der horizontalen Projectionsebene ein Punkt der Horizontaltrace *mn* der Ebene III*mn*; zieht man aber die Normale $v'\mu'$ an den Umriss *a'b'd'* und dann III$'\mu'$, so ist III$'\mu'$ die horizontale Projection der Normalen IIIμ zur Rotationsfläche *abf*. Demnach kann die Trace $mn \perp \mathrm{III}'\mu'$ gezogen werden.

Bei der Bestimmung der Horizontaltrace *MN* der Ebene III*MN* ist zu berücksichtigen, dass sie mit der Tangente III*T* der Ellipse *HIK* parallel ist; diese Tangente ist aber wieder parallel mit der Tangente *px*, welche an die Ellipse *CDEF* durch deren Schnittpunkt *p* mit der Ebene III*AB* gezogen werden kann, folglich ist auch $MN \parallel px$. Ein Punkt w' dieser Trace ergibt sich im Durchschnitte der Geraden *S*III mit der horizontalen Projectionsebene. Ohne Benützung des Scheitels *S* kann w' dadurch gefunden werden, dass man zuerst die Tangente $H''u''$ an den Hauptschnitt $C''A''$ zieht, u'' nach u' projicirt und dann den Durchschnittspunkt w' der Geraden A'III$'$ und der zu $C'p'$ parallelen Geraden $u'w'$ bestimmt.

Die Tracen *mn* und *MN* treffen sich in dem Punkte *t*, weshalb also t'III$'$, t''III$''$ die Projectionen der Tangente *t*III bilden. Bezeichnet (*t*) den Durchschnittspunkt der Tangente *t*III mit der Symmetrieebene *abAB*, dann ist selbstverständlich (*t*)IV die mit *t*III symmetrisch gelegene Tangente der Linie I II VI.

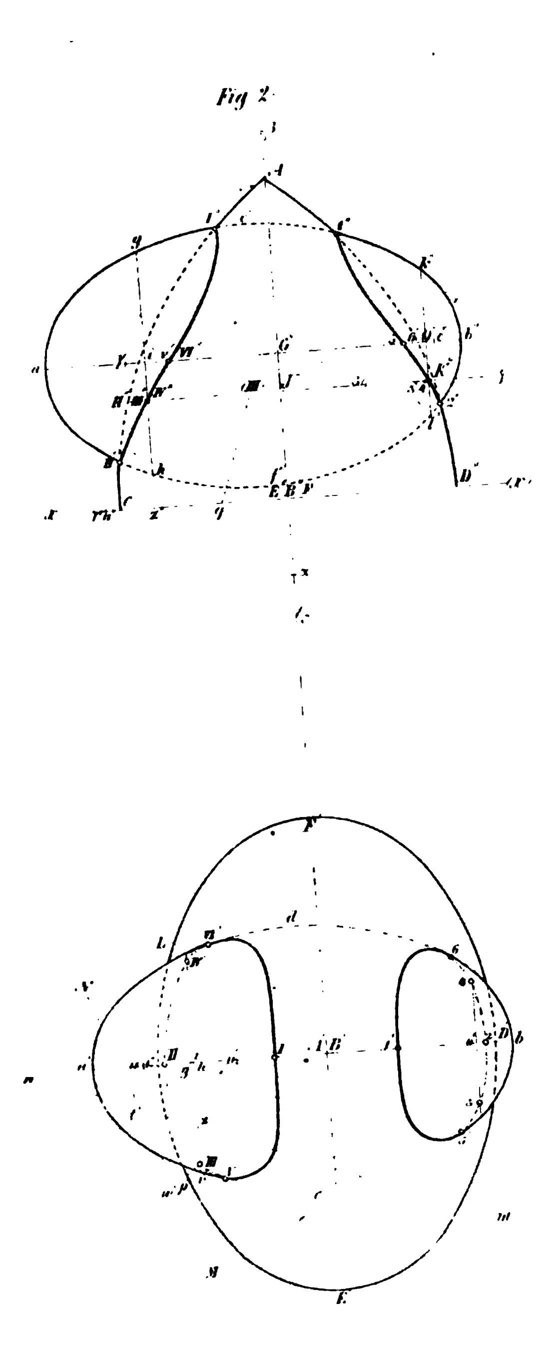
Die in dem Umrisse *a'b'd'* gelegenen Punkte 5′, 6′, V′, VI′ können nach dem gewöhnlichen Vorgange, nämlich als horizontale Projectionen der Durchschnitte 5, 6, V, VI des Meridianes *abd* und der mit *CDEF* ähnlichen Schnittlinie (*C*)(*D*)(*E*)(*F*) der Ebene *abd* mit der Fläche *ABF* dargestellt werden.

Die verticalen Projectionen 5″, 6″, V″, VI″ ergeben sich dann als Durchschnitte der Geraden *a″b″* mit den Projectionsstrahlen 5′, 5″ und V′, V″.

Man kann aber auch zuerst die verticalen Projectionen 5″, 6″, V″, VI″ auf die für die Bestimmung der Punkte 3″, 4″, III″, IV″ angegebene Weise ermitteln und nachher die horizontalen Projectionen 5′, 6′, V′, VI′ bestimmen.

Wenn durch die Axe ab einer Rotationsfläche F und di Axe $\alpha\beta$ einer symmetrischen Curve C eine Ebene gelegt werde kann, welche auf der Ebene von C senkrecht steht, dann ist es i den meisten Fällen vortheilhaft, die Durchschnittspunkte von C mit F durch Anwendung einer Rotationsfläche (F) zu bestimmen, welche ab als Axe und die Curve C als Erzeugungslinie hat. Die Flächen F (F) schneiden sich nach Kreisen und diese treffen die Curve C in den fraglichen Punkten.

Bei einer anderen Gelegenheit wollen wir die Fälle behandeln, in welchen die bezügliche Linie C der zweiten Ordnung angehört und die Axen ab, $\alpha\beta$ sich schneiden.


Fig. 2

Studien über die Verbindungen aus der Camphergruppe.

Von J. Kachler.

(Erste Abhandlung.)

Oxydation des Camphers.

Die Constitution des Camphers und seiner Abkömmlinge war in der letzten Zeit wiederholt Gegenstand von theoretischen Betrachtungen [1]. Die vorgetragenen Ansichten würden gewiss weniger verschieden sein, als es der Fall ist, wenn die über diese Verbindungen bekannten Thatsachen genügten, die Theorie des Camphers festzustellen, eine Aufgabe, welche wegen der überaus zahlreichen Isomerien, die man in der Reihe dieser Verbindungen schon kennt, und zu denen noch immer neue aufgefunden werden, ganz besondere Schwierigkeiten bietet. Es schien daher wünschenswerth, mehrere der schon beschriebenen Verbindungen noch einmal darzustellen, um sie in gewisser Richtung auf ihr Verhalten zu prüfen. Man dürfte aus dem vorliegenden ersten Theil meiner Arbeit, die ich auf die Veranlassung von Prof. Hlasiwetz auszuführen begonnen habe, entnehmen, dass z. B. gleich der so oft schon ausgeführte Oxydationsprocess des Camphers noch einer Berichtigung bedürftig war.

Die Einwirkung der Salpetersäure auf den Campher hat, so lehren die bisherigen Untersuchungen, vornehmlich die Entstehung zweier Säuren zur Folge: der krystallisirbaren Camphersäure und der nicht krystallisirbaren Camphresinsäure [2]. Die letztere,

---

[1] Weyl, Berl. Ber. 1868. 94. Meyer, ibid. 1870. 116. Hlasiwetz ibid. 1870. 539.

[2] Kürzlich hat W. Schlebusch (Berl. Ber. 1870. 591) beobachtet. dass in den Mutterlaugen von der Bereitung der Camphersäure, auch kleine Mengen eines Tetranitrocamphers, kleine mattweisse Krystallkörnchen sich finden.

über welche wir eine Untersuchung von Schwanert besitzen[1], ist nicht ein blosses Nebenproduct, sie entsteht jedesmal, und ihre Menge ist so beträchtlich, dass sie für den Oxydationsprocess des Camphers charakteristisch ist, wie die Camphersäure selbst. Die Beziehung der drei Verbindungen zu einander scheint ganz einfach zu sein:

$$\underbrace{C_{10}H_{16}O}_{\text{Campher}} \qquad \underbrace{C_{10}H_{16}O_4}_{\text{Camphersäure}} \qquad \underbrace{C_{10}H_{14}O_7}_{\text{Camphresinsäure}}$$

Die Camphresinsäure wäre demnach das Endproduct der Sauerstoffaufnahme, welche in zwei Phasen durch das Zwischenglied der Camphersäure fortschreitet:

$$C_{10}H_{16}O + {}_3O = C_{10}H_{16}O_4$$
$$C_{10}H_{16}O_4 + {}_4O = C_{10}H_{14}O_7 + H_2O.$$

Wenn man übrigens die Oxydation des Camphers in grösserem Massstabe ausführt und ihren Verlauf genauer beobachtet, so überzeugt man sich bald, dass dabei zweierlei noch übersehen worden ist:

1. die Entstehung einer flüssigen Verbindung des Camphers mit Salpetersäure,
2. die Bildung einer in perlglänzenden Schuppen krystallisirenden Säure, die in den syrupösen Mutterlaugen sich findet und nach längerer Zeit aus ihr herauskrystallisirt.

1. Salpetersaurer Campher.

Die Ausbeute an Camphersäure aus Campher kann bei scheinbar dem gleichen Verfahren eine sehr wechselnde sein; sie beträgt in maximo 33—36 Pct. und ist jedenfalls grösser, wenn man die Retorte, worin sich die Materialien befinden, mit einem Rückflusskühler versieht, als wenn man diesen weglässt, gleichwohl aber die verdampfende Salpetersäure wieder ersetzt. Natürlich musste man zunächst annehmen, dass, wenn ohne

---

[1] Annal. Chem. und Pharm. CXXVIII. 77.

Kühlvorrichtung operirt wird, man einen Verlust an Campher selbst erfährt, der flüchtig genug ist, um mit den entweichenden Säuredämpfen theilweise fortgeführt zu werden.

Bringt man nun, um die Grösse dieses Verlustes kennen zu lernen, an der Retorte einen Ballon an, benutzt zur Oxydation eine Säure von $d = 1 \cdot 37$ und erhitzt, so bemerkt man, dass sich in der Vorlage ausser der grünblau gefärbten condensirten Säure noch eine zweite darauf schwimmende Flüssigkeitsschichte ansammelt. Es ist leicht, von derselben, indem man sie durch einen Scheidetrichter von der Säure trennt, die man wieder in die Retorte zurückgiesst, sehr beträchtliche Mengen zu erhalten. (etwa 20 Pct. des angewandten Camphers).

Benutzt man, statt den Säureverlust in der Retorte immer gleich durch frische Säure zu decken, vornehmlich nur die blaue abdestillirte Säure aus der Vorlage, so vermehrt sich die Menge dieser zweiten öligen Flüssigkeitsschichte, während sich die Menge der schliesslich erhaltenen Camphersäure vermindert, so dass diese bis auf 24 Pct. vom angewandten Campher sinken kann.

Man überzeugt sich bald, dass man es hier mit einer bestimmten Verbindung des Camphers mit Salpetersäure zu thun hat, die indessen ausserordentlich zersetzlich ist und unter allen den Umständen Campher liefert, unter welchen das Salpetersäurehydrat Wasser verliert, indem es Verbindungen eingeht [1].

Da diese Verbindung weder gewaschen noch ohne Zersetzung für sich destillirt werden kann, so lassen die sauren Dämpfe, die sich absorbirt darin befinden, sich nicht anders entfernen, als indem man einen Strom trockener Kohlensäure oder Luft durchleitet. Dadurch verliert sie auch die gelbe bis grüne Farbe, die sie bis dahin hatte, erscheint völlig farblos, von campherartigem, etwas säuerlichem Geruch und der Consistenz eines fetten Öles. Beim Erhitzen in einer Retorte geht anfangs ein kleiner Theil unverändert über, der grössere jedoch wird

---

[1] Die schon vor sehr geraumer Zeit über dieselbe von Brandes, Bouillon-Lagrange und Wenzel gesammelten Beobachtungen hat Gmelin VII. 322 zusammengestellt.

unter Entwickelung rother Dämpfe zersetzt, und es destillirt etwas gefärbter Campher über.

Mit Wasser gesteht das Öl sofort zu einem Brei von Campher[1]. Ebenso wird es schnell zersetzt, wenn Metalle, Metalloxyde, Ammoniak, Anilin, Phenol etc. darauf einwirken; während der Campher abgeschieden wird, wirkt die Salpetersäure in ihrer Weise auf diese Substanzen, löst, oxydirt, nitrirt sie etc. Starker Alkohol und Äther lösen die Verbindung unverändert. Mit Salzsäuregas gesättigt, wird das Öl gelb und man empfindet beim Erwärmen den Geruch des Chlors; in einer verschlossenen Röhre auf 100° erwärmt, wird auch in diesem Falle der grösste Theil des Camphers ausgeschieden, ein kleiner so verändert, dass die Ausscheidung gelb gefärbt erscheint.

Mit Pottasche kann das Öl geschüttelt werden, ohne sich zu verändern. Rauchende Salpetersäure löst es in der Hitze und gibt weiterhin die übrigen Oxydationsproducte des Camphers. Rauchende Schwefelsäure entbindet rothe Dämpfe und das Öl löst sich darin unter starker Erhitzung mit tiefbrauner Farbe. Beim Verdünnen mit Wasser bemerkt man die Abscheidung eines dicklichen braunschwarzen Öles von pfeffermünzartigem Geruch.

Hatte man englische Schwefelsäure angewendet, so entsteht nur eine dunkelbraune Lösung, die mit Wasser verdünnt, stark gefärbten Campher fallen lässt. Das Öl vermag noch Campher aufzulösen und verdickt sich damit.

Zur Analyse wurden Substanzen verschiedener Bereitung benutzt, auch solche, die mit concentrirter Salpetersäure umdestillirt, dann mit Pottasche getrocknet und durch Kohlensäure und schliesslich durch hindurchgesaugte Luft entfärbt waren.

I. 0·2065 Gr. gaben 0·4405 Gr. Kohlensäure und 0·1477 Gr. Wasser.

II. 0·2230 Gr. „ 0·4805 Gr. „ „ 0·1645 Gr. Wasser.

III. 0·4796 Gr. „ 26·2 CC. Stickstoff.

---

[1] Entsprechend gereinigt, gab er bei der Analyse:

	$C_{10}H_{16}O$
C—79·2	79·0
H—10·5	10·5.

Daraus berechnet sich folgende Formel:

$2(C_{10}H_{16}O).N_2O_5$		I	II	III
C.....	58·25	58·21	58·76	—
H	7·76	7·95	8·19	—
N	6·79	—	—	6·87

Nach der Gleichung:

$$2(C_{10}H_{16}O).N_2O_5+H_2O = 2(C_{10}H_{16}O)+2NHO_3$$

müssen 30·6 Pct. Salpetersäurehydrat gebildet werden; bei einem Titrirversuche wurden 31·2 Pct. gefunden.

Für den salpetersauren Campher gibt es bis jetzt nur eine analoge Verbindung. Das ist das salpetersaure Zimmtöl oder der salpetersaure Zimmtaldehyd (Dumas und Peligot). Der Zusammensetzung nach gleich (sie ist $2\,(C_9H_8O).N_2O_5$), ist sie verschieden in ihren äusseren Eigenschaften. Das salpetersaure Zimmtöl, aus einer flüssigen Verbindung hervorgehend, ist fest, krystallinisch; der salpetersaure Campher, aus dem festen Campher gebildet, ist ein Öl. Die Leichtigkeit der Zersetzung theilen beide Verbindungen.

Die Verbindungsfähigkeit des Terpens mit N_2O_3, die zuerst Cahours beobachtet hatte und von N. Bunge (Zeitschrift für Chemie 1870. 579) genauer studirt worden ist, verdient als eine einigermassen analoge Erscheinung hier noch hervorgehoben zu werden.

Bunge fand für die Verbindung die Formel:

$$C_{10}H_{15}\,(N_2O_3).$$

2. Säure aus den Mutterlaugen.

In den, zum Syrup abgedampften Mutterlaugen von der Gewinnung der Camphersäure, die vornehmlich die amorphe Camphresinsäure hätten enthalten sollen, begann nach monatelangem Stehen eine Krystallbildung, die die Masse anfangs nur trübte, die allmälig sich aber so vermehrte, dass sie breiig und schliesslich fast butterartig fest erschien.

Sie wurde nun in dünnen Lagen zwischen Leinwand in einer Schraubenpresse so gut als möglich abgepresst, in siedendem

Wasser gelöst und mit Kohle entfärbt. Diese Art der Reinigung genügte, die Verbindung schon viel krystallisationsfähiger zu machen. Sie erschien bei angemessener Concentration ihrer Lösung bald in Form von feinen perlglänzenden Kryställchen wieder, die an den Rändern der Schale besonders leicht zu weichen, knolligen, etwas efflorescirenden Gruppen zusammenwuchsen, bis endlich das Ganze wieder breiartig erstarrte. Die neuerdings von den Mutterlaugen durch Pressen befreite Verbindung wird um so leichter krystallisationsfähig, je reiner sie ist, und bildet nach zwei bis drei Operationen dieser Art blendend weisse mikroskopische Nadeln, die nur bei sehr langsamem Verdunsten verdünnter Lösungen sich zu kurzen glasglänzenden Säulchen verdicken, und sehr löslich in Wasser, Weingeist und Äther sind. Von Benzol und Schwefelkohlenstoff werden sie kaum gelöst. Die wässrige Lösung röthet Lackmus stark und besitzt einen anfänglich etwas ranzigen, hinterher stark sauren Geschmack. Die Säure zersetzt leicht die kohlensauren Salze der Metalle.

Unter den Salzen sei gleich hier eines basischen Barytsalzes gedacht, weil es vermöge seiner besonders leichten Bildungsweise dazu dienen kann, noch grössere Mengen der Säure aus den ersten abgepressten Mutterlaugen sowohl, wie auch aus den manchmal gar nicht zum Krystallisiren zu bringenden syrup- oder terpentinartigen Massen von der Oxydation des Camphers, darzustellen. Versetzt man nämlich eine mit Ammoniak abgesättigte Lösung der Säure mit Chlorbaryum, so bleibt das Gemisch zunächst völlig klar und unverändert. So wie man es aber erhitzt, trübt es sich und während die Flüssigkeit siedet, fällt der allergrösste Theil der Säure in Verbindung mit Baryt als unlösliches, sandiges, weisses krystallinisches Pulver heraus, welches man nunmehr mit kaltem Wasser waschen kann. Um aus ihm die Säure wieder abzuscheiden, braucht man dieses Salz nur unter warmen Wasser mit verdünnter Schwefelsäure zu zersetzen, vom schwefelsauren Baryt abzufiltriren und mit Aether auszuschütteln. Durch diese Reaction kann man sich überzeugen, dass bei jeder Oxydation des Camphers mit Salpetersäure in den dicken Mutterlaugen von der Camphersäure, sie mögen krystallisiren oder nicht, diese Säure vorhanden ist. Weder die Campher-

säure noch auch die Isopimelinsäure (das Zersetzungsproduct der Camphersäure mit schmelzendem Kali) geben in solcher Weise unlösliche Barytsalze. Es gibt diese bisher unbekannte Säure keine auffälligen Reactionen, wenn man sie mit den Lösungen von Metallsalzen in der Kälte versetzt. Nur Bleisalze geben weisse Fällungen.

Sie reducirt beim Erwärmen weder salpetersaures Silber noch eine Trommerische Kupferlösung. Versetzt man eine Säurelösung mit essigsaurem Kupferoxyd und erwärmt die anfangs klare Lösung, so scheidet sich ein copiöser Niederschlag der lichtgrünen Kupferverbindung aus, der beim Abkühlen der Flüssigkeit sich vollständig wieder löst.

Der Schmelzpunkt der Säure ist schwer genau anzugeben, weil sie anfangs ihr Krystallwasser verliert. Die beginnende Verflüssigung tritt bei 110° C. ein. Verjagt man das Wasser völlig, so erstarrt der Rest beim Auskühlen krystallinisch und diese wasserfreie Säure zeigt hierauf den Schmelzpunkt von 115° C. Etwas über ihren Schmelzpunkt erwärmt erstarrt sie zunächst glasig rissig, bald aber bilden sich in der durchsichtigen Masse Krystalle, die sie endlich undurchsichtig weiss erscheinen lassen. Noch weiter erhitzt verflüchtigt sie sich unter Verbreitung saurer Dämpfe. Sie lässt sich mit Hinterlassung eines nur unbedeutenden Rückstandes destilliren. Anfangs entweicht das Wasser, später geht die Säure als ein farbloses, bald erstarrendes Öl über.

Ihre Zusammensetzung wurde nach der Analyse mehrerer Partien verschiedener Bereitung und einiger ihrer Salze festgestellt. Die lufttrockene Säure verliert bei 100° C. nur Spuren hygroskopischer Feuchtigkeit.

Bei ihrem Schmelzpunkt jedoch verliert sie einen constanten Betrag von Wasser.

Bei der Analyse wurden folgende Zahlen erhalten:

Bei 100° C. getrocknete Substanz.

I. 0·3212 Gr. gaben 0·5865 Gr. Kohlensäure u. 0·1866 Gr. Wasser.

II. 0·3262 Gr. „ 0·5925 „ „ „ 0·1889 „ Wasser.

III. 0·3148 Gr. gaben 0·5696 Gr. Kohlensäure u. 0·1796 Gr. Wasser.

In 100 Theilen:

	I	II	III
C....	49·79	49·51	49·34
H....	6·45	6·43	6·34

Geschmolzene Säure:

I. 0·3433 Gr. gaben 0·6792 Gr. Kohlensäure u. 0·1854 Gr. Wasser.

Destillirte Säure:

II. 0·1801 Gr. gaben 0·3582 Gr. Kohlensäure u. 0·0930 Gr. Wasser.

In 100 Theilen:

	I	II
C....	53·96	54·24
H....	6·00	5·74

Hierauf lassen sich folgende Formeln rechnen, die in Uebereinstimmung mit den gleich zu beschreibenden Salzen stehen:



	Bei 100° C. getrocknet.	Geschmolzen oder destillirt.
	$C_9H_{14}O_6$	$C_9H_{12}O_5$
C....	49·54	54·00
H....	6·42	6·00

Beim Erhitzen der lufttrockenen Säure auf 130° C. verloren:

I. 0·3781 Gr. 0·0317 Gr. Wasser

II. 0·8910 „ 0·0771 „ „

Berechnet	Gefunden	
$C_9H_{12}O_5+H_2O$	I	II
H_2O—8·25	8·34	8·65.

Zweibasische Salze.

Ammonsalz.

Wawellitartige Krystalle, die sich aus einer sehr concentrirten, mit Ammoniak abgesättigten Lösung der Säure

bilden. Sie verlieren schon bei 100° Ammoniak und Wasser. Die Analyse bezieht sich auf im Vacuum getrocknete Substanz.

0·2672 Gr. gaben 0·4122 Gr. Kohlensäure und 0·1957 Gr. Wasser.

In 100 Theilen:

$C_9H_{10}(NH_4)_2O_5+H_2O$		Gefunden
C....	42·85	42·08
H....	7·93	8·13.

Barytsalz.

Durch Absättigen mit kohlensaurem Baryt erhalten; trocknet unter der Luftpumpe zu einer krystallinischen Masse ein.

0·3235 Gr. bei 170° getrocknet gaben 0·2220 Gr. schwefelsauren Baryt.

$C_9H_{10}Ba_2O^5$		Gefunden
Ba....	40·89	40·06.

Zinksalz.

Dargestellt wie das Barytsalz. Es ist sehr viel löslicher als das Barytsalz und krystallisirt erst aus den bis zum dünnen Syrup eingedampften Laugen. Kleine büschelförmig gruppirte kurze Nadeln, die durch Weingeist porzellanartig undurchsichtig werden.

I. 0·4335 Gr. bei 178° getrocknet gaben 0·1250 Gr. Zinkoxyd.

II. 0·3050 Gr. bei 200° getrocknet gaben 0·0900 Gr. Zinkoxyd.

$C_9H_{10}Zn_2O_5+H_2O$		Gefunden I	Gefunden II
Zn....	23·18	23·10	23·67.

Die letzten Antheile Wasser entweichen erst bei einer Temperatur, bei der das Salz sich zu zersetzen beginnt.

Dreibasische Salze.

Kalksalz.

Erhalten durch Absättigen einer siedenden Säurelösung mit kohlensaurem Kalk. Das Filtrat setzt beim Erkalten nadelförmige Krystalle an, die nicht allzu löslich in kaltem Wasser sind.

0·3388 Gr. bei 100° getrocknet gaben 0·3637 Gr. Kohlensäure, 0·1445 Gr. Wasser und 0·1754 Gr. kohlensauren Kalk.

$C_9H_9Ca_3O_5+2H_2O$		Gefunden
C	36·85	36·29
H	4·43	4·73
Ca....	20·47	20·72.

I. 0·3592 Gr. bei 320° getrocknet gaben 0·5163 Gr. CO_2 und 0·1269 Gr. H_2O.

II. 0·4004 Gr. bei 320° getrocknet gaben 0·1249 Gr. Ätzkalk.

$C_9H_9Ca_3O_5$		Gefunden I	Gefunden II
C	40·45	39·96	—
H	3·44	4·01	—
Ca....	22·47	—	22·28.

Kupfersalz.

Es ist schon erwähnt, dass dieses Salz sich beim Erhitzen der Säurelösung mit essigsaurem Kupferoxyd als lichtgrünes Pulver ausscheidet. Es hat die Eigenthümlichkeit, sich in der erkalteten Flüssigkeit wieder völlig aufzulösen; man muss daher nach seiner Bildung sofort filtriren. Mit heissem Wasser lässt es sich ohne viel Verlust auswaschen.

Ein zweites Salz entsteht, wenn die von dem ersten abfiltrirte Flüssigkeit concentrirt wird. Es scheidet sich dann bei einigem Stehen derselben als bläulich grüner krystallinischer Schlamm ab. Es ist etwas dunkler von Farbe als die früher beschriebene Verbindung, nach dem Trocknen pulverförmig, und enthält, wie die Analyse zeigte, andere Krystallwassermengen als diese.

a) Lichtgrüne Verbindung.

I. 0·3518 Gr. bei 145° getrocknet gaben 0·4260 Gr. Kohlensäure, 0·1370 Gr. Wasser und 0·1261 Gr. Kupferoxyd.

II. 0·5897 Gr. bei 145° getrocknet gaben 0·2092 Gr. Kupferoxyd.

$C_9H_9Cu_3O_5+2H_2O$		Gefunden I	Gefunden II
C	32·92	33·03	—
H	3·96	4·32	—
Cu....	28·99	28·60	29·15

b) Dunkelgrüne Verbindung.

0·3786 Gr. bei 150° getrocknet gaben 0·3786 Gr. Kohlensäure, 0·1145 Gr. Wasser und 0·1115 Gr. Kupferoxyd.

$C_9H_9Cu_3O_5+H_2O$		Gefunden
C	34·82	34·37
H	3·55	4·22
Cu....	30·67	30 30.

Barytsalz.

Von seiner Darstellungsweise war schon oben die Rede. Bei der Bereitung zum Behufe der Analyse müssen die Operationen möglichst schnell ausgeführt werden, um es nicht mit kohlensaurem Baryt zu verunreinigen. Ist es gleich fast unlöslich in siedendem Wasser, so ist es doch etwas löslich in Chlorammonium, das sich bei seiner Bereitung aus dem Ammonsalz und Chlorbaryum bildet und daher kann man eine gegebene Säuremenge nicht ganz quantitativ in das Salz verwandeln. Es ist nach dem Trocknen ein weisses krystallinisches, ziemlich schweres Pulver.

I. 0·3442 Gr. bei 100° getrockn. Substanz gaben 0·3216 Gr. Kohlensäure und 0·0824 Gr. Wasser.

II. 0·3529 Gr. bei 100° getrocknet gaben 0·2925 Gr. schwefelsauren Baryt.

III. 0·4607 Gr. bei 100° getrocknet gaben 0·3807 Gr. schwefelsauren Baryt.

$C_9H_9Ba_3O_5+H_2O$		Gefunden I	Gefunden II	Gefunden III
C	25·68	25·49	—	—
H	2·61	2·66	—	—
Ba....	48·87	—	48·74	48·60.

0·4607 Gr. bei 100° getrocknete Substanz verloren bei 185° 0·0204 Gr. Wasser und blieb das Gewicht, bis 265° erhitzt, constant.

$C_9H_9Ba_3O_5+H_2O$		Gefunden
H_2O....	4·25	4·42.

Silbersalz.

Eine Lösung des Ammonsalzes gibt auf Zusatz von salpetersaurem Silber einen weissen, flockigen Niederschlag dieses Salzes, welches so löslich ist, dass es in verdünnten Lösungen gar nicht entsteht. Man kann es auch durch Absättigen der Säurelösung mit Silberoxyd in der Hitze erhalten, wonach es aus dem Filtrate beim Erkalten herausfällt.

Die nur ungefähr für das dreibasische Salz stimmenden Zahlen, die ich bei der Analyse erhielt, muss ich dem Umstande zuschreiben, dass sich das Salz beim Auswaschen zersetzt. Es ist zwar ziemlich lichtbeständig, färbt sich aber beim Trocknen in höherer Temperatur bedeutend. Die Salze der Alkalien sind so löslich, dass sie kaum in einem für die Analyse brauchbaren Zustand erhalten werden können.

Das Bleisalz, durch neutrales essigsaures Bleioxyd in der Lösung der Säure erzeugt, ist ein gallertartiger Niederschlag, der sich beim Auswaschen zum Theil zu zersetzen scheint, der auch nicht ganz unlöslich in Wasser ist.

Äthylverbindung.

Das gewöhnliche Verfahren, Ätherverbindungen darzustellen, liefert auch den Äther der Säure ziemlich leicht. Eine mit salzsaurem Gas gesättigte alkoholische Lösung derselben lässt ihn beim Versetzen mit Wasser zum grössten Theil als ein schweres Öl fallen. Ein anderer Theil ist indess noch in der wässrigen Flüssigkeit gelöst und kann, will man ihn gewinnen, mit Äther ausgezogen werden. Das Öl wurde nach dem Waschen (was nicht ohne Verlust allzu lange fortgesetzt werden darf) durch Erhitzen in einer Retorte bis auf 200° von dem grössten Theile der Feuchtigkeit befreit und dann bei gewechselter Vorlage destillirt. Die erste Partie, noch Wasser und Spuren von Alkohol

enthaltend, wurde entfernt; die Hauptmenge ging zwischen 302 und 309° über und diese wurde noch einmal rectificirt. Die reine Verbindung hatte den Siedepunkt von 302°, und stellte ein farbloses Öl von einem etwas an den Äther der Bernsteinsäure erinnernden Geruch dar.

I. 0·3347 Gr. gaben 0·7014 Gr. Kohlensäure u. 0·2076 Gr. Wasser.

II. 0·3870 Gr. gaben 0·8123 Gr. Kohlensäure u. 0·2483 Gr. Wasser.

$C_9H_{11}(C_2H_5)O_5$		Gefunden I	Gefunden II
C	57·89	57·50	57·24
H	7·01	6·89	7·12.

Unterwirft man ein Gemisch des Kalksalzes der Säure mit Ätzkalk der trockenen Destillation, so erhält man ein dünnflüssiges, noch ziemlich gefärbtes Öl, das einen, den Destillationsproducten des buttersauren Kalkes ähnlichen Geruch besitzt. Nach mehrmaliger Rectification erschien es wasserhell und destillirte vollständig zwischen 110 und 115° über. Die Analyse gab Zahlen, welche sich am meisten der Formel $C_7H_{12}O$ nähern, eine Formel, für welche überdiess die gefundene Dampfdichte und die unter diesen Umständen wahrscheinlichste Reaction

$$C_9H_{12}O_5 = C_7H_{12}O + 2CO_2$$

spricht.

0·4400 Gr. gaben 1·1955 Gr. Kohlensäure und 0·4407 Gr. Wasser.

$C_7H_{12}O$		Gefunden
C	75·00	74·10
H	10·71	11·06.

Die Dampfdichte, in der Barometerleere bestimmt, ergab 3·69 und 3·74; für die gegebene Formel berechnet sich 3·86.

Die Verbindung hat offenbar die Natur eines Ketons. Weitere Versuche konnte ich indess aus Mangel an Material nicht mit ihr anstellen.

Die Untersuchung der beschriebenen Salze beweist also, dass die empirische Formel der Säure $C_9H_{12}O_5$ ist. Ihr Kohlenstoffgehalt ist demnach derselbe wie der des aus der Camphersäure erhaltenen Phorons, und ich schlage darum für ihre Benennung den Namen „Camphoronsäure" vor.

Die Camphoronsäure gestattet den Austausch von drei Wasserstoffatomen gegen Metalle. Sie ist also jedenfalls dreiatomig. Später mitzutheilende Betrachtungen werden übrigens darthun, dass sie nur eine zweibasische Säure ist.

Erhitzt man Camphoronrsäure mit dem dreifachen Gewicht Ätzkali bis zur Entwicklung von Wasserstoffgas, so hat man sie völlig zersetzt. Gleich beim Absättigen der Lösung der Schmelze mit verdünnter Schwefelsäure empfindet man einen starken Fettsäuregeruch und wenn man die angesäuerte Flüssigkeit destillirt, das Destillat mit Ammoniak absättigt, eindampft und mit einer concentrirten Lösung von salpetersaurem Silber versetzt, so erhält man einen krystallinischen Brei eines Silbersalzes, das mit kaltem Wasser gewaschen und zwischen Papier abgepresst wurde. Es färbt sich am Lichte, erhält bei 100° ein constantes Gewicht und erwies sich als reines buttersaures Silber.

	$C_4H_7AgO_2$	Gefunden
C	24·62	24·52
H	3·58	3·60
Ag	55·38	55·41.

Die Buttersäure ist das einzige charakteristische Product dieser Zersetzung (neben Kohlensäure). Auch die Menge, in der sie gebildet wird, spricht dafür, dass die Camphoronsäure glatt nach der Gleichung:

$$C_9H_{12}O_5 + H_2 + H_2O = 2C_4H_8O_2 + CO_2$$

zerfällt.

Schüttelt man die angesäuerte Lösung der Schmelze, statt sie zu destilliren, mit Äther aus, so erhält man nach dem Abdestilliren des letzteren eine genügende Menge der freien Säure um auch ihren Siedepunkt bestimmen zu können. Er wurde zwischen 155 und 160° gefunden.

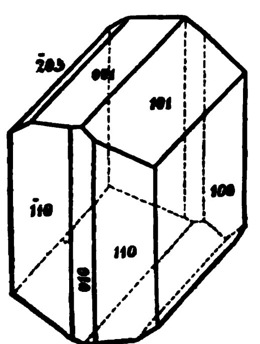
Oxycamphoronsäure $C_9H_{12}O_6$.

Schliesst man ein Molekül der lufttrockenen Camphoronsäure ($C_9H_{12}O_5 + H_2O$) mit zwei Atomen Brom in eine Röhre ein und erhitzt auf 130°, so findet man, dass nach längstens zwei Stunden das Brom verschwunden ist und der Röhreninhalt sich in einen gelben Syrup verwandelt hat. Beim Öffnen der Röhre entweicht mit grosser Heftigkeit Bromwasserstoff. Behandelt man die gebildete Masse mit warmem Wasser, so löst sie sich zum grössten Theil. Nur ein ganz kleiner Rest bleibt als schweres gelbliches, beim Erkalten harzartig werdendes Öl von scharfem Geruck zurück. Davon abfiltrirt, gibt die nunmehr fast wasserklare Lösung auf dem Wasserbade concentrirt, sehr bald eine reichliche Krystallisation ziemlich voluminöser glasglänzender Krystalle von sehr rein ausgebildeten Formen. Diese erste rohe Krystallisation, meistens etwas gelblich gefärbt, wird beim Liegen an der Luft in Folge eines kleinen Gehaltes von einem Nebenbestandtheil röthlich, verliert aber diese Farbe wieder beim Lösen in Wasser und der Behandlung mit Kohle, die auch die ziemlich gefärbten Mutterlaugen entfärbt, aus denen noch fast bis zum letzten Tropfen weitere Mengen der neuen Verbindung erhalten werden können. Von ausgezeichneter Schönheit und Grösse werden die Krystalle, wenn man die Lösungen der entfärbten Säure über Schwefelsäure langsam verdunsten lässt. Es entstehen so meistens einzelne, prächtig ausgebildete Krystallindividuen, deren Kantenlänge oft 8—10 Linien beträgt. Die Verbindung ist bromfrei.

Herr Professor Ditscheiner hatte die Güte, die krystallo-



graphischen Messungen auszuführen und theilte mir darüber folgendes mit:



„Krystallform: schiefprismatisch.

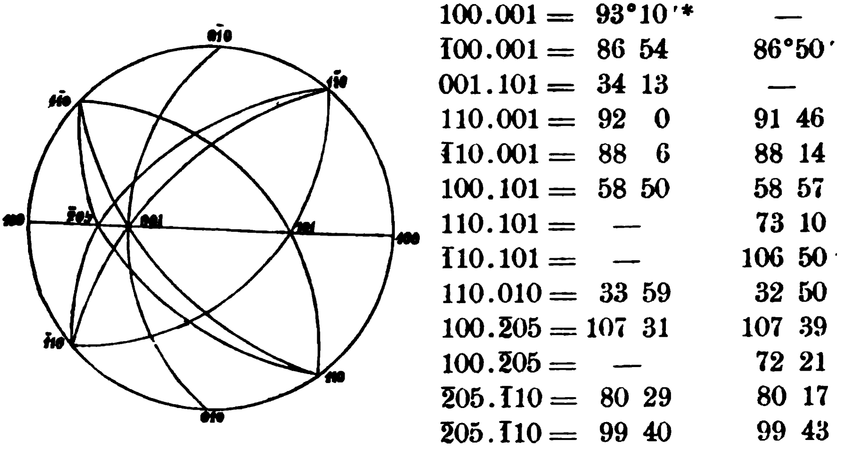
$a : b : c = 1 \cdot 49418 : 1 : 0 \cdot 98075$,

$ac = 86° 50'$

Beobachtete Flächen:

$100 \cdot 001 \cdot 101 \cdot 110 \cdot 010 \cdot \bar{2}05$.

	Beobachtet:	Berechnet:
110.1̄10 =	67°40′*	—
100.110 =	56 9	56° 10′



100.001 =	93°10′*	—
$\bar{1}00.001$ =	86 54	86°50′
001.101 =	34 13	—
110.001 =	92 0	91 46
$\bar{1}10.001$ =	88 6	88 14
100.101 =	58 50	58 57
110.101 =	—	73 10
$\bar{1}10.101$ =	—	106 50
110.010 =	33 59	32 50
$100.\bar{2}05$ =	107 31	107 39
$100.\bar{2}05$ =	—	72 21
$\bar{2}05.\bar{1}10$ =	80 29	80 17
$\bar{2}05.\bar{1}10$ =	99 40	99 43

„Die Symmetriebene *ac* ist die Ebene der optischen Axen. Eine Platte parallel 100 geschnitten, zeigt eine optische Axe, die nahezu senkrecht auf 100 steht.“

Die Oxycamphoronsäure besitzt einen rein und angenehm sauren Geschmack. Sie ist nicht nur in Wasser, sondern auch in Weingeist und Äther leicht löslich, so dass man sie einer wässerigen Lösung durch Schütteln mit Äther vollkommen entziehen kann. Sie enthält Krystallwasser, welches bei 100° vollständig entweicht. Dabei wird sie matt porzellanartig, sie beginnt nach dem Entwässern bei 210° zu schmelzen und erstarrt beim Auskühlen krystallinisch. Sie ist unverändert destillirbar. Die Analysen wiesen für die wasserhaltige Säure die Formel

$$C_9H_{12}O_6 + H_2O,$$

für die wasserfreie

$$C_9H_{12}O_6$$

aus. Sie enthält also nur ein Atom Sauerstoff mehr als die Camphoronsäure und ihre Bildung ist demnach nach dem Schema

$$C_9H_{12}O_5 + H_2O + {}_2Br = C_9H_{12}O_6 + {}_2BrH$$

erfolgt.

Es wurden folgende Zahlen erhalten:

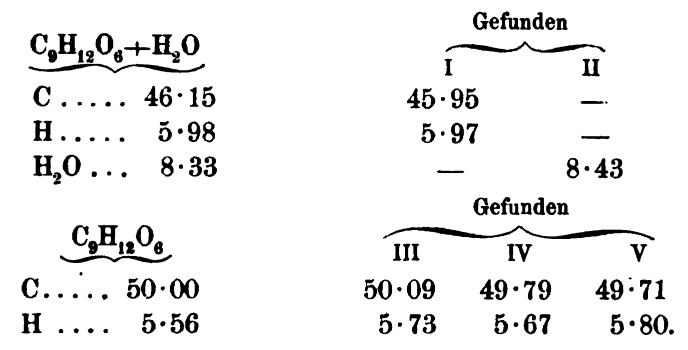
I. 0·4269 Gr. lufttrockene Substanz gaben 0·7146 Gr. Kohlensäure und 0·2299 Grm. Wasser.

II. 0·2575 Gr. verloren bei 100° 0·217 Gr. Wasser.

III. 0·2354 Grm. bei 100° getrockn. Substanz gaben 0·4323 Gr. Kohlensäure und 0·1215 Gr. Wasser.

IV. 0·3267 Gr. destillirte Säure gaben 0·5865 Gr. Kohlensäure und 0·1669 Gr. Wasser.

V. 0·3192 Gr. destillirte Säure gaben 0·5819 Gr. Kohlensäure und 0·1668 Gr. Wasser.



$C_9H_{12}O_6+H_2O$		Gefunden I	Gefunden II
C	46·15	45·95	—
H	5·98	5·97	—
H_2O ...	8·33	—	8·43

$C_9H_{12}O_6$		Gefunden III	Gefunden IV	Gefunden V
C	50·00	50·09	49·79	49·71
H	5·56	5·73	5·67	5·80.

Die Oxycamphoronsäure ist nach Art der Pflanzensäuren eine starke Säure, zersetzt mit Leichtigkeit die kohlensauren Salze der verschiedenen Basen, und gibt eine Reihe nur zum Theile krystallisirender Verbindungen, nach welchen auzunehmen ist, dass sie die Natur einer zweibasischen und dreiatomigen Säure besitzt. Sie wird ebenso wenig wie die vorige Säure von Metallsalzen mit Ausnahme des basisch essigsauren Bleies direct gefällt. Sie zeigt auch nicht das Verhalten jener gegen eine Lösung von essigsaurem Kupferoxyd, dagegen entsteht in derselben Weise wie dort ein nur zweibasisches Barytsalz, wenn man die mit Ammoniak abgesättigte Lösung mit Chlorbaryum erhitzt. Ein entsprechendes Kalksalz kann in dieser Art nicht erhalten werden. Nur im Bleisalz erscheinen H_3 durch $\overset{|}{P}b_3$ vertreten.

Kalisalze.

a) Das saure Salz.

Es entsteht so, dass man die Hälfte einer gegebenen Menge von Säurelösung mit kohlensaurem Kali genau absättigt und die andere unabgesättigte Hälfte zumischt. Bei passender Concentration entstehen kleine glänzende Krystalle, die leicht umkrystallisirt werden können.

0·3003 Gr. gaben bei 100° 0·0209 Gr. Wasser ab und lieferten hierauf 0·0960 Gr. schwefelsaures Kali.

$C_9H_{11}KO_6+H_2O$		Gefunden
K	15·39	15·43
H_2O	6·62	6·90.

b) Das neutrale Salz.

Durch totale Absättigung erhalten, trocknet unter der Luftpumpe zu einer gummiartigen, sehr hygroskopischen Masse ein.

1·5250 Gr. bei 130° getrocknet gaben 0·9077 Gr. schwefelsaures Kali.

$C_9H_{10}K_2O_6$		Gefunden
K	26·71	26·72.

Kalksalz.

Durch Absättigen mit kohlensaurem Kalk erhalten. Die Lösung trocknet im Vacuum rissig ein, es zerbröckelt dann zu glasartigen Stücken, die zerrieben ein kreideweisses, nicht sehr hygroskopisches Pulver geben.

0·4291 Gr. bei 220° getrocknet gaben 0·0975 Gr. Ätzkali.

$C_9H_{10}Ca_2O_6$		Gefunden
Ca	15·75	15·71.

Barytsalz.

Nach der vorhin angegebenen Darstellungsweise bildet es perlmutterglänzende Blättchen.

I. 0·2078 Gr. bei 100° getrocknet gaben 0·2038 Gr. Kohlensäure und 0·0604 Gr. Wasser nebst 0·1107 Gr. kohlensauren Baryt.

II. 0·1798 Gr. gaben 0·1123 Gr. schwefelsauren Baryt.

III. 0·1576 Gr. gaben bei 270° 0·0079 Gr. Wasser ab.

$C_9H_{10}Ba_2O_6+H_2O$		Gefunden		
		I	II	III
C	29·27	29·73	—	—
H	3·25	3·23	—	—
Ba	37·13	37·05	36·72	—
H_2O	4·87	—	—	5·01.

Bleisalz.

Es ist ein weisser Niederschlag, den basisch essigsaures Bleioxyd in den Lösungen der Säure erzeugt. Für die Analyse wurde er bei 120° getrocknet.

I. 0·3823 Gr. gaben 0·2750 Gr. Kohlensäure und 0·0656 Gr. Wasser.

II. 1·2071 Gr. gaben 0·0191 Gr. schwefelsaures Bleioxyd.

III. 0·9677 Gr. gaben 0·8160 Gr. schwefelsaures Bleioxyd.

$C_9H_9Pb_3O_6+H_2O$		Gefunden		
		I	II	III
C	19·94	19·61	—	—
H	2·03	1·91	—	—
Pb	57·34	—	57·67	57·59.

Silbersalz.

Es fällt in der Form weisser Flocken heraus, wenn eine mit Ammoniak abgesättigte Lösung der Säure mit salpetersaurem Silber versetzt wird. Das Salz ist im Wasser ziemlich löslich und scheint sich beim Auswaschen und Trocknen, wobei es sich stark färbt, etwas zu zersetzen. Die Menge des gefundenen Silbers differirte um 1 Pct. von derjenigen, welche die Formel

$$C_9H_{10}Ag_2O_6$$

verlangt.

Trotz vielfach abgeänderter Versuche wollte es nicht gelingen, aus der Oxycamphoronsäure noch andere dreibasische Salze darzustellen, wie sie die Camphoronsäure so leicht liefert. In einer späteren Abhandlung soll versucht werden, die Constitution und das Verhältniss dieser beiden Säuren zu einander zu erklären. Für diesmal sei nur die Beziehung angedeutet, welche zwischen der Camphoronsäure und der Uvitinsäure zu bestehen scheint, welche letztere Weyl bei der Oxydation seines aus dem Campher durch Einwirkung von Jodwasserstoffsäure erhaltenen Kohlenwasserstoffes $C_{10}H_{18}$ gefunden hat[1].

---

[1] Berlin. Ber. 1868. 97.

$$\underbrace{C_9H_8O_4}_{\text{Uvitinsäure (Mesidinsäure)}} + H_2 + H_2O = \underbrace{C_9H_{12}O_5}_{\text{Camphoronsäure.}}$$

Die Oxycamphoronsäure entsteht nur aus der krystallwasserhaltigen Camphoronsäure. Die durch Erhitzen auf 130° oder durch Destillation von diesem Wasserantheil befreite Säure verwandelt sich, mit Brom in einer Röhre auf 100° erhitzt, zwar in einen braunen Syrup, der jedoch in warmem Wasser gelöst und abgedampft, unter Entweichen des Broms wieder die frühere Camphoronsäure liefert. Selbst bei einer Temperatur von 135° konnte kein Substitutionsproduct der Camphoronsäure mit Brom erzielt werden. Der grösste Theil der Säure wird als solcher wieder erhalten und nur ein kleiner hatte sich in eine schwarzbraune harzige Masse umgesetzt, die offenbar das Product einer weitergegangenen Zersetzung war. Bringt man vor dem Erhitzen etwas Wasser hinzu, so bildet sich wie früher die Oxycamphoronsäure.

Auch die Oxycamphoronsäure gibt bei einer weiteren Behandlung mit Brom in zugeschmolzenen Röhren keine bromirte Verbindung.

Jeder Überschuss des Broms, der bei ihrer Darstellung aus der Camphoronsäure angewendet wird, bleibt ausser Wirkung, selbst wenn man bis auf 150° erhitzt.

Mit schmelzendem Ätzkali zersetzt sich die Oxycamphoronsäure wie die Camphoronsäure.

Beide Säuren werden von Salpetersäure sehr wenig angegriffen; selbst nach stundenlangem Kochen kann man sie fast unverändert wieder erhalten. Ebenso erfolglos erweist sich der Versuch, die Säuren mit übermangansaurem Kali höher zu oxydiren.

Aus der Behandlung mit Natriumamalgam gehen gleichfalls beide Säuren unverändert wieder hervor.

Ueber die Entstehung der Camphoronsäure habe ich mir vollständige Gewissheit verschafft. Sie ist ein Oxydationsproduct der Camphersäure, und bildet sich immer, wenn diese mit Salpetersäure so lange gekocht wird, bis beim Auskühlen keine Camphersäure mehr auskrystallisirt. Beim Eindampfen der

Flüssigkeit erhält man stets einen sauren Syrup, der alle Eigenschaften der Schwanert'schen Camphresinsäure besitzt.

Es ist sehr leicht, die Camphoronsäure durch das Barytsalz aus dieser amorphen Masse zu isoliren. Die Existenz der Camphresinsäure wurde durch dieses Verhalten der Camphersäure schon sehr zweifelhaft.

In der That gelang es auch alle jene Säuren, die nach Schwanert's Vorschrift hätten reine Camphresinsäure sein sollen, in Camphoronsäure und Camphersäure zu zerlegen. Die Trennung der Camphoronsäure aus solchen Gemischen ist bei der ersten Operation (Erhitzen der mit Ammoniak abgesättigten Säurelösung mit Chlorbaryum) nicht ganz quantitativ, da, wie schon erwähnt, das Barytsalz der Camphoronsäure in dem, sich gleichzeitig bildenden Chlorammonium ziemlich löslich ist. Säuert man die von dem Barytsalz abgelaufene Flüssigkeit mit Schwefelsäure an, filtrirt und schüttelt mit Äther aus, so hinterlässt derselbe beim Verdunsten einen syrupösen, camphresinsäureartigen Rückstand, der manchmal schon bei längerem Stehen, meistens aber erst nach dem Verdünnen mit etwas Wasser Krystalle von Camphersäure ansetzt.

Wiederholt man mit den Mutterlaugen die Behandlung mit Ammoniak und Chlorbaryum, so erhält man wieder neue Mengen von camphoronsaurem Baryt.

Daraus erklärt sich auch, dass Schwanert's Camphresinsäure bei der trockenen Destillation stets Camphersäureanhydrid lieferte.

Schwanert nimmt vielleicht selbst Veranlassung, mit Berücksichtigung dieser Erfahrungen die Untersuchung seiner Pyro- und Metacamphresinsäure wieder aufzunehmen.

Dass die krystallisirte Säure von Blumenau [1] ebenfalls nur ein Gemisch war, in welchem sich Camphoronsäure befand, scheint kaum zweifelhaft.

Die Camphoronsäure und die Oxycamphoronsäure schalten sich in die Reihe der Campherabkömmlinge mit 9 Atomen Kohlenstoff in folgender Weise ein:

---

[1] Vergl. Schwanert, Annal. Chem. Pharm. CXXVIII. 103.

C_9H_{18} (aus Camphersäure und Jodwasserstoff) [1],
C_9H_{16} Campholen,
C_9H_{16} (aus Campher und Jodwasserstoff) [2],
$C_9H_{14}O$ Phoron,
$C_9H_{14}O$ Camphren,
C_9H_{12} (aus Camphren und Phosphorsäureanhydrid) [3],
$C_9H_{12}O_5$ Camphoronsäure,
$C_9H_{12}O_6$ Oxycamphoronsäure,
$C_9H_8O_4$ Camphrensäure,
$C_9H_8O_4$ Uvitinsäure.

Demnächst gedenke ich die, für das Verständniss des Camphers so wichtige Camphinsäure Berthelot's näher zu untersuchen als bisher geschehen ist.

Wien, Laboratorium des Prof. Hlasiwetz.

---

[1] Weyl, Berl. Ber. 1868. 94.
[2] Weyl, ebendaselbst.
[3] Schwanert, Annal. Chem. Pharm. CXXXIII. 305.

Über die Bahn des ersten Kometen vom Jahre 1870.

Von August Seydler,

Assistent der k. k. Sternwarte zu Prag.

Der erste Komet des Jahres 1870 wurde am 29. Mai gleichzeitig von Winnecke in Karlsruhe und von Tempel in Marseille entdeckt, und blieb bis zum 9. Juli sichtbar. Bald nach seiner Entdeckung wurden seine Elemente abgeleitet, und zwar von Dr. E. Becker, von H. Oppenheim und von A. Winnecke (Astr. Nachr., Nr. 1806 und 1807). Da jedoch alle drei Rechnungen auf Beobachtungen beruhen, die in den Zeitraum einer Woche fallen (29 Mai—6. Juni), so zog ich es vor, eine vorläufige Bestimmung der Elemente selbst vorzunehmen, mit Zugrundelegung von Beobachtungen, die sich über den ganzen Zeitraum der Sichtbarkeit vertheilten. Nachdem ich also alle Beobachtungen, die in den Astr. Nachr. bis jetzt veröffentlicht worden sind — im Ganzen 74 — gesammelt, bildete ich folgende drei Orte:

		AR.	Decl.
Mai	30·56477	12°31′27″70	+28°52′56″27
Juni	19·55130	19 48 34·80	+21 10 45·66
Juli	9·58255	38 21 54·14	— 6 16 46·55

Der erste Ort ist das Mittel aus drei Beobachtungen, die an demselben Tage zu Leipzig, Wien und Karlsruhe angestellt wurden, zum zweiten Orte wurden gleichfalls drei Beobachtungen, zwei zu Hamburg und eine zu Athen benützt; der letzte Ort endlich ist das Mittel aus zwei zu Athen angestellten Beobachtungen.

Durch den ersten und letzten Ort wurde nun nach der Olbers'schen Methode eine Parabel hindurchgelegt; die Vergleichung des mittleren Ortes mit der Rechnung ergab jedoch eine bedeutende Abweichung, nämlich +67″04 in Länge und —183″35 in Breite. Es wurde daher eine Verbesserung der

Elemente vorgenommen und dabei die in der Abhandlung von Olbers, §. 76 S. 62 der zweiten (von Encke besorgten) Auflage entwickelte Methode in Anwendung gebracht, welche jetzt von den rechnenden Astronomen fast gänzlich, und wie ich mich überzeugte, mit einigem Recht verlassen worden ist[1]. Es ergaben sich auf diesem Wege schliesslich folgende Elemente der (genäherten) Kometenbahn:

Perihelzeit: 1870, Juli 14·11103 mittl. Berliner Zeit.

Länge des Perihels	339°57′50″40	Mittlere
Länge des Knotens	141 45 18·53	Äquin.
Neigung	121 47 16·09	1870·0
Log. der Periheldistanz	0·0037827.	

Der mittlere Ort wich von der Rechnung um +6″35 in Länge und —5″84 in Breite ab.

Nach diesen Elementen wurde die folgende Ephemeride berechnet, welche sich über die ganze Dauer der Sichtbarkeit erstreckte und mit der die sämmtlichen Beobachtungen verglichen wurden.

Ephemeride des Kometen.

1870	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. der Entfernung von der Erde
Mai ... 29·5	12°12′56″3	+29° 8′13″5	0·22233
„ ... 31·5	12 48 7·1	28 39 1·8	0·20866
Juni ... 2·5	13 24 15·7	28 7 37·7	0·19424
„ ... 4·5	14 1 33·1	27 33 43·4	0·17903
„ ... 6·5	14 40 12·2	26 56 58·1	0·16297
„ ... 8·5	15 20 28·3	26 16 58·1	0·14601
„ ... 10·5	16 2 39·4	25 33 14·9	0·12807
„ ... 12·5	16 47 6·8	24 45 15·2	0·10908
„ ... 14·5	17 34 15·4	23 52 18·8	0·08897
„ ... 16·5	18 24 35·1	22 53 37·5	0·06765
„ ... 18·5	19 18 41·1	21 48 12·3	0·04501

[1] In den citirten §. der Olbers'schen Abhandlung hat sich ein Fehler eingeschlichen. Statt $\tang \lambda = \frac{\tang \beta \sin(A-\alpha)}{\sin \varepsilon}$ soll es nämlich heissen: $\operatorname{tg} \lambda = \frac{\operatorname{tg} \beta \sin \varepsilon}{\sin(A-\alpha)}$.

1870	Scheinbare		Log. der Entfernung von der Erde
	Rectascension	Declination	
Juni ... 20·5	20°17'15"8	20°34'50"8	0·02097
„ ... 22·5	21 21 11·1	19 12 3·4	9·99541
„ ... 24·5	22 31 30·0	17 37 58·5	9·96823
„ ... 26·5	23 49 30·7	15 50 16·1	9·93935
„ ... 28·5	25 16 51·5	13 46 1·4	9·90868
„ ... 30·5	26 55 36·3	11 21 34·0	9·87621
Juli ... 2·5	28 48 23·3	8 32 19·9	9·84201
„ ... 4·5	30 58 37·4	5 12 43·6	9·80627
„ ... 6·5	33 30 45·4	+1 16 11·8	9·76950
„ ... 8·5	36 30 36·8	—3 24 22·5	9·73256
„ ... 10·5	40 5 50·8	—8 55 19·9	0·69695

Die folgende Uebersicht enthält nun die Vergleichung der Ephemeride mit den Beobachtungen, wobei jedoch 5 Beobachtungen vorläufig weggelassen wurden, weil die Position des Vergleichsternes entweder gar nicht oder nur sehr ungenau bekannt war: es sind dies 2 Beobachtungen zu Karlsruhe vom 29. Mai, 1 zu Hamburg vom 22. Juni, 1 zu Kremsmünster am 23. Juni und 1 zu Athen am 25. Juni.

Nr.	1870	Beobachtungsort	Beob.-Rechnung	
			$d\alpha$ (Rectasc.)	$d\delta$ (Decl.)
1.	Mai 30.	Leipzig	— 6"57	+ 0"91
2.	„ 30.	Wien	— 4·69	+ 6·45
3.	„ 30.	Karlsruhe	+11·55	— 6·44
4.	Juni 2.	„	— 4·12	+ 0·45
5.	„ 3.	Berlin	— 7·66	+ 2·04
6.	„ 3.	Leiden............	—17·35	— 0·05
7.	„ 3.	„	— 7·07	— 0·46
8.	„ 5.	Berlin	— 0·84	— 8·66
9.	„ 5.	Leiden............	— 9·21	— 0·09
10.	„ 6.	Berlin	—18·07	— 2·28
11.	„ 6.	Leiden............	. . .	+ 0·36
12.	„ 6.	Hamburg	— 4·37	— 8·65
13.	„ 6.	„	—13·93	. . .
14.	„ 6.	Leiden............	—20·73	. . .

Nr.	1870		Beobachtungsort	Beobachtung — Rechnung	
				$d\alpha$ (Rectasc.)	$d\delta$ (Decl.)
15.	Juni	7.	Berlin	— 9ʺ56	+ 4ʺ77
16.	„	8.	Hamburg	—10·27	. . .
17.	„	8.	Leiden	—18·56	. . .
18.	„	8	„	. . .	+ 4·51
19.	„	10.	„	. . .	—23·14
20.	„	10.	„	—20·92	. . .
21.	„	12.	Hamburg	—25·25	. . .
22.	„	12.	„	. . .	— 3·61
23.	„	12.	„	— 9·61	. . .
24.	„	12.	„	. . .	+ 4·89
25.	„	13.	Leiden	. . .	+ 2·10
26.	„	13.	Kremsmünster	—17·23	— 1·32
27.	„	13.	Leiden	—17·62	. . .
28.	„	14.	Leipzig	+ 5·09	+ 5·54
29.	„	14.	Leiden	. . .	+13·18
30.	„	14.	„	—20·83	. . .
31.	„	15.	Leipzig	— 6·76	+ 4·21
32.	„	15.	Hamburg	—15·66	. . .
33.	„	15.	„	. . .	+ 1·65
34.	„	15.	„	— 8·98	. . .
35.	„	15.	„	. . .	+ 6·69
36.	„	15.	Leiden	. . .	+ 7·83
37.	„	15.	Kremsmünster	+16·97	(133·37)
38.	„	15.	Leiden	—13·78	. . .
39.	„	16.	Leipzig	— 4·45	+11·94
40.	„	16.	Leiden	. . .	+ 6·97
41.	„	16.	Kremsmünster	— 7·98	+ 1·21
42.	„	16.	Leiden	—12·88	. . .
43.	„	18.	Leipzig	—32·11	— 8·53
44.	„	19.	Athen	+ 1·55	+29·54
45.	„	19.	Hamburg	—13·95	+ 5·24
46.	„	19.	„	—12·73	+ 8·95
47.	„	20.	Leiden	. . .	—30·19
48.	„	20.	„	—58·74	. . .
49.	„	21.	Leipzig	— 4·80	+ 7·73
50.	„	22.	„	— 2·27	+31·33
51.	„	25.	Athen	+ 0·61	—35·35
52.	„	28.	Palermo	—10·91	— 9·28
53.	„	29.	Athen	— 0·98	+28·54
54.	„	29.	Palermo	— 9·72	+14·36

Nr.	1870	Beobachtungsort	Beobachtung — Rechnung	
			$d\alpha$ (Rect.)	$d\delta$ (Decl.)
55.	Juni 30.	Palermo	—14ʹ49	+22ʹ98
56.	Juli 1.	„	—28·21	+ 4·22
57.	„ 2.	Athen	— 2·82	— 3·16
58.	„ 2.	„	—10·29	. . .
59.	„ 2.	Palermo	—18·49	+ 4·34
60.	„ 5.	Kremsmünster	—31·12	+16·48
61.	„ 5.	Palermo	—11·15	+53·68
62.	„ 5.	„	—11·83	+12·37
63.	„ 6.	Athen	— 4·82	+ 7·86
64.	„ 6.	Bologna	—18·60	+ 7·83
65.	„ 7.	Athen	—15·35	—15·06
66.	„ 7.	Bologna	— 2·15	+37·09
67.	„ 8.	„	+17·96	+14·72
68.	„ 9.	Athen	— 0·41	+13·96
69.	„ 9.	„	— 5·28	+ 0·56

Nr. 37. Kremsmünster, Juni 15. zeigt eine sehr grosse Abweichung in Declination; bei der Bildung der Normal-Orte wurde sie daher nicht berücksichtigt. Noch sei zu bemerken, dass in der Mittheilung der Beobachtung Nr. 62. Palermo, Juli 5. als Beobachtungszeit angegeben war $14^h 22^m 4^s 0$, während alle Umstände darauf hinweisen, dass es da heissen soll: $15^h 22^m 4^s 0$, welche Zeit daher bei der Vergleichung der Beobachtung mit der Ephemeride ohne weiters angenommen wurde.

Die angeführten Abweichungen wurden nun in sieben Gruppen abgetheilt und aus ihnen, sowie aus den zugehörigen Zeiten, folgende Mittel erhalten:

			(B—R) $d\alpha$	(B—R) $d\delta$
Nr. 1— 9 . . .	I.	Juni 2·5	— 5ʹ11	— 0ʹ65
„ 10—23 . . .	II.	„ 8·5	—15·03	— 4·01
„ 24—33 . . .	III.	„ 14·5	—12·17	+ 4·32
„ 34—43 . . .	IV.	„ 16·5	— 9·03	+ 4·35
„ 44—52 . . .	V.	„ 22·5	—12·65	+ 1·00
„ 53—62 . . .	VI.	Juli 2·5	—13·91	+17·09
„ 63—69 . . .	VII.	„ 8·5	— 4·09	+ 9·57

Eigentlich weichen die Zeitmittel ein wenig von den hier angegebenen ab; dieser Unterschied ist so gering (0·1—0·2), dass er füglich vernachlässigt werden kann. Bringt man nun die $d\alpha$ und $d\delta$ an die der Ephemeride entnommenen Rectascensionen und Declinationen an, so erhält man folgende Normalorte, die sich auf das mittlere Äquinoctium 1870·0 beziehen:

	Rectascension	Declination
I.	13°24′ 4ˢ62	+28° 7′36″29
II.	15 20 6·46	+26 15 53·03
III.	17 33 55·60	+23 52 21·88
IV.	18 24 18·18	+22 53 40·48
V.	21 20 49·88	+19 12 2·87
VI.	28 48 0·12	+ 8 32 35·44
VII.	36 30 23·55	— 3 24 14·18

Um auf Grundlage der obigen Abweichungen ($d\alpha$ und $d\delta$) die Elemente zu verbessern, wurden die bekannten Differentialformeln für $d\alpha$ und $d\delta$ verwendet, wobei jedoch, da es nicht nöthig schien, die Parabel zu verlassen, alle auf die Excentricität bezüglichen Glieder wegfielen. Auf diesem Wege ergaben sich folgende vierzehn Gleichungen:

$$+0·1685\,(dT)-1·2749\,(dq)-0·3171\,d\pi+0·3174\,di+0·9202\,d\Omega+5·11=0$$

$$+0·0161\,(dT)-1·3477\,(dq)-0·2699\,d\pi+0·2674\,di+0·8797\,d\Omega+15·03=0$$

$$-0·2103\,(dT)-1·4539\,(dq)-0·2058\,d\pi+0·2101\,di+0·8167\,d\Omega+12·17=0$$

$$-0·3089\,(dT)-1·5004\,(dq)-0·1792\,d\pi+0·1890\,di+0·7883\,d\Omega+9·03=0$$

$$-0·7068\,(dT)-1·6905\,(dq)-0·0765\,d\pi+0·1179\,di+0·6685\,d\Omega+12·65=0$$

$$-1·9875\,(dT)-2·3180\,(dq)+0·2366\,d\pi-0·0297\,di+0·2318\,d\Omega+13·91=0$$

$$-3·5587\,(dT)-3·0799\,(dq)+0·6139\,d\pi-0·1192\,di-0·3912\,d\Omega-4·09=0$$

$$+2\cdot1280\,(dT)-1\cdot4468\,(dq)-0\cdot6660\,d\pi-0\cdot2160\,di+0\cdot7203\,d\Omega+0\cdot65=0$$
$$+2\cdot4285\,(dT)-1\cdot5147\,(dq)-0\cdot7100\,d\pi-0\cdot1893\,di+0\cdot7530\,d\Omega+4\cdot01=0$$
$$+2\cdot8431\,(dT)-1\cdot6030\,(dq)-0\cdot7751\,d\pi-0\cdot1545\,di+0\cdot8140\,d\Omega-4\cdot32=0$$
$$+3\cdot0177\,(dT)-1\cdot6380\,(dq)-0\cdot8088\,d\pi-0\cdot1406\,di+0\cdot8439\,d\Omega-4\cdot35=0$$
$$+3\cdot7057\,(dT)-1\cdot7636\,(dq)-0\cdot9190\,d\pi-0\cdot0902\,di+0\cdot9811\,d\Omega-1\cdot00=0$$
$$+5\cdot8353\,(dT)-2\cdot0441\,(dq)-1\cdot2941\,d\pi+0\cdot0215\,di+1\cdot5456\,d\Omega-17\cdot09=0$$
$$+8\cdot0570\,(dT)-2\cdot2050\,(dq)-1\cdot6920\,d\pi+0\cdot0558\,di+2\cdot3278\,d\Omega-9\cdot57=0$$

Hier ist $(dT)=1000\,dT$, $(dq)=100000\,dq$ und $dT, dq, d\pi$ $di, d\Omega$ bedeuten die Verbesserungen der Elemente. Die Methode der kleinsten Quadrate führt zu folgenden fünf Gleichungen:

$$+157\cdot594\,(dT)-35\cdot191\,(dq)-34\cdot935\,d\pi-1\cdot187\,di+39\cdot845\,d\Omega-250\cdot212=0$$
$$-35\cdot191\,(dT)+47\cdot314\,(dq)+11\cdot629\,d\pi-0\cdot048\,di-20\cdot083\,d\Omega-59\cdot402=0$$
$$-34\cdot935\,(dT)+11\cdot629\,(dq)+8\cdot271\,d\pi+0\cdot133\,di-10\cdot243\,d\Omega+37\cdot848=0$$
$$-1\cdot187\,(dT)-0\cdot048\,(dq)+0\cdot133\,d\pi+0\cdot419\,di+0\cdot499\,d\Omega+10\cdot064=0$$
$$+39\cdot845\,(dT)-20\cdot083\,(dq)-10\cdot243\,d\pi+0\cdot499\,di+14\cdot793\,d\Omega-8\cdot309=0$$

Aus der Auflösung dieser Gleichungen ergeben sich folgende Correctionen der Elemente:

$$dT=\ \ 0\cdot008368$$
$$dq=-0\cdot0000557$$
$$d\pi=-0''59$$
$$di=+36\cdot33$$
$$d\Omega=-31\cdot17$$

Die übrigbleibenden Fehler in den Normalorten sind:

		(R—B) $d\alpha$	(R—B) $d\delta$
Nr.	I	—3ˢ34	—3ˢ39
„	II	+5·12	+2·84
„	III	+0·80	—2·13
„	IV	—2·80	—0·91
„	V	—0·36	+6·52
„	VI	+1·74	—3·51
„	VII	—1·03	+0·60

Es ergibt sich also als die wahrscheinlichste Bahn die folgende Parabel:

Perihelzeit: 1870, Juli 14·11940, mittl. Berliner Zeit:

Länge des Perihels	339°57′49ˢ81	Ekliptik und
Länge des Knotens	141 44 47·36	mittl. Aeq.
Neigung	121 47 52·42	1870·0
Log. der Periheldistanz . .	0·0037585.	

XIX. SITZUNG VOM 13. JULI 1871.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Über die Entstehung und Eigenschaften der Monochlorcitramalsäure", vom Herrn Prof. Dr. J. Gottlieb in Graz.

„Über die Energiedifferenz des phosphorsauren Natrons bei verschiedenem Gehalte an Krystallwasser", von dem c. M. Herrn Prof. Dr. L. Pfaundler in Innsbruck.

„Der anatomische Bau der Tasthaare", vom Herrn *Med. stud.* M. J. Dietl, Assistenten am physiologischen Institute der Universität zu Innsbruck.

Herr Custos Dr. A. Schrauf übersendet eine für den „Anzeiger" bestimmte Notiz über die Chondrodit-Krystalle von Nyakopperberget in Schweden.

Herr Director Dr. J. Stefan überreicht eine Abhandlung: „Über die Gesetze der elektrodynamischen Induction".

Herr Prof. Dr. H. Hlasiwetz legt „Mittheilungen aus dem chemischen Laboratorium der Universität Innsbruck" vor, und zwar: 11. „Über Disulfobenzoësäure und eine neue Dioxybenzoësäure", von den Herren L. Barth und K. Senhofer. 12. „Über Bimethyl- und Biäthylprotokatechusäure", vom Herrn Rud. Koelle. 13. „Über die Umwandlung der Oxybenzoësäure in Protocatechusäure und die Constitution der letzteren", vom Herrn L. Barth.

Herr Prof. Hlasiwetz überreicht ferner den ersten Theil einer, von ihm in Gemeinschaft mit Herrn J. Habermann ausgeführten grösseren Untersuchung über die Proteïnstoffe.

Herr Dr. S. Schenk überreicht eine Abhandlung: „Über die erste Anlage der Allantois", vom Herrn Dr. Peter v. Dobrynin aus St. Petersburg.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

American Journal of Science and Arts. Second Series. Vol. L. Nrs. 148—150. 1870. Third Series. Vol. I. Nrs. 1—6. 1871. New Haven; 8°.

Annalen der k. Sternwarte bei München. XVIII. Band, nebst XI. Supplementband. München, 1871; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 9. Jahrgang, Nr. 20. Wien, 1871; 8°.

Beobachtungen, Schweizerische Meteorologische. März, April, Mai 1870. Zürich; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXII, Nrs. 9, 13—22. Paris, 1871; 4°.

Gesellschaft, österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VI. Band, Nr. 13. Wien, 1871; 4°.

Landbote, Der steirische. 4. Jahrgang, Nr. 14. Graz, 1871; 4°.

Lotos. XXI. Jahrgang. Juni 1871. Prag; 8°.

Mittheilungen des k. k. technischen und administrativen Militär-Comité. Jahrgang 1871, 7. Heft. Wien; 8°.

Nature. Nr. 88, Vol. IV. London, 1871; 4°.

Osservatorio dell' R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri, Vol. V. Nr. 10. Torino, 1871; 4°.

Peabody Institute: IVth Annual Report. Baltimore, 1871; 8°.

Sella, Quintino, Sulle condizioni dell' industria mineraria nell' isola di Sardegna. Relazione alla commissione parlamentare d'inchiesta. Firenze, 1871; 4° & Querfolio.

Wiener Mediz. Wochenschrift. XXI. Jahrgang, Nr. 27. Wien 1871; 4°.

Mittheilungen aus dem chemischen Laboratorium der Universität Innsbruck.

11. Über Disulfobenzoësäure und eine neue Dioxybenzoësäure.

Von **L. Barth** und **C. Senhofer.**

Aus der Benzoësäure hatte man bisher nur eine Monosulfosäure dargestellt. Mehrere Gründe liessen es uns interessant erscheinen, die Gruppe SHO_3 zweimal in das Molekül der Benzoësäure einzuführen. Nach mehrfachen vergeblichen Versuchen ist uns dies gelungen und zwar fanden wir in der wasserfreien Phosphorsäure ein Mittel diesen Zweck zu erreichen, wenn man sie mit Vitriolöl, besser noch mit den zum Theil krystallisirenden erstübergehenden Antheilen, die bei der Destillation des Vitriolöls erhalten werden, gemischt unter erhöhtem Drucke auf Benzoësäure wirken lässt.

Das Verfahren, dessen wir uns zur Darstellung der Disulfobenzoësäure bedienten, ist kurz folgendes.

Etwa 10 Grm. Benzoësäure wurden mit circa 20 Grm. Vitriolöl erwärmt, nach dem Erkalten mit etwa 15 Grm. wasserfreier Phosphorsäure und 15—20 Grm. des oben erwähnten breiigen Destillats aus Vitriolöl in starke Glasröhren eingeschlossen und im Luftbade durch 3—4 Stunden auf 250° erhitzt. Nach dem Auskühlen zeigte sich in den Röhren beim Öffnen nur ein geringer Druck und war der Geruch nach schwefliger Säure bemerkbar. Die Masse in den Röhren war homogen, braungefärbt und dickflüssig. Sie wurde in Wasser gegossen und die wässrige Lösung mit Baryumcarbonat erhitzt. Vom kohlensauern und schwefelsauern Baryt filtrirt, zeigte das eingeengte Filtrat nach dem Versetzen mit Salzsäure bald krystallinische Ausscheidungen

eines Barytsalzes, die unter dem Mikroskope als büschelförmig vereinigte Nadeln erschienen[1]. Die darüber stehende Lösung schied beim Eindampfen noch mehrmals dasselbe Salz aus, schliesslich bleibt in den Mutterlaugen Chlorbaryum.

Das Salz entspricht lufttrocken der Formel

$$(\mathrm{C_7H_4S_2BaO_8+2H_2O}) = \left(\mathrm{C_6H_3}\begin{cases}\mathrm{COOH} \\ \mathrm{S\ O_3} \\ \quad \mathrm{Ba} \\ \mathrm{S\ O_3}\end{cases} + \mathrm{2H_2O}\right).$$

Es verlor bei 160° getrocknet 7·84 Proc. Wasser. Für obige Formel berechnen sich 7·94 Proc.

Das getrocknete Salz gab bei der Analyse folgende Percentgehalte:

	Gefunden	Berechnet
C....	19·8	20·1
H....	1·3	0·9
Ba...	32·5—32·8	32·9
S....	15·4	15·3
O....	—	30·7.

Zur Darstellung der freien Säure, sowie der übrigen Salze, wurde aus dem sauern Barytsalze zuerst durch Kochen mit Baryumcarbonat das neutrale Barytzalz dargestellt. Dieses krystallisirt in kleinen, gut ausgebildeten Prismen, hat lufttrocken die Formel $(2(\mathrm{C_7H_3S_2O_8})\mathrm{Ba_3}+7\,\mathrm{H_2O})$. Es verliert sein Krystallwasser bei 160°.

	Gefunden	Berechnet
$\mathrm{H_2O}$	—11·3	11·5.

Das lufttockene Salz enthielt:

	Gefunden	Berechnet
Ba....	41·5—41·6	42·4.

Fällt man die Lösung des neutralen Barytsalzes durch ammoniakalische Bleizuckerlösung, so erhält man einen voluminösen

---

[1] Es ist vortheilhaft, durch Salzsäurezugabe ein saures Salz zu erzeugen, das sich durch seine Schwerlöslichkeit sehr gut zur Reindarstellung der Säure verwenden lässt.

weissen Niederschlag, der durch Schwefelwasserstoff zersetzt, die freie Säure liefert. Da aber das Bleisalz nicht unlöslich in Wasser ist, erscheint es vortheilhafter, das Barytsalz durch Schwefelsäure genau zu zersetzen, vom schwefelsauern Baryt zu filtriren und das Filtrat einzudampfen. Man erhält nach dem Verjagen des Wassers eine weisse krystallinische Masse, die noch aschenhältig war und deshalb in absolutem Alkohol aufgenommen wurde, wobei ein geringer Rückstand ungelöst hinterblieb. Der Alkohol wurde verjagt, die zurückgebliebene Säure in Wasser aufgenommen und im Vacuum über Schwefelsäure stehen gelassen.

Man erhielt eine äusserst hygroskopische weisse Krystallmasse, die unter dem Mikroskope nadelförmige Prismen zeigt [1]. Der Wassergehalt der Säure lässt sich nicht bestimmen. Bei 130° getrocknet, wobei sie schon anfängt bräunlich zu werden, hält sie noch ein Molekül Wasser zurück. Die Analyse ergab:

	Gefunden	$C_6H_3\begin{cases}COOH\\ SHO_3\\ SHO_3\end{cases}+H_2O$
C....	27·8	28·0
H....	3·2	2·7
S....	21·5	21·3.

Bei 140° getrocknet wird die Substanz ganz braun und entspricht dann annähernd der Formel

$$C_6H_3\begin{cases}COOH\\ SHO_3\\ SHO_3\end{cases}$$

	Gefunden	Berechnet
C....	29·2	29·8
H....	2·9	2·1
S....	—	22·7.

[1] Diese freie Sulfosäure wird manchmal in zolllangen platten Nadeln erhalten, wenn man den Inhalt der Röhren, in denen sie ursprünglich dargestellt wurde, mit wenig Wasser vermischt in offenen Gefässen längere Zeit stehen lässt. Von der Schwefelsäure durch Pressen möglichst befreit, ist sie ebenso zerfliesslich, wie die aus dem Barytsalz dargestellte Säure.

Kupfersalz. Kocht man die wässerige Lösung der freien Säure mit Kupferhydroxyd, filtrirt und dampft ein, so erhält man eine krystallinische aus mikroskopischen, feinen Nädelchen bestehende Masse, hellgrün gefärbt, in Wasser leicht löslich. Das Salz hat lufttrocken die Formel

$$2(C_7H_3S_2O_8)Cu_3 + 8\tfrac{1}{2}H_2O$$

und verliert sein Krystallwasser bei 130°.

	Gefunden	Berechnet
H_2O....	16·9	16·98.

Die getrocknete Substanz enthielt:

	Gefunden	Berechnet
Cu....	25·6	25·4.

Silbersalz. Es wird dargestellt, indem man die freie Säure in Ammoniak löst, den Ueberschuss des Ammoniaks im Wasserbade verjagt und die so entstandene Lösung des neutralen Ammonsalzes mit Fluorsilber fällt.

Weisser krystallinischer Niederschlag, vom Lichte nicht schnell geschwärzt. Er hat lufttrocken die Formel

$$C_7H_3Ag_3S_2O_8 + 2H_2O$$

und verliert sein Krystallwasser bei 130°.

	Gefunden	Berechnet
H_2O....	5·6	5·6.

Die bei 130° getrocknete Substanz enthielt:

	Gefunden	Berechnet
Ag....	53·65	53·73.

Cadmiumsalz. Erhalten durch Kochen der freien Säure mit kohlensaurem Cadmium, Filtriren und Einengen des Filtrats, stellt eine sehr lösliche weisse krystallinische Masse dar, deren Cadmiumgehalt etwas kleiner, als dem neutralen Salze entspricht, gefunden wurde, wahrscheinlich wegen geringer Beimischung von etwas saurem Salze.

Natronsalz. Durch sorgfältiges Neutralisiren der freien Säure mit Soda. Grosse dicke wohlausgebildete Prismen, sehr löslich in Wasser.

Kalisalz. Wie das Natronsalz dargestellt. Farblose, feine, weiche Nadeln, die lufttrocken der Formel

$$C_7H_3K_3S_2O_8 + 1\tfrac{1}{2}H_2O$$

entsprechen. Sie verlieren ihr Krystallwasser bei 130°.

	Gefunden	Berechnet
H_2O....	6·7	6·4.

Die trockene Substanz enthielt

	Gefunden	Berechnet
K....	28·9	29·5.

Erhitzt man das Kalisalz der eben beschriebenen Sulfosäure mit überschüssigem Kalihydrat, so färbt sich die Masse röthlich, dann bei stärkerem Erhitzen grünlich, endlich wieder röthlich, es tritt Wasserstoff-Entwicklung ein und in diesem Stadium unterbricht man den Process. Beim Ansäuern mit Schwefelsäure entweichen Ströme von schwefliger Säure, und Äther nimmt aus der sauren Flüssigkeit eine neure Säure auf, die nach den Abdestilliren des Lösungsmittels in dicken Krusten hinterbleibt und nach mehrmaligem Umkrystallisiren zolllange massive Prismen, oder lange dünne, concentrisch gruppirte Nadeln zeigt, die in kaltem Wasser ziemlich, in heissem sehr leicht löslich sind, sich auch sehr leicht in Alkohol und Äther auflösen. Die neue Säure, von der man fast genau die von der Theorie verlangte Menge erhält, hat die Formel der Protokatechusäure, unterscheidet sich aber scharf von dieser durch ihre Krystallform, den Krystallwassergehalt, den Mangel einer Farbenreaction mit Eisenchlorid, und dadurch, dass sie von Bleizuckerlösung nicht gefällt wird. Ihr Geschmack ist rein sauer. Sie schmilzt erst oberhalb 220°, doch ist ihr Schmelzpunkt nicht genau zu bestimmen. Dabei sublimirt ein Theil, ein Theil zersetzt sich. Wir nennen diese neue Säure **Dioxybenzoësäure** [1]. Eine charakteristische Reaction zeigt sie gegen Schwefelsäure. Erwärmt man eine Probe mit

[1] In einer frühern Abhandlung hat der Eine von uns die aus Sulfoxybenzoësäure entstehende Säure Dioxybenzoësäure genannt. Damit war damals nur eine generelle Bezeichnung gemeint. Da sich die damals erhaltene Dioxysäure als identisch mit Protokatechusäure erwies, so blieb für dieselbe selbstverständlich der ältere Name.

concentrirter Schwefelsäure, so löst sie sich mit tief rother Farbe darin auf und auf Wasserzusatz fällt ein schön grünes, undeutlich krystallinisches Pulver heraus. Wir werden später noch auf dieses Product zurückkommen.

Die Säure krystallisirt mit Krystallwasser und zwar entspricht sie lufttrocken der Formel

$$C_7H_6O_4 + 1\tfrac{1}{2}H_2O$$

Bei 100—105° getrocknet ergab sie

	Berechnet	Gefunden
H_2O....	14·9	15·1—14·8.

Beim längern Liegen an trockener Luft verliert sie übrigens leicht einen Theil ihres Krystallwassers.

Die getrocknete Säure gab bei der Verbrennung:

	$C_7H_6O_4$	Gefunden
C....	54·5	54·7—54·6—54·6
H....	3·9	4·1— 3·9— 4·1.

Zur Controle der obigen Formel wurden folgende Salze dargestellt und analysirt.

Silbersalz. Man sättigt die freie Säure mit Ammoniak, verdunstet den etwaigen Ueberschuss des Ammoniaks und fällt mit Silbernitrat. Es fällt ein weisser krystallinischer Niederschlag heraus, der am Lichte dunkel wird und unter dem Mikroskope kleine Täfelchen zeigt. In Wasser ist er nicht unlöslich, das lufttrockene Salz entspricht der Formel

$$C_7H_5AgO_4 + H_2O.$$

Es verliert bei 105° getrocknet sein Krystallwasser

	Berechnet	Gefunden
H_2O....	6·5	6·6—6·8,

das trockene Salz gab analysirt folgende Zahlen:

	$C_7H_5AgO_4$	Gefunden
C....	32·2	32·2
H....	1·9	1·9
Ag...	41·4	41·4—41·4.

Kupfersalz. Vermischt man die concentrirte wässrige Lösung des Ammoniaksalzes mit Kupfervitriollösung, so nimmt die

Flüssigkeit eine grünliche Farbe an und bald beginnt eine Ausscheidung von kleinen, unter sich verwachsenen blaugrünen Nädelchen, die in Wasser ziemlich löslich sind.

Das lufttrockene Salz enthält $6^1/_2$ Moleküle Krystallwasser, das bei 105° entweicht.

$(C_{14}H_{10}CuO_8+6\frac{1}{2}H_2O)$	Gefunden
H_2O.... 24·1	24·2,

das wasserfreie Salz enthielt:

$C_{14}H_{10}CuO_8$	Gefunden
Cu.... 17·18	17·04.

Cadmiumsalz. Die freie Säure, mit kohlensaurem Cadmium abgesättigt, lässt beim Concentriren farblose, mikroskopische, verfilzte Nadeln anschiessen, die beim Umkrystallisiren deutlicher, etwa 1—2‴ lang werden. Das lufttrockene Salz enthält $4^1/_2$ Moleküle Krystallwasser, die bei 105° entweichen.

$C_{14}H_{10}CdO_8+4\frac{1}{2}H_2O$	Gefunden
H_2O.... 16·2	16·4.

Das getrocknete Salz zeigt einen Cadmiumgehalt:

$C_{14}H_{10}CdO_8$	Gefunden
Cd.... 26·8	26·1.

Barytsalz. Durch Sättigen der freien Säure mit Baryumcarbonat erhalten, stellt warzige Aggregate dar, die unter dem Mikroskope die Formen von wahrscheinlich quadratischen Pyramiden zeigen. Es krystallisirt mit 4 Molekülen Krystallwasser, das bei 110° noch nicht vollständig entweicht.

$C_{14}H_{10}BaO_8+4H_2O$	Gefunden
$3H_2O$.... 10·5	11·1.

Eine Barytbestimmung des so getrockneten Salzes ergab:

$C_{14}H_{10}BaO_8+H_2O$	Gefunden
Ba.... 29·7	9·4.

Das Salz war bei der angeführten Temperatur schon etwas bräunlich geworden, daher ein weiteres Trocknen nicht zulässig erschien.

Natronsalz. Durch sorgfältiges Neutralisiren der freien Säure mit Soda, erhält man dasselbe nach dem Concentriren der wässrigen Lösung in hübschen büschelförmig vereinigten Nadeln.

Lufttrocken entspricht es der Formel

$$C_7H_5NaO_4 + 2\tfrac{1}{2}H_2O$$

das Krystallwasser entweicht bei 105°.

	Berechnet	Gefunden
H_2O....	20·36	20·39.

Eine Natronbestimmung des getrockneten Salzes ergab:

	$C_7H_5NaO_4$	Gefunden
Na....	13·07	13·39.

Ammoniaksalz. Durch Sättigen der freien Säure mit Ammoniak erhalten, krystallisirt in hübschen farblosen Nadeln. Es ist sehr löslich in Wasser.

Äthyläther. Löst man die freie Säure in Alkohol, leitet dann Salzsäuregas ein bis zur Sättigung und verdampft den Alkohol, so erhält man einen Syrup, der in Wasser gelöst alsbald in schönen, langen, glasglänzenden verwachsenen Prismen krystallisirt. Er schmilzt schon unter 100° und bleibt nach dem Auskühlen noch lange amorph, durchsichtig. Die Analyse ergab:

	$C_7H_5(C_2H_5)O_4$	Gefunden
C....	59·3	59·2
H....	5·5	5·4.

Basische Salze auf dem früher von dem Einen von uns bei der Protokatechusäure mit Erfolg eingeschlagenen Wege zu erzeugen gelang nicht.

Bromdioxybenzoësäure. Verreibt man die feine Säure mit überschüssigem Brom, so wird die Masse halbflüssig, es entweichen Ströme von Bromwasserstoff, und nach dem Verjagen des Brom im Wasserbade hinterbleibt eine gelblich gefärbte feste krystallinische Masse, die sich in heissem Wasser leicht löst und nach dem Umkrystallisiren in prachtvollen grossen, tafelförmigen Krystallen erscheint. Die Substanz krystallisirt ohne Krystallwasser, schmilzt bei 183° und ist in wesentlichen ein dreifach gebromtes Product. Eine Brombestimmung ergab:

$C_7H_3Br_3O_4$	Gefunden
Br.... 61·4	60·9.

Neben diesem Körper wird in geringer Menge immer eine weniger gebromte Säure erzeugt, die mit der erst krystallisirenden vermischt in den Mutterlaugen bleibt und wohl nur beim Arbeiten mit grossen Quantitäten rein erhalten werden kann. Der etwas zu niedrig gefundene Bromgehalt des analysirten Productes mag wohl auch von einer geringen Verunreinigung desselben mit dieser weniger gebromten Substanz herrühren.

Die Bildung einer neuen Säure aus Disulfobenzoësäure, ist deshalb von besonderem Interesse, weil die Wahrscheinlichkeit dagegen zu sprechen schien. Benzoësäure mit Vitriolöl oder wasserfreier Schwefelsäure allein behandelt, erzeugt vorzugsweise eine Monosulfosäure, in der die Stellung 1·3 angenommen werden muss, daneben nach Remsen auch in geringer Menge eine Sulfosäure 1·4. Man sollte nun glauben, dass wenn beide Schwefelsäurereste gleichzeitig eintreten, das Product 1·3·4 sein werde. Dem ist nun nicht so, da sonst aus Disulfobenzoësäure Protokatechusäure entstehen müsste. Zwei gleichzeitig eintretende Schwefelsäurereste lagern sich also anders als die Bildung der Monosulfosäuren 1·3 und 1·4 es erwarten liess und anders, als wenn sie nach einander eingeführt und der zuerst vorhandene früher durch Hydroxyl ersetzt war.

Um Aufschluss über die Stellung der Hydroxyle in der neuen Säure und damit auch über die Stellung der zwei Schwefelsäurereste in der Disulfobenzoësäure zu erhalten, wurde Dioxybenzoësäure für sich destillirt. Zuerst ging etwas Wasser fort. Dann folgte in geringen Mengen ein krystallinisches gelbgefärbtes Destillat, während sich ein scharf kratzender Geruch entwickelte. Die bei weitem grösste Menge der Substanz verkohlte in der Retorte. Das Destillat hält noch etwas unzersetzt sublimirte Dioxysäure zurück. Man behandelt mehrmals mit siedendem Wasser, das die Beimengungen löst, während der gelbe Körper im Rückstande bleibt. Dieser wird in Alkohol aufgenommen und gibt nach dem Verjagen desselben eine gelbe Masse, die unter

dem Mikroskope hübsche, grösstentheils gekreuzte Prismen von gelber Farbe zeigt. Die Substanz krystallisirt ohne Krystallwasser, schmilzt noch nicht bei 320°, sondern wird dabei nur dunkler. Sie löst sich in Schwefelsäure und Alkalien mit rother Farbe, und wird aus ersterer Lösung durch Wasser in grünlichgelben Flocken gefällt. Von Wasser wird sie nur spurenweise aufgenommen, auch von Alkohol nur sehr schwierig gelöst.

Die bei der Analyse erhaltenen Zahlen erlauben uns noch nicht, seine Formel mit einiger Sicherheit zu geben. Jedenfalls scheint er ein complexeres Molekül, als die Säure woraus er entsteht, zu besitzen und unter Wasseraustritt daraus sich zu bilden. Kohlensäure konnte als Spaltungsproduct bei der Destillation nicht nachgewiesen werden.

Die Ausbeute ist äusserst gering und wir müssen, um uns nur einigermassen Untersuchungsmateriale zu verschaffen, sehr grosse Quantitäten Dioxybenzoësäure in Arbeit nehmen.

Jedenfalls scheint es bemerkenswerth, dass die Dioxybenzoësäure bei der Destillation sich nicht in der gewöhnlichen Weise unter Kohlensäureabspaltung und Bildung eines Bihydroxylbenzols zersetzt.

Destillirt man sie mit Kalk, so bildet sich der gelbe Körper oft nur spurenweise, der Retorteninhalt verkohlt gänzlich.

Endlich haben wir noch versucht, die Säure durch Einschliessen mit concentrirter Salzsäure in Röhren und Erhitzen in der gewünschten Weise zu zerlegen. Unter 200° scheint gar keine Einwirkung stattzufinden. Zwischen 200° und 300° färbt sich die Lösung bräunlich und es scheidet sich wenig einer kohligen Masse ab. Beim Öffnen der Röhren ist kein Druck bemerkbar und die Flüssigkeit enthält neben unzersetzter Säure den gelben Körper, der auch durch Destillation derselben für sich gewonnen wurde.

Über 300° erhitzt, explodirten auch die stärksten Röhren.

Einen andern Versuch, die Constitution unserer Säure aufzuklären, machten wir, indem wir das Kalisalz der Disulfobenzoësäure mit ameisensaurem Kali verschmolzen. Wir hofften dadurch zu einer der bekannten Tricarbonsäuren des Benzols zu gelangen. Der Verlauf des Processes war ganz ähnlich, wie ihn V. Meyer, der Entdecker dieser interessanten Reaction, bei der Monosulfo-

benzoësäure beschreibt. Äther nahm aus der angesäuerten Schmelze einen Körper auf, der nach dem Reinigen und Umkrystallisiren als Isophthalsäure mit allen den Eigenschaften erkannt wurde, die Meyer an seiner synthetisch dargestellten Isophthalsäure beschreibt. Der Schmelzpunkt der Verbindung lag über 300°. Bei der Analyse gab sie folgende Zahlen:

	$C_8H_6O_4$	Gefunden
C....	57·8	57·3
H....	3·6	3·8.

Der Process verlief also so, dass nur ein Ameisensäurerest statt SHO_3 eintrat, während die zweite SHO_3-Gruppe einfach durch Wasserstoff ersetzt wurde.

Jedenfalls beweist der Versuch, dass die Carboxylgruppe zu einem Schwefelsäurerest in der Disulfosäure, respective zu einem Hydroxyl in der Dioxysäure die Stellung 1·3 einnimmt.

Wir werden den Versuch jedenfalls noch mit grössern Mengen Substanz und unter etwas abgeänderten Bedingungen wiederholen.

Wir haben früher einer charakteristischen Reaction der Dioxybenzoësäure Erwähnung gethan, die sie beim Erhitzen mit Schwefelsäure und nachherigem Verdünnen der Lösung mit Wasser zeigt. Der grüne krystallinische Körper, der dabei erhalten wird, ist nach dem Auswaschen schwefelfrei, er löst sich in Schwefelsäure und Alkalien mit rother Farbe, Wasser fällt ihn aus der schwefelsauren Lösung als ein hellgrünes Pulver. In Wasser löst er sich fast gar nicht, in Alkohol sehr schwierig auf. Die alkoholische Lösung, eingeengt und mit Wasser versetzt, scheidet ihn in hellgrünen Flocken ab, die nach dem Trocknen im Wasserbade fast gelb erscheinen. Er schmilzt noch nicht bei 320°. Aus diesem ganzen Verhalten lässt sich schliessen, dass er mit dem gelben Körper, der durch trockene Destillation aus Dioxybenzoësäure entsteht, höchst wahrscheinlich identisch ist. Er zeigt auch unter dem Mikroskope ganz ähnliche Krystallform. Die Farbenverschiedenheit beider Körper, die anfangs so deutlich hervortritt, verschwindet beim weitern Reinigen immer

mehr und scheint uns kein genügender Grund, die Identität derselben auszuschliessen.

Auch für diese Verbindung können wir nach unsern bisherigen Analysen eine bestimmte Formel nicht aufstellen, und behalten uns vor, in einer späteren Abhandlung darauf zurückzukommen.

Die Mutterlaugen, aus denen schon mehrere Partien Dioxybenzoësäure auskrystallisirt waren, gaben, wenn ihre Quantität schon sehr gering geworden war, keine einheitliche Krystallisation mehr. Vorwiegend ist noch immer Dioxybenzoësäure, doch sind auch sehr geringe Mengen eines durch Bleizucker fällbaren Körpers mit rother Eisenreaction (siehe folgende Abhandlung) darin enthalten, ausserdem ein in concentrisch vereinigten Nädelchen krystallisirter Körper, der wie es scheint keine Färbung mit Eisenchlorid erzeugt.

Protokatechusäure konnte trotz ihrer empfindlichen Reactionen nicht mit Sicherheit nachgewiesen werden, ebensowenig Paraoxybenzoësäure. Bei einer Verarbeitung fanden wir dagegen geringe Mengen von Oxybenzoësäure, offenbar aus einer Monosulfosäure entstanden. Bei den meisten Bereitungen fehlte sie. Wahrscheinlich war in dem einen Falle die Dauer der Einwirkung von Schwefelsäure und Phosphorsäure auf Benzoësäure etwas zu kurz gewesen.

Die Gesammtmenge dieser letzten Krystallisation betrug bei der Verarbeitung von 250 Grm. Benzoësäure, welche nahezu ebenso viel rohe Dioxybenzoësäure lieferten, kaum 2 Grm. Davon war der bei weitem grösste Theil noch Dioxybenzoësäure. Die ganze Reaction muss daher als eine ausnehmend glatt verlaufende bezeichnet werden.

Wenn wir grössere Mengen der neuen Säure behufs Fortsetzung ihrer Untersuchung werden dargestellt haben, wird es vielleicht auch gelingen, über die Natur der beobachteten Nebenproducte Aufklärung zu erhalten.

---

12. Über die Umwandlung der Oxybenzoësäure in Protokatechusäure und die Constitution der letzteren.

Von L. Barth.

Fittig hat vor kurzem (Zeitschrift f. Chemie 1871, S. 181) im Hinblicke darauf, dass die Protokatechusäure bei der trockenen Destillation nur Brenzkatechin liefert, die von V. Meyer für dieselbe gebrauchte Formel 1·3·4 als unbegründet zurückgewiesen und dies auch dadurch noch mehr bekräftiget, dass er bezweifelt, Oxybenzoësäure lasse sich in Protokatechusäure verwandeln, da Remsen (Zeitschrift f. Chemie 1871, S. 81) gezeigt hat, dass der nach meiner Methode dargestellten Oxybenzoësäure stets eine gewisse Menge Paraoxybenzoësäure beigemischt sei. Im folgenden seien nun einige Versuche beschrieben, die ich angestellt habe, um die angeregten Fragen einer Entscheidung näher zu bringen.

Zunächst muss ich constatiren, dass die aus Sulfobenzoësäure erzeugte Oxybenzoësäure wirklich etwas Paraoxybenzoësäure enthält, zwar um so weniger, je genauer man nach der damals von mir gegebenen Vorschrift arbeitet, wie dies auch Remsen gefunden hatte, aber immerhin eine nachweisbare Quantität. Ich hatte, als ich meine damalige Arbeit über die Oxybenzoësäure ausführte, vornehmlich den Zweck, mir schnell eine grössere Quantität dieser Säure in reinem Zustande zu verschaffen, benützte daher die ersten Krystallisationen der Säure, die mehrmal umkrystallisirt wurden und in denen weder dem äussern Ansehen nach, noch durch Reactionen eine Verunreinigung nachgewiesen werden konnte.

Ich bin auch jetzt vollkommen überzeugt, meine Versuche mit reiner Säure angestellt zu haben. Es fand sich noch in meinem Laboratorium von dieser Untersuchung herrührend eine nicht unbeträchtliche Menge Substanz vor, die aus den sämmtlichen eingedampften Mutterlaugen erhalten worden war und die als

„unreine Oxybenzoësäure“ bezeichnet war. Aus dieser erhielt ich dann allerdings beim neuerlichen Umkrystallisiren eine gewisse Menge Paraoxybenzoësäure.

Obwohl ich nun sicher war, zu meinen Versuchen reine Oxybenzoësäure angewendet zu haben, stellte ich dieselbe nochmals dar und überzeugte mich durch sorgfältige Prüfung, dass sie nach 12—15maligem Umkrystallisiren vollkommen rein war (schon nach der sechsten Umkrystallisirung liess sich in der Mutterlauge so wenig, wie in den zuerst ausgeschiedenen Krystallen Paraoxybenzoësäure nachweisen).

Es ist daher, wenn man mit grösseren Quantitäten arbeitet, wohl nicht nöthig zur Reindarstellung der Säure zuerst dieselbe in das saure Barytsalz überzuführen.

Die Oxybenzoësäure, die zu dem folgenden Versuche diente, zeigte den Schmelzpunkt 200°, verlor im Wasserbade nichts an Gewicht, und weder mit freiem Auge, noch unter dem Mikroskop liess sich die geringste Spur einer fremden Substanz darin entdecken.

Sie wurde nach der früher beschriebenen Methode in die Sulfosäure übergeführt und diese mit Kali verschmolzen. Die Erscheinungen waren dieselben, die schon früher beschrieben wurden.

Äther nahm aus der angesäuerten Schmelze eine krystallisirte Substanz auf, die unzweifelhaft Protokatechusäure war. Nach dem Reinigen und Umkrystallisiren zeigte sie alle für diese Säure charakteristischen Reactionen, einen Schmelzpunkt von 198° und bei 100° einen Krystallwasserverlust von 10·5 Percent, also theoretisch genau denselben, den die Protokatechusäure

$$C_7H_6O_4 + H_2O$$

verlangt. Es kann somit kein Zweifel darüber bestehen, dass auch ganz reine Oxybenzoësäure durch das Zwischenglied der Sulfosäure in Protokatechusäure übergeführt wird.

Um ganz sicher zu gehen, habe ich ferners aus reiner Paraoxybenzoësäure durch das Zwischenglied der Sulfosäure Protokatechusäure dargestellt. Letztere war schon früher von Malin und mir aus Jodparaoxybenzoësäure, Bromanissäure und Sulfanissäure erhalten worden.

Ich erhielt auch nach der üblichen Methode daraus Protokatechusäure mit allen charakteristischen Eigenschaften und Reactionen; ihr Schmelzpunkt war 197°. Das Krystallwasser der lufttrocknen Säure betrug ebenfalls 10·5 Percent. Daneben bildete sich aber eine gewisse Menge einer schwerlöslichen, durch Bleizucker wie die vorige, fällbaren Säure, die eine roth-violette Eisenreaction gab, ihrem Verhalten nach nicht Oxysalicylsäure war, und daher wahrscheinlich eine neue isomere Bihydroxylbenzoësäure ist[1]. Die Ausbeute an reiner Protokatechusäure sowohl, wie an der eben angeführten schwerlöslichen Säure ist gering, und dies ist auch der Grund, warum ich über die letztere noch keine genaueren Angaben machen kann. Ich bin im Begriffe, eine grössere Menge Paraoxybenzoësäure in dieser Richtung zu verarbeiten. Die Bildung der neuen Säure scheint durch das Vorhandensein einer isomeren Sulfoparaoxybenzoësäure bedingt zu sein. Aus Sulfanissäure wurde sie von Malin nicht erhalten, wie denn überhaupt auch die Ausbeute an Protokatechusäure aus reiner Paraoxybenzoësäure bedeutend geringer ist, als aus reiner Anissäure.

Da nun die Bildung der Protokatechusäure aus Paraoxybenzoësäure sowohl wie auch aus reiner Oxybenzoësäure bewiesen ist, so wird man nicht anstehen dürfen, der erstgenannten Säure die Formel 1·3·4 zu geben, wenn man die Paraoxybenzoësäure als 1·4, die Oxybenzoësäure als 1·3 gelten lässt, da eine Umlagerung der schon früher vorhandenen Hydroxyle während des Schmelzens nicht wohl angenommen werden kann, wie es in diesem Falle geschehen müsste.

Es ist schon mehrfach Zweifel geäussert worden, ob Reactionen, bei denen schmelzendes Kali in Anwendung kommt, es gestatten, Schlüsse zu ziehen auf die Lagerung substituirender Elemente oder Reste im Benzolkerne, ja es ist geradezu das

---

[1] Ich vermuthe, dass sie identisch ist mit der Säure aus Sulfosalicylsäure, die eine ganz gleiche Eisenreaction gibt, durch Bleizucker fällbar und in Wasser schwer löslich ist. Ich hatte schon vor längerer Zeit die Absicht, diese Säure näher zu untersuchen, erhielt aber aus 200 Grm. Salicylsäure so wenig Substanz, dass ich aus ökonomischen Gründen auf die Weiterführung der diesbezüglichen Versuche verzichten musste. Vielleicht gelingt die Darstellung des Körpers aus Paraoxybenzoësäure leichter.

Gegentheil behauptet worden. Es wird gesagt, die Temperatur sei bei diesem Processe zu hoch, als dass man erwarten könne, glatte Reactionen zu erhalten, und es wird darauf hingewiesen, dass solche molekulare Umlagerungen häufig schon bei verhältnissmässig niedriger Temperatur bei der Einwirkung von durchaus nicht energischen Reagentien stattfinden.

Als Beispiel wird namentlich die von Kekulé beobachtete Umwandlung der Phenolmetasulfosäure in Parasäure beim gelinden Erwärmen hingestellt. Mir scheint gerade dieses Beispiel für den vorliegenden Fall nicht zu passen, es scheint mir nur zu beweisen, dass die Metaverbindung, mit überschüssiger Schwefelsäure, oder auch nur mit Wasser erwärmt, in die Paraverbindung übergeht, aber nicht, dass deshalb andere Verbindungen beim Schmelzen mit Kali leicht molekulare Umsetzungen erfahren müssen. Im Gegentheile gerade die Phenolmetasulfosäure ist ein Beispiel, dass selbst leicht zu solchen Vertauschungen der substituirenden Reste geneigte Körper beim Schmelzen mit Kali dies nicht thun. Phenolmetasulfosäure, wenn sie rein ist, erzeugt bei dieser Reaction nur Brenzkatechin und niemals Resorcin, wie schon Kekulé gefunden hat und wie ich mich selbst mehrfach überzeugte. Nimmt man noch dazu die Beständigkeit, welche im Übrigen leicht veränderliche und zersetzliche Körper wie Salicylsäure, Protokatechusäure, Brenzkatechin und a. m. gegen schmelzendes Kali zeigen, und erinnert man sich, dass kein Beispiel mit Sicherheit bekannt ist, an welchem eine Umlagerung, wie sie oben angedeutet wurde, beim Schmelzen mit Kali beobachtet worden ist, dass reine Brom-, Jod-, Sulfo-Verbindungen bei dieser Reaction stets die entsprechenden Hydroxylderivate geben, wenn die Reaction überhaupt in dem Sinne verlauft, so kann man wohl die Behauptung gerechtfertigt finden, dass das Schmelzen mit Kali eine Reaction sei, welche erlaubt Schlüsse zu ziehen auf die Constitution der so behandelten Körper vor und nach derselben, welche also auch zur Bestimmung des chemischen Orts brauchbar erscheint.

Neuerlich wieder hat Friedburg[1], indem er zum Theil, schon früher von Hübner gemachte Mittheilungen wiederholt

---

[1] Annal. Bd. 158, S. 23.

reine nach dem Verfahren von Reinecke dargestellte Brombenzoësäure mit Kali geschmolzen und daraus Salicylsäure und eine „bei circa 250° schmelzende Säure, die Paraoxybenzoësäure sein konnte" erhalten, also gerade die zwei Säuren, die nach der Constitution der verwendeten Brombenzoësäure nicht hätten gebildet werden sollen.

Daran knüpft er einige Bemerkungen über die Unbrauchbarkeit der Reaction mit schmelzendem Kali, wenn man sie zur Aufklärung von Isomerie-Verhältnissen benützen will, wie solche Bemerkungen früher schon Hübner gemacht hat. Es wäre allerdings auffallend, wenn man beim Schmelzen von Orthobrombenzoësäure mit Kali, Salicylsäure und Paraoxybenzoësäure in hinreichender Menge erhielte und es würde dies wirklich im Stande sein die oben genannte Reaction zu discreditiren. Leider ist die Angabe von Friedburg nicht richtig. Man erhält zwar auch aus reiner, bei 153—154 schmelzender Brombenzoësäure durch Behandeln mit Kali stets eine gewisse kleine Menge Salicylsäure, wie Kekulé und später ich selbst aus unreiner Peligot'scher Säure[1], aber nach der Trennung der Salicyl-

[1] Ich hatte damals, wie schon erwähnt, die Absicht, Oxybenzoësäure nach einem bequemeren und ausgiebigeren Verfahren darzustellen. Da mir nur Brombenzoësäure, nach Peligot's Vorschrift erzeugt, zu Gebote stand, zersetzte ich diese mit Kali und gewann geringe Mengen Salicylsäure und ziemlich viel Benzoësäure. Die jedenfalls mitgebildete Oxybenzoësäure war durch die Benzoësäure verdeckt, die wahrscheinlich selbst wieder schon in der ursprünglichen Bromsäure enthalten war, und die ich, da die ausführlichen Reinigungsmethoden der rohen Brombenzoësäure noch nicht bekannt waren, von der letzteren nicht trennen konnte. Jedenfalls war die so beschaffene unreine Peligot'sche Brombenzoësäure nicht zur Darstellung grösserer Mengen Oxybenzoësäure geeignet, weshalb ich auch den Versuch nicht weiter verfolgte. Angerstein (Annal. 158, S. 8) hat nun auf eine kurz nach meiner früheren Arbeit veröffentlichte Untersuchung von Dembey hingewiesen, worin gezeigt wird, dass die Orthochlorbenzoësäure beim Schmelzen mit Kali Oxybenzoësäure liefert und die violette Eisenreaction einem Gehalte von Phenol zugeschrieben wird, das durch einen secundären Process aus Oxybenzoësäure entstanden war. Ich weiss natürlich nicht, ob bei dem Versuche von Dembey sich wirklich keine Salicylsäure gebildet hatte, glaube aber, dass es keine schwierige Aufgabe ist, die Färbungen, welche Eisenchlorid mit Phenol und mit

säure vom Hauptproduct der Reaction hinterbleibt dieses in zu Krusten vereinigten kugeligen Krystallaggregaten, die nach zweimaligem Umkrystallisiren und Behandeln mit Thierkohle farblos werden, genau die Formen der Oxybenzoësäure zeigen, süss von Geschmack sind, ohne Krystallwasser krystallisiren und bei 199—200° schmelzen.

Ich erhielt aus 10 Grm. reiner Brombenzoësäure kaum mehr als einige Milligramme Salicylsäure und beinahe 5 Grm. Oxybenzoësäure, also über 70 Percent der theoretischen Ausbeute und bei einer Wiederholung des Versuches mit 5 Grm. Bromsäure ganz ähnliche Verhältnisse. Übrigens hat schon v. Richter[1] beim Schmelzen der Orthobrombenzoësäure mit Kali, Oxybenzoësäure erhalten und auch Herr Friedburg wird dasselbe finden, wann er seinen Destillationsrückstand, der die sehr schwer lösliche, klein krystallisirende Säure enthält, weiter reinigt und untersucht. Phenol hatte sich bei meinen Versuchen nicht gebildet. Wenn Herr Friedburg dann weiter bemerkt, dass die Anwesenheit von Salicylsäure in dem Falle nichts beweist, weil, wie ich selbst gefunden habe, Phenol beim Schmelzen mit Kali Salicylsäure und Oxybenzoësäure liefert, Phenol aber bei dieser Reaction leicht entstehen könne, so ist dies nur eine Erklärung, warum Salicylsäure vorhanden sein kann und der correcte Verlauf des Processes beim Schmelzen mit Kali wäre, bei dem Umstande, dass sich als Hauptproduct Oxybenzoësäure bildet, auch für diesen Fall sicher gestellt. Ich kann aber diese Erklärung

---

Salicylsäure zeigt, zu unterscheiden. Phenollösung wird dabei blauviolett; unter Umständen fast ganz blau, Salicylsäure prachtvoll rothviolett; letztere Reaction ist überdem viel empfindlicher. Herr Angerstein sagt dann (l. c.) weiter: „Trotzdem es hiernach scheinen möchte, als entstände beim Schmelzen von Kali mit der nach Peligot dargestellten Brombenzoësäure keine Salicylsäure, so wird später nachgewiesen werden, dass unter diesen Umständen allerdings Salicylsäure entsteht, diese Bildung aber keinen Rückschluss auf die Natur der Brombenzoësäure zulässt". Auf diese Bemerkung kann ich nur erwidern, dass ich damals die Anwesenheit von Salicylsäure in der Schmelze der rohen Brombenzoësäure nicht aus einer violetten Eisenreaction erschlossen, sondern die Salicylsäure daraus mit ihren charakteristischen Eigenschaften in Substanz dargestellt habe.

[1] Zeitschrift f. Chemie 1870, S. 457.

nicht als die richtige annehmen. Phenol zersetzt sich erst bei viel höheren Temperaturen, als sie im vorliegenden Falle gegeben wurden, in die beiden Oxybenzoësäuren und in Diphenol, und die Hälfte des verwendeten Phenols wird dabei wieder zurückerhalten. Ich will nun durchaus nicht behaupten, dass die so vielseitig geprüfte Monobrombenzoësäure vom Schmelzpunkt 153—155° nicht rein gewesen sei, obwohl die Möglichkeit, dass ihr eine geringe Menge einer isomeren Substanz beigemengt ist, selbst von Hübner nicht ganz ausgeschlossen wird, es ist im Gegentheile wohl denkbar, dass durch einen secundären Process sich eine kleine Menge Salicylcäure bildet, im Grossen und Ganzen ist aber die Entstehung von Oxybenzoësäure in einer der Theorie sehr nahe kommenden Menge, wie mir scheint, ein neuer Beweis für die Brauchbarkeit der Reaction mit schmelzendem Kali zur Erforschung der Isomerie-Verhältnisse aromatischer Substanzen.

Um nun nochmals auf die Constitution der Protokatechusäure zurückzukommen, so kann man ihr wie gesagt nach ihrer Entstehung aus Oxybenzoësäure und Paraoxybenzoësäure, wenn für erstere Substanz die Stellung 1·3 angenommen wird, nur die Lagerung 1·3·4 zuschreiben. Trotzdem entsteht bei der trocknen Destillation für sich, oder mit Kalk, oder mit Bimsstein, auch bei längerem Erhitzen auf 240°, aus derselben nur Brenzkatechin [1], in dem man die Stellung der Hydroxyle 1·3 angenommen hat. Dies scheint offenbar ein Widerspruch zu sein, da ja nach den

[1] Zu diesen Versuchen diente Protokatechusäure verschiedener Bereitung, aus Anissäure, aus Nelkenöl, endlich aus Chinasäure mit Brom (Carbohydrochinonsäure) dargestellte. Alle zeigten dasselbe Verhalten und es ist mir namentlich unverständlich, wie Hesse aus seiner Carbohydrochinonsäure beim längern Erhitzen auf 240° einen Rückstand erhalten konnte, der nur aus Hydrochinon bestand. Dieser Rückstand, sowie überhaupt alle Producte der trocknen Destillation etc., aus einer der genannten Säuren, zeigten die grüne Färbung mit Eisenchlorid, gaben damit bei grösserer Concentration den bekannten schwarzen Niederschlag, aber nie das so charakteristische grüne Hydrochinon, alle waren endlich durch Bleizucker fällbar. Übrigens kann ich aus diesen negativen Resultaten nicht den vollkommenen Beweis herleiten, dass nicht vielleicht unter Umständen doch etwas Hydrochinon bei den angedeuteten Reactionen entsteht.

gewöhnlichen Schlussfolgerungen Hydrochinon entstehen sollte. Ich habe nun Versuche angestellt um zu erfahren, ob Hydrochinon beim Destilliren für sich oder mit Bimsstein, bei verschieden hoher Temperatur zum Theil vielleicht in Brenzkatechin übergeht, niemals konnte ich jedoch auch nur geringe Mengen von letzterem Körper daraus erhalten. Die leichte Umsetzbarkeit dieser beiden isomeren Substanzen in einander ist also wenigstens, wenn sie bereits fertig gebildet sind, nicht erwiesen. Ob dies im Entstehungszustande leichter geschehen kann, darüber können wir allerdings kein Urtheil abgeben. Jedenfalls ist eine genügende Erklärung, warum Protokatechusäure, welche die beiden Hydroxyle benachbart enthält, unter Kohlensäureaustritt Brenzkatechin liefert, damit nicht zu erzielen. Dass aus derselben Chinasäure beim Behandeln mit Bleisuperoxyd Hydrochinon, beim Behandeln mit Brom aber und nachherigem Erhitzen der zuerst gebildeten Protokatechusäure Brenzkatechin entsteht, muss nicht in einer Umlagerung der Hydroxyle zu suchen sein. Wenn man Gräbe's Ansichten über die Chinasäure zu Hülfe nimmt, so können in jedem Falle verschiedene Hydroxyle unter Wasserbildung austreten.

Man hat nun zur Erklärung des angedeuteten, scheinbaren Widerspruchs, abgesehen von der nicht ganz ausgeschlossenen Möglichkeit einer Umsetzung von Hydrochinon in Brenzkatechin im Entstehungsmomente, nur noch zwei Möglichkeiten:

Die Oxybenzoësäure hat nicht die Stellung 1·3, dann ist entweder Isophtalsäure auch nicht 1·3, oder und zwar wahrscheinlicher, Sulfobenzoësäure geht beim Erhitzen mit ameisensaurem Kali zunächst in eine Isomere 1·3 über, die dann Isophtalsäure liefert. Die Reaction beim Schmelzen mit ameisensaurem Salz geht jedenfalls nicht so glatt vor sich, als die beim Schmelzen mit Kali.

Nimmt man aber Isophtalsäure und Oxybenzoësäure als einander correspondirend 1·3 an, und dafür sprechen viele Gründe, so bleibt nur noch die Möglichkeit, das Brenzkatechin sei 1·2, das Hydrochinon 1·3. Es ist bis jetzt nicht gelungen, einen directen Beweis für die benachbarte Stellung der Hydroxyle in Hydrochinon herzustellen. Die leichte Chinon-Bildung nur machte dies wahrscheinlich. Ebenso hat man keinen directen

Beweis für die Stellung 1·3 in Brenzkatechin. Man nahm nur Resorcin, der Terephtalsäure entsprechend als 1·4, Hydrochinon wahrscheinlich als 1·2, daher Brenzkatechin 1·3.

Es scheint nun wohl möglich, dass eine solche Bildung von Chinon aus Hydrochinon nicht unumgänglich zu ihrer Erklärung eine benachbarte Stellung der Hydroxyle verlangt und wenn man will, ist gerade die Bildung von Brenzkatechin aus Protokatechusäure ein mittelbarer Beweis dafür; vielleicht gelingt es bald auf anderm Wege einen directen für diese Ansicht herzustellen.

Ein Versuch, den ich übrigens zu wiederholen beabsichtige, phenolmetasulfosaures Kali mit ameisensaurem Kali zusammenzuschmelzen, um daraus Oxybenzoësäure oder Salicylsäure zu gewinnen und so zu erfahren, welcher dieser beiden Säuren das Brenzkatechin entspricht, ergab vorläufig ein negatives Resultat.

Innsbruck im Juni 1871.

13. Über Bimethyl- und Biäthylprotokatechusäure.

Von **Rudolf Kölle.**

In einer früheren Notiz berichtete Dr. Malin, dass er sich mit der Darstellung der genannten Säuren beschäftige. Er wurde jedoch kurze Zeit darauf seinen Arbeiten durch den Tod entrissen. An seine Versuche anknüpfend, habe ich die Untersuchung fortgesetzt und zu diesem Zwecke die freien Säuren, einige Salze derselben sowie ihre Destillationsproducte dargestellt und untersucht.

Bimethylprotokatechusäure.

Zu ihrer Darstellung wurde Protokatechusäure, die aus Nelkenöl durch Behandeln mit Kalihydrat erzeugt worden war, verwendet.

1 Grm. Protokatechusäure, 4 Grm. Jodmethyl und 1 Grm. Kalihydrat wurden mit Methylalkohol als Lösungsmittel in zugeschmolzenen Röhren beiläufig 3 Stunden auf 140° erhitzt. Nach dem Erkalten wurden dieselben geöffnet, der Inhalt in ein Becherglas geschüttet, und durch Filtration von dem sich dabei ausscheidenden Jodkalium getrennt. Das Filtrat zeigt eine braune Färbung. Nach dem Verdünnen mit Wasser wurde der Alkohol auf dem Wasserbade abgedampft. Man erhält dabei eine klare Flüssigkeit, die auf der Oberfläche und am Boden des Gefässes eine braune Masse ausscheidet. Das Ganze wurde mit verdünnter Natronlauge gekocht und nach dem Erkalten mit Schwefelsäure angesäuert, wobei die freie Säure sich sogleich in grossen Flocken ausscheidet und zu Boden sinkt. Sie wurde in Äther gelöst, und blieb nach dem Verdunsten desselben in schwach gefärbten krystallinischen Krusten zurück. Durch wiederholtes Umkrystallisiren und Behandeln mit Thierkohle wurde sie gereinigt. Sie stellt feine, glänzend weisse Nadeln dar, die mit Eisenchlorid die charakteristische Farbenreaction der Proto-

katechusäure nicht mehr zeigen, und auch kein Krystallwasser enthalten. Sie ist eine einbasische Säure und treibt Kohlensäure aus ihren Verbindungen aus.

Die Ausbeute bei der Gewinnung ist gering. Ich erhielt im günstigsten Falle ungefähr 3 Grm. reiner Bimethylprotokatechusäure aus 10 Grm. Protokatechusäure. Ihre Analyse entspricht der Formel

$$C_9H_{10}O_4 = C_6H_3 \begin{cases} COOH \\ OCH_3 \\ OCH_3. \end{cases}$$

0·3830 Grm. Substanz gaben beim Verbrennen 0·8359 Grm. Kohlensäure und 0·2005 Grm. Wasser.

	$C_9H_{10}O_4$	Gefunden
C....	59·34	59·50
H....	5·49	5·82.

Ihr Schmelzpunkt liegt bei 170—171°.

Von den Salzen wurde das Baryt-, Silber- und Natronsalz dargestellt und untersucht.

Das Barytsalz erhält man leicht durch Sättigen der heissen Säure-Lösung mit kohlensaurem Baryt. Vom Ueberschuss an kohlensaurem Baryt filtrirt, wird die klare Lösung der Krystallisation überlassen. Man erhält so feine, weisse Krystallnadeln, die mitunter die Länge von $1/2$ Zoll erreichen, und an der Basis büschelförmig vereinigt sind. Sie sind in kaltem Wasser ziemlich schwer löslich, nicht in Alkohol und Äther. Lufttrocken enthält das Salz 6 Moleküle Krystallwasser, das bei 150° entweicht. Es entspricht der Formel

$$C_{18}H_{18}O_8Ba + 6H_2O$$

0·6210 Grm. Substanz verloren bei 150° getrocknet 0·1102 Grm. Wasser und hinterliessen beim Glühen mit Schwelelsäure 0·2409 Grm. schwefelsauren Baryt.

	$2(C_9H_9O_4)Ba + 6H_2O$	Gefunden
H_2O....	17·78	17·72
	$2(C_9H_9O_4)Ba$	
Ba....	27·46	27·74.

Das Silbersalz. Wurde erhalten durch Wechselzersetzung des Ammoniaksalzes mit salpetersaurem Silber. Es bildet sich dabei rasch eine gelatinöse Masse, die bald in weissen Flocken sich zu Boden senkt, welche in kurzer Zeit eine rothbraune, später aber schwarze Färbung annehmen, selbst wenn man die ganze Operation im Dunkeln vornimmt. Das Salz ist wasserfrei. Nach der Analyse kommt ihm die Formel zu

$$C_6H_3\left\{\begin{array}{l}\Theta CH_3\\ \Theta CH_3\\ C\Theta\Theta Ag.\end{array}\right.$$

0·3100 Grm. lufttrockener Substanz gaben 0·1164 Grm. metallisches Silber.

	$C_9H_9\Theta_4Ag$	Gefunden
Ag....	37·37	37·56.

Das Natronsalz. Erhalten durch Behandeln der freien Säure mit Natriumhydroxyd, stellt warzenförmig vereinigte weisse Aggregate dar, die unter dem Mikroskop deutliche Krystallisation zeigen. Es ist leicht löslich in Wasser und Alkohol. Bei 110° getrocknet verliert es sein Krystallwasser. Lufttrocken entspricht es der Formel

$$C_6H_3\left\{\begin{array}{l}\Theta CH_3\\ \Theta CH_3\\ C\Theta\Theta Na\end{array}\right. + 2H_2\Theta.$$

0·3330 Grm. Substanz ergaben einen Wassergehalt von 0·0493 Grm. und hinterliessen nach dem Glühen mit Schwefelsäure 0·1003 Grm. schwefelsaures Natron.

	$C_9H_9\Theta_4Na+2H_2\Theta$	Gefunden
$H_2\Theta$....	15·00	14·80.

	$C_9H_9\Theta_4Na$	Gefunden
Na....	11·27	11·45.

Das Cadmiumsalz rein und krystallisirt darzustellen, gelang nicht. Ich erhielt stets eine syrupartige Masse, die dann später gummiartig eintrocknete und, unter dem Mikroskop betrachtet, auch nicht die geringste Spur von Krystallisation zeigte.

Destillationsproduct. Der Theorie nach soll man bei der Destillation der freien Säure mit Kalk unter Austritt von Kohlen-

säure einen mit dem Kreosol oder Veratrol isomeren oder identischen Körper erhalten.

Beim genannten Vorgehen bekam ich eine bräunliche ölige Flüssigkeit, die in Wasser zu Boden sank. Nach wiederholtem Reinigen destillirte endlich ein sehr hellgelb gefärbtes Öl von angenehm vanilleartigem Geruch über, dessen Siedepunkt zwischen 210—215° lag. Die alkoholische Lösung gab mit Eisenchlorid eine intensiv grüne Farbenreaction. Nach der Analyse besitzt es die Formel

$$C_8H_{10}O_2$$

0·3574 Grm. Substanz gaben beim Verbrennen 0·9074 Grm. Kohlensäure und 0·2323 Grm. Wasser.

	$C_6H_4\begin{cases}OCH_3\\OCH_3\end{cases}$	Gefunden
C....	69·57	69·25
H....	7·25	7·22.

Der Körper reducirt Silberlösung, gibt aber mit Ammoniak keine krystallinische Verbindung. Er ist daher mit dem Kreosol oder Veratrol nicht identisch, sondern nur isomer. Die Ausbeute an diesem Bimethylbrenzkatechin ist sehr gering. Ich erhielt ungefähr 5 Percent des Öles von der angewendeten Menge Bimethylprotokatechusäure.

Verreibt man die freie Säure mit überschüssigem Brom, erwärmt darauf im Wasserbade und nimmt in heissem Wasser auf, so löst sich ein Theil des gebildeten Bromproductes, ein anderer bleibt als zähe Masse unlöslich zurück. Letztere löst sich zwar in Alkohol, kann aber daraus nicht krystallinisch erhalten werden. Das aus Wasser erhaltene Product zeigt unter dem Mikroskope die Form von feinen Nadeln. Eine Brombestimmung ergab Zahlen, die annähernd der einfach gebromten Säure entsprechen.

	$C_6H_2\begin{cases}Br\\COOH\\OCH_3\\OCH_3\end{cases}$	Gefunden
Br....	30·8	31·9.

Der Körper enthält also noch etwas zweifach gebromte Substanz. Eine Trennung konnte der geringen verfügbaren Menge wegen nicht vorgenommen werden.

Biäthylprotokatechusäure.

Die Darstellung dieser Säure geschieht ganz analog der vorigen durch Erhitzen von 1 Grm. Protokatechusäure, 4 Grm. Jodäthyl, und 1 Grm. Kalihydrat mit Äthylalkohol in zugeschmolzenen Röhren, Trennen durch Filtration vom ausgeschiedenen Jodkalium, Abdampfen des Alkohols, Kochen mit verdünnter Natronlauge, Fällen mit Schwefelsäure, Ausschütteln mit Äther und Abdestilliren desselben.

Durch Kochen mit Thierkohle und wiederholtes Umkrystallisiren aus heissem Wasser wurde sie gereinigt. Sie bildet gleichfalls glänzende weisse Krystallnadeln, deren Schmelzpunkt bei 149° liegt.

Auch sie enthält kein Krystallwasser und gibt mit Eisenchlorid keine Farbenreaction.

Sie entspricht der Formel

$$Є_6H_3\begin{cases}ЄΘΘH\\ ΘЄ_2H_5\\ ΘЄ_2H_5\end{cases}$$

0·3401 Grm. lufttrockne Substanz gaben 0·7821 Grm. Kohlensäure und 0·2089 Grm. Wasser.

	$Є_{11}H_{14}Θ_4$	Gefunden
Є....	62·86	62·42
H....	6·66	6·82.

Von den Salzen wurde das Baryt-, Silber- und Kalisalz untersucht.

Das Barytsalz erhielt ich durch Kochen der freien Säure mit kohlensaurem Baryt. Es stellt büschelförmig vereinigte Nadeln dar, die eine sehr schwachgelbe Färbung zeigten. Das Salz krystallisirt mit 3 Molekülen Krystallwasser nach der Formel:

	$2(Є_{11}H_{13}Θ_4)Ba+3H_2Θ$	Gefunden
$H_2Θ$....	16·28	16·03
	$2(Є_{11}H_{13}Θ_4)Ba$	
Ba....	24·68	24·80.

Das Silbersalz bietet bei seiner Darstellung eine ähnliche Erscheinung wie das der Bimethylprotokatechusäure. Ich erhielt

es durch Wechselzersetzung des Kalisalzes mit salpetersaurem Silber.

Die anfangs gelatinöse Masse scheidet bald weisse sich rasch dunkelfärbende Flocken aus, die gut ausgewaschen und lufttrocken kein Krystallwasser enthalten. Es entspricht der Formel

$$C_6H_2\begin{cases}OC_2H_5\\OC_2H_5\\COOAg\end{cases}$$

0·2009 Grm. trockene Substanz hinterliessen nach dem Glühen 0·0692 Grm. metallisches Silber.

	$C_{11}H_{13}O_4Ag$	Gefunden
Ag....	34·07	34·41.

Das Kalisalz, auf analoge Weise wie das Natronsalz der vorigen Säure erhalten, bildet weisse unter dem Mikroskope betrachtet, Eisblumen ähnliche Krystalle, die in Wasser und Alkohol leicht löslich sind. Die Krystallwasserbestimmung entspricht nur annähernd, da die Substanz an der Luft nicht vollkommen trocken zu erhalten ist.

Sie kommt am nächsten der Formel

$$2(C_{11}H_{13}O_4K)+H_2O$$

0·7412 Grm. bei 120° getrockneter Substanz hinterliessen nach dem Glühen mit Schwefelsäure behandelt 0·2529 Grm. schwefelsaures Kali.

	$C_{11}H_{13}O_4K$	Gefunden
K....	15·72	15·77.

Das Destillationsproduct der freien Säure mit Kalk liefert ein im Wasser zu Boden sinkendes Öl, das nach öfterem Überdestilliren eine hellgelbe Farbe annahm. Sein Geruch ist angenehm vanilleartig. Die alkoholische Lösung wird durch Eisenchlorid grün gefärbt. Der Siedepunkt konnte der geringen Menge wegen nicht genau bestimmt werden, denn die Ausbeute ist noch schlechter, als die der entsprechenden Methylverbindung. Seiner Entstehung nach muss es wohl Biäthylbrenzkatechin sein. Die Zahlen, welche die Analyse desselben gab, stimmten jedoch nicht genau mit der für die Formel berechneten zusammen.

Das Öl selbst wird nach einiger Zeit beim Stehen an der Luft fest und zeigt dann eine mit freiem Auge leicht sichtbare, deutlich krystallinische Structur. Wird die freie Säure mit Brom behandelt, so verlauft die Reaction wie bei der vorigen. Auch hier bleibt eine gewisse Menge einer schmierigen Substanz vom Wasser ungelöst, die auch aus Alkohol nur als brauner Syrup erhalten werden kann. Der aus Wasser erhaltene umkrystallisirte Theil zeigt unter den Mikroskop verwachsene Nadeln. Er besteht seiner Analyse nach aus einem Gemenge von Mono- und Dibromdiäthyl-Protokatechusäure.

Über die erste Anlage der Allantois.

Von Dr. **Peter v. Dobrynin** aus St. Petersburg.

(Mit 1 Tafel.)

Die Angaben der Autoren über die erste Anlage der Allantois weichen in mehrfacher Weise von einander ab. Die Einen sahen sie paarig, die Anderen unpaarig in ihrer ersten Bildungsperiode. Während Einige sie solid in ihrer frühesten Entwickelungsstufe gesehen zu haben angeben, wollen sie Andere als eine hohle Blase, ausgestülpt vom Schwanzdarme, beobachtet haben.

Die so verschiedenen Angaben resultiren zum Theile aus der unvollständigen Untersuchungsmethode, der sich manche bedient haben, zum Theile sind sie aber Folgen unsicherer Beobachtungen.

Um diesem Vorwurfe entgehen zu können, habe ich das Verfahren eingeschlagen, welches unter den Embryologen gegenwärtig allgemein wurde. Dieses besteht darin, dass man von dem Organe, dessen erste Anlage man studiren will, in verschiedenen auf einander folgenden Entwickelungsstufen Durchschnitte bereitet, die mit einander verglichen, immerhin am geeignetsten sind, eine richtige Vorstellung über die Entwickelung eines Organes zu geben. Hiebei ist zu beachten, dass man in jedem Entwickelungsstadium sämmtliche, auf einander folgende Schnitte, die durch ein Organ gemacht werden können, gewinnen muss, um sich ein klares Bild von dem Organe verschaffen zu können.

Durch dieses Verfahren bin ich bei den vorliegenden Untersuchungen zu Resultaten gelangt, die von den bisherigen Angaben wesentlich verschieden sind, weshalb ich mich zu dieser Mittheilung entschlossen habe.

Baer's[1] Angaben über die erste Anlage der Allantois bezeichnen dieselbe als unpaarige Ausstülpung aus dem Vorderdarme. Baer lässt an der Bildung der Allantois das vegetative Keimblatt und das Gefässblatt sich betheiligen. Seine Angaben geben uns keinen Aufschluss über die erste Anlage, da sie die schon fertige Allantois darlegen, während es scheint, dass die früheren Stadien ihm noch unbekannt waren.

Reichert[2] beschreibt die erste Anlage der Allantois als eine paarige solide Wucherung am Beckenende. Die solide Zellenmasse bekommt eine Höhle, die sich später mit dem Schwanzdarme in Verbindung setzt. — Am auffallendsten ist die von Remak[3] angegebene Mittheilung über die Art und Weise, wie die Allantois mit dem Darmcanal in Zusammenhang tritt. Remak behauptet, dass in dem Spalte, welcher im mittleren Keimblatte am Beckenende des Embryo entsteht, (analog einer von ihm beschriebenen Höhle am Kopfende, worin das Herz sich entwickelt), an jener Stelle, wo die Hautmuskelplatte und Darmfaserplatte unter einem spitzen Winkel zusammenhängen, eine paarige solide Verdickung sich zeigt. Diese Verdickung hängt mehr der Darmfaserplatte als der Hautmuskelplatte an. Später stülpt sich das Darmdrüsenblatt in dieselbe hinein und die beiden paarigen Anlagen sollen sich zu einer unpaarigen vereinigen.

Die Untersuchungen Bischoff's an Säugethieren stimmen mit den angeführten Angaben Reichert's überein.

Verschieden von den besprochenen Ansichten über die erste Anlage der Allantois ist die Lehre, welche His[4] aufgestellt hat. Sie ist das Ergebniss genauer Untersuchungen, die er am Hühnerembryo anstellte. Nur hat His ein vorgerückteres Entwickelungsstadium beobachtet und es war ihm demzufolge die früheste Anlage entgangen. — His sagt, dass am Darmende zwei Röhrenschenkel entstehen und von den beiden, aus dem primären Hinter-

---

[1] v. Baer, Über die Entwickelungsgeschichte der Thiere. II. Theil. Königsberg, 1837.

[2] Das Entwickelungsleben im Wirbelthierreiche. Berlin, 1840.

[3] Entwickelungsgeschichte der Wirbelthiere. Berlin, 1855.

[4] Untersuchungen über die erste Anlage des Wirbelthierleibes. I. Die Entwickelung des Hühnchens im Ei. Leipzig, 1868.

darme entstandenen Röhrenschenkeln der obere zum eigentlichen Hinterdarm, der untere zur Allantois wird. Die Umbiegungsstelle beider in einander bezeichnet die Höhlung der Cloake. — Die Zeichnung, welche auf Tafel X, Fig. VII, 3 in seinem Werke zu finden ist, gibt das erste naturgetreue Bild der Allantois auf Längsschnitten durch den Schwanzdarm des Hühnerembryo.

Bevor ich zur näheren Beschreibung der ersten Anlage der Allantois — wie sie sich aus meinen Untersuchungen ergibt — übergehe, will ich nur in Kürze Einiges über die sogenannte Pleuroperitonealhöhle am Schwanzende mittheilen. Wenn man durch das Schwanzende des Embryo eines Huhnes am Schlusse des zweiten Tages Längsschnitte in sagittaler Richtung macht, in einem Stadium, wo die Pleuroperitonealhöhle in der Höhe des Vorder- und Mitteldarmes schon ausgebildet, von der Baer'schen Schwanzkappe aber noch nichts zu sehen ist, so wird man an sämmtlichen auf einander folgenden Schnitten am Schwanzende eine analoge Spaltung des mittleren Keimblattes in Hautmuskel- und Darmfaserplatte finden, wie das in den Seitenplatten des Embryo zu sehen ist. Diese beiden Zellenlagen gehen am Schwanzende des Embryo in einander über. Die Hautmuskelplatte schlägt sich als Bestandtheil des Amnion über den Rücken des Embryo, die Darmfaserplatte hingegen setzt sich mit dem Drüsenblatte über den Nahrungsdotter fort. Bald darauf sieht man eine wulstförmige Erhabenheit am Darmdrüsenblatte, welche im axialen Theile des embryonalen Schwanzdarmes liegt. Dieser Wulst bezeichnet die Grenze des Darmcanals am Schwanzende. (Fig. 1, *w*.) Er besteht aus einem Theile des Darmdrüsenblattes, der gegen den breiten Ductus omphalo-mesaraicus vorragt, und einem Antheile der Gebilde des mittleren Keimblattes, welche dem Darmdrüsenblatte angrenzend liegen.

In den darauf folgenden Stadien bekommt man eine Ansicht von der ersten Anlage der Allantois, die ausserhalb der Grenze des Embryonalleibes nahe am Schwanzende sich befindet, obgleich sie noch innerhalb des Fruchthofes liegt.

Aus der Beschreibung der Fig. I. kann man eine Vorstellung über die Allantois in ihrer ersten Entstehung gewinnen. Man sieht am Sagittalschnitte, welcher durch das Schwanzende eines Hühnerembryo gelegt wurde, zunächst das äussere Keimblatt durch-

schnitten, an dem zwei Schichten zu unterscheiden sind. Die äussere x entspricht dem vom Centralnervensysteme abgeschnürten Theile des äusseren Keimblattes; die innere Schichte x'', welche bedeutend dicker ist, gegen das Schwanzende aber spitz endet, entspricht dem seitlich angeschnittenen Centralnervensysteme. Die vom Centralnervensysteme abgeschnürte äussere Zellenlage x' setzt sich längs des Rückens des Embryo fort, bis sie am Schwanzende in eine Vertiefung v gelangt, welche sie gänzlich auskleidet. Diese Vertiefung entspricht einem Theile der Amnionshöhle, die bekanntlich (Schenk[1]) von dem äusseren Keimblatte, welches das innere Epithel des Amnion liefert, ausgekleidet ist.

Nach innen vom äusseren Keimblatte liegen die Gebilde des motorisch-germinativen Blattes (Remak's), welche aus polyedrischen Elementen bestehen, die ein kleines Protoplasma, deutlichen Kern und Kernkörperchen haben. Diese erstrecken sich gegen das Schwanzende bis zum Anfange der Pleuroperitonealhöhle (*PP*).

Hierauf folgt das Darmdrüsenblatt (*Dd*), als innerste Auskleidung des Embryonalleibes. Am Darmdrüsenblatte sehen wir eine wulstförmige Hervorragung (*w*), welche die Grenze des noch offenen Darmes angibt. Folgen wir nun längs des Darmdrüsenblattes über den Wulst (*w*) hinaus in den übrigen Fruchthof, so kommen wir auf den Durchschnitt einer Falte (einer Membran) (*All*), welche seitlich weniger tief und welche von den Gebilden des Darmdrüsenblattes ausgekleidet ist. Man sieht deutlich, dass die auskleidenden Elemente Cylinderepithelien sind. Die Höhlung der Falte ist der Dotterhöhle zugekehrt. Diese Falte ist die erste Anlage der Allantois, welche nicht als Ausstülpung aus dem Schwanzdarme zu betrachten ist, da in diesem Entwickelungsstadium der Schwanzdarm noch offen steht und daher auch keine untere Wand besitzt, aus dem die Allantois ausgestülpt werden sollte. Die Grenze des Schwanzdarmes ist durch den oben beschriebenen Wulst angedeutet.

Andererseits können wir die Duplicität der Allantoisanlage nicht annehmen, da ich sämmtliche, auf einander folgende Durch-

---

[1] M. Schultze, Archiv für mikroskop. Anatomie. Bd. 7, pag. 192. — Beiträge zur Lehre vom Amnion. Von Dr. S. L. Schenk

schnitte durch das Schwanzende gewonnen habe und ich hätte gewiss entsprechend der paarigen Anlage in der Medianlinie keinen Durchschnitt der Falte finden sollen, während ich an den seitlichen Schnitten die Vertiefungen finden sollte. Viel weniger ist es zulässig, eine solide Zellenmasse, die paarig angeordnet wäre, anzunehmen, da von einer solchen bei meiner Behandlungsweise nichts zu finden war.

Am Durchschnitte der Falte unterscheiden wir zwei, die Höhlung der Falte begrenzende Schenkel, die beide in diesem Entwickelungsstadium so gestellt sind, dass der dem Embryonalleibe näher liegende (*y*) mit dem anderen (*y'*) nahezu parallel in der Richtung von oben nach abwärts läuft. Der erstere dieser Schenkel liegt jenen Gebilden des mittleren Keimblattes an, welche um die Chorda dorsalis an der oberen Darmwand und später zwischen Darmfaserplatte und Darmdrüsenblatt (Darmplatte Schenk[1]) liegen. Der andere Schenkel besteht aus zwei Zellenlagen, dem Darmdrüsenblatte (*Dd*) und der Darmfaserplatte (*Df*). Die Letztere liegt der Pleuroperitonealhöhle zugewendet. Im Zwischenraume dieser beiden Zellenlagen finden wir Durchschnitte von Gefässräumen (*u*), die bis in den Gefässhof zu verfolgen sind, nur dass man sie im letzteren zahlreicher findet.

In den folgenden Entwickelungsstadien (Fig. II) sieht man zunächst einen Theil des Schwanzdarmes — das blindsackförmige Ende — vollkommener ausgebildet. Folgt man längs des Darmdrüsenblattes (*DB*, Fig. II) über den stärker in die Darmhöhle hineinragenden Wulst (*w*), so gelangt man in eine zweite Vertiefung, die Anlage der Allantois (*All*), die gleichfalls von den Cylinderepithelien des Drüsenblattes ausgekleidet ist.

Die Veränderung, welche die Allantois in diesem Stadium gegenüber dem vorher beschriebenen zeigt, besteht — wie aus dem Vergleiche der beiden Figuren ersichtlich ist — zunächst darin, dass die Höhlung derselben grösser ist, ferner dass diese in einer ganz anderen Richtung zum Embryonalleibe sich befindet, als das in dem früher geschilderten Bilde der Fall war. Während die Höhle der Allantoisfalte am Durchschnitte früher mit ihrem

---

[1] Beitrag zur Lehre von den Organanlagen im motorischen Keimblatte. Sitzungsber. der Wiener Akad. d. Wiss. LVII. Bd. II. Abthl. 1868.

längeren Durchmesser in der Richtung von oben nach unten gelagert war, sieht man sie jetzt mit dem längeren Durchmesser in der Richtung von vorne nach hinten stehen, nahezu parallel mit dem Darmcanal laufend, so dass man mit His den Darmcanal dieses Stadiums am Schwanzende aus zwei blindsackförmig endigenden Röhrenschenkeln bestehend, ansehen kann. Der untere dieser Röhrenschenkel, oder unsere in ihrer Lage zum übrigen Embryonalleibe veränderte Falte (*All*), ist nach His die erste Anlage der Allantois. Sie ist aus ihrer früheren Lage verschoben worden und mehr nach unten vom Schwanzdarme gerückt.

Nach innen vom Darmdrüsenblatte sind die Gebilde des mittleren Keimblattes (*m*) zu sehen, welche zum guten Theile als Producte aus den Urwirbeln anzusehen sind. Diese erstrecken sich einerseits zwischen das äussere Keimblatt und die Hautmuskelplatte ins Amnion (Schenk), andererseits zwischen das Darmdrüsenblatt und die Darmfaserplatte in die Allantois hinein. Der letztere Theil der Gebilde des mittleren Keimblattes bildet in späteren Entwickelungsstadien die mittlere Wand der Allantois.

Nun wird die Allantois (*All*), wie Fig. III zeigt, grösser, so dass die sie zusammensetzenden Gebilde einen grösseren Raum umschliessen. Zugleich sieht man beim Vergleichen der Fig. III mit der vorher geschilderten, dass die Allantois in ihrer Lage zum Embryonalleibe abermals verändert wurde. Diese Lageveränderung scheint wohl durch die noch nicht ganz genau studirten Wachsthumsverhältnisse der einzelnen Theile des Schwanzdarmes bedingt zu sein. Sie besteht zunächst darin, dass die Allantois, welche im früheren Stadium weiter nach hinten ragte, in dem eben besprochenen Stadium ohngefähr in derselben Höhe sich findet, als das blindsackförmige Ende des Darmrohres.

Man hat nun an der unteren Fläche des Schwanzdarmes die Allantois in Form einer Hervortreibung, die man auch makroskopisch sowohl an frischen, als auch in Chromsäure gehärteten Embryonen beobachten kann. Die Allantois dieses Stadiums besitzt noch keinen Stiel. An der Stelle, wo in späteren Stadien der Stiel zu sehen ist, findet man jetzt einen äusserst kurzen, weit offenen Gang (*G*).

Betrachtet man die Allantois in diesem Stadium näher mit Rücksicht auf die Zellenlagen, welche ihre Wandung bilden, so ergibt sich, dass sie von einem Cylinderepithelium (*Dd*) ausgekleidet ist, welches eine Fortsetzung des Darmdrüsenblattes ist. Hierauf folgt eine Zellenlage des mittleren Keimblattes (*m*), deren Entstehung, wie ich bereits erwähnte, in ähnlicher Weise aufzufassen ist, wie die der Formation, welche von den Gebilden der Urwirbel aus zwischen die Darmfaserplatte (*Df*) und das Darmdrüsenblatt (*Dd*) zur Bildung der Darmwand vorgeschoben wird (Schenk)[1].

Nach aussen liegt die Darmfaserplatte, welche den äussersten Epithelüberzug liefert. Dieser besteht aus platten Epithelien, welche auf dem Durchschnitte den Durchschnitten von Spindeln ähnlich sind. Längs der Darmfaserplatte können wir einerseits an die äussere Oberfläche der Dotterblase, andererseits durch die Pleuroperitonealhöhle bis an die äussere Oberfläche des Amnion gelangen.

---

[1] l. c. pag. 5.

Erklärung der Abbildungen.

Ch. Chorda dorsalis.
Dd. Darmdrüsenblatt.
w. Hervorragender Wulst am Schwanzdarme.
All. Allantois.
y. }
y'. } Begrenzungswand der Allantois.
u. Durchschnitte von Gefässen.
Df. Darmfaserplatte.
PP. Pleuroperitonealhöhle.
v. Amnionshöhle.
x'. }
x''. } Äusseres Keimblatt.
m. Urwirbelmasse.
Hp. Hautmuskelplatte.
S. Schwanzdarm.

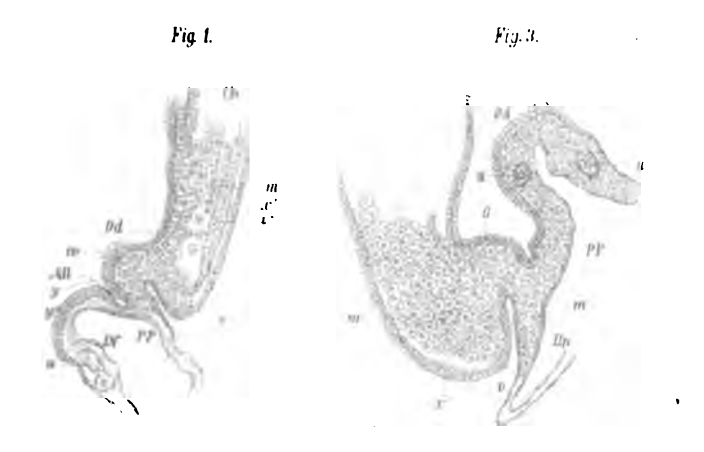
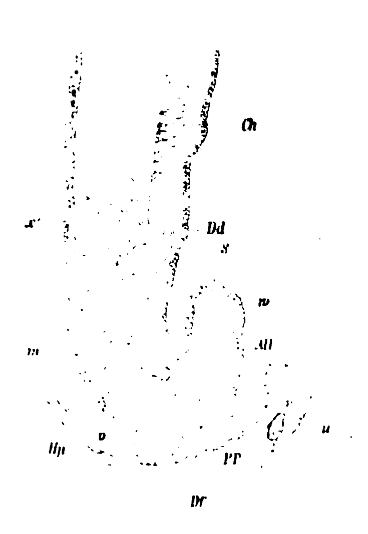
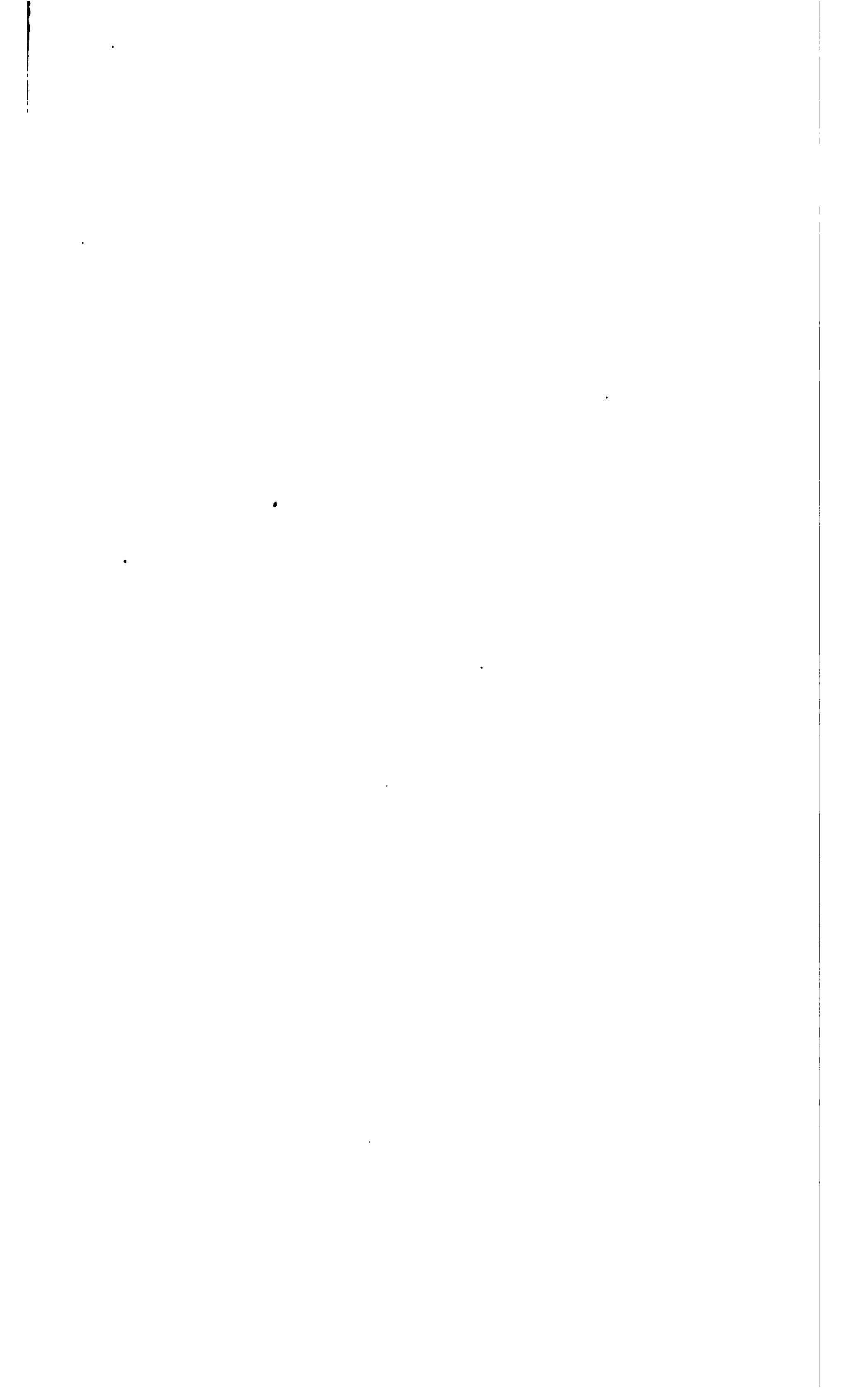


Fig. 2.





Über die Gesetze der elektrodynamischen Induction.

Von dem w. M. J. Stefan.

I.

Die chemischen Kräfte in einer Kette, durch welche ein Strom von der Intensität i fliesst, liefern in jedem Zeitelemente dt eine der Stromintensität i proportionale Arbeit oder Energie. Wird diese mit $eidt$ bezeichnet, so ist e die bei der Einheit der Stromstärke in der Einheit der Zeit erzeugte Arbeit, das Mass der elektromotorischen Kraft der Kette.

Nach dem Ohm'schen Gesetze ist

$$e = wi \qquad (1)$$

unter w den Widerstand der Strombahn verstanden. Somit besteht die Gleichung

$$eidt = wi^2dt. \qquad (2)$$

Nach dem von Joule und Lenz gefundenen Gesetze bedeutet die zweite Seite dieser Gleichung die in der Strombahn während der Zeit dt entwickelte Wärme, hier im Arbeitsmass ausgedrückt. Die Gleichung selbst besagt also nur, dass die der Wirkung der chemischen Kräfte entsprechende Arbeit in eine äquivalente Wärmemenge in der Strombahn umgewandelt worden ist.

Die Gleichung (2) gilt aber nicht mehr, wenn durch den Strom selbst eine chemische Arbeit verrichtet oder eine mechanische Arbeit geleistet oder eine solche aufgenommen wird. Wird z. B. durch die Kräfte, mit welchen ein Strom auf einen Magnet wirkt, dieser letztere in Bewegung versetzt, so muss, wie Helmholtz in der Abhandlung über die Erhaltung der Kraft gezeigt hat, auch die dem Magnete ertheilte lebendige Kraft aus den chemischen Kräften der Kette geliefert werden. Die in de

Strombahn entwickelte Wärme ist dann kleiner, als sie im Vergleich zu dem gleichzeitigen chemischen Consum in der Kette sein sollte.

Wird ein Magnet durch einen Strom bewegt, so ist die aus den elektromagnetischen Kräften während einer sehr kleinen Zeit dt resultirende lebendige Kraft bestimmt durch das Product aus der Stromstärke i in die Änderung dW, welche die Grösse W in dieser Zeit dt erleidet. W selbst ist das Potential der von der Stromeinheit durchflossenen Strombahn auf den Magnet. Nach dem von Helmholtz aufgestellten Principe ist also

$$eidt = wi^2dt + idW \tag{3}$$

woraus

$$wi = e - \frac{dW}{dt} \tag{4}$$

folgt, d. h. $\frac{dW}{dt}$ stellt eine der elektromotorischen Kraft e entgegengesetzte elektromotorische Kraft dar, es ist die des Inductionsstroms, welcher durch die Bewegung des Magnetes erzeugt worden ist.

Wird umgekehrt der Magnet durch eine äussere Kraft der Wirkung des Stromes entgegen bewegt, so ist dazu ein Aufwand von Arbeit nöthig, und nach dem Princip von Helmholtz ist jetzt die in der Strombahn während der Zeit dt entwickelte Wärme äquivalent der in der Kette gleichzeitig aus den chemischen Kräften erzeugten mehr der geleisteten äusseren Arbeit. Diese ist ihrem absoluten Werthe nach wieder durch idW bestimmt, in die Formel (3) aber mit negativem Zeichen zu setzen. Es folgt dann statt der Gleichung (4) die folgende:

$$wi = e + \frac{dW}{dt}$$

und stellt jetzt $\frac{dW}{dt}$ die elektromotorische Kraft des mit dem Hauptstrome gleich gerichteten Inductionsstromes dar.

In diesen Fällen erscheint die Vorstellung eines den Hauptstrom schwächenden oder verstärkenden Inductionsstromes nicht

nothwendig. Diese Vorstellung hat jedoch eine reelle Grundlage, da Inductionsströme auch in einer geschlossenen Leitung, welche keine selbstständige elektromotorische Kraft besitzt, durch Bewegung eines Magnetes entstehen und zwar immer von solcher Richtung, dass die Bewegung des Magnetes in Folge der auftretenden elektromagnetischen Kräfte einen Aufwand von Arbeit erfordert. Das Äquivalent dieser Arbeit ist die in der Leitung durch den Inductionsstrom entwickelte Wärme und besteht die Gleichung

$$wi^2 dt + i dW = 0.$$

Da das erste Glied immer positiv ist, so muss i negativ oder positiv sein, je nachdem dW positiv oder negativ ist.

II.

Das Princip der Äquivalenz der von den chemischen Kräften erzeugten Energie einerseits, der in der Leitung entwickelten Wärme und der verrichteten äusseren Arbeit andererseits, ist von Helmholtz auch angewendet worden auf den Fall der Wechselwirkung zweier elektrischer Ströme. Bei dieser Anwendung ergeben sich jedoch Schwierigkeiten.

Nur dann, wenn die Stromintensität in dem einen Leiter immer als so klein vorausgesetzt wird, dass die inductorische Wirkung dieses auf den andern vernachlässigt werden kann, führt dies Princip, in derselben Weise wie vorhin angewandt, zu einem richtigen Resultat. Es ist auch nur dieser specielle Fall in der Abhandlung über die Erhaltung der Kraft behandelt.

Man kann aber aus diesem Principe die richtigen Ausdrücke für die Intensitäten der Inductionsströme auch in dem allgemeinen Falle erhalten, wenn man nicht die Vorgänge bei einer einfachen relativen Verschiebung der beiden Leiter in Betrachtung nimmt, wie Helmholtz es gethan, sondern das Princip auf die Vorgänge während eines ganzen Kreisprocesses in Anwendung bringt. Dies soll nun zunächst gezeigt werden.

In zwei Stromleitern, deren Widerstände w und w', erzeugen die elektromotorischen Kräfte e und e' die constanten Ströme von den Intensitäten J und J', so dass

$$e = wJ, \quad e' = w'J' \tag{5}$$

Können die beiden Leiter ihrer elektrodynamischen Wechselwirkung folgen, so gewinnen sie in der Zeit dt eine lebendige Kraft dL, und zugleich haben der Erfahrung gemäss während dieser Zeit dt die Stromintensitäten kleinere Werthe. Der leichteren Übersicht wegen mögen die eingetretenen Änderungen der Stromintensitäten durch die besonderen Zeichen dJ uno dJ' hervorgehoben, also die während des Zeitelementes dt herrschenden Stromstärken mit $J—dJ$ und $J'—dJ'$ bezeichnet werden. Die Stromintensitäten kehren zu ihren ursprünglichen Werthen wieder zurück, wenn die beiden Leiter am Ende der Zeit dt wieder festgehalten werden.

Die während der Zeit dt von den chemischen Kräften gelieferte Energie ist

$$dA = e(J-dJ)dt + e'(J'-dJ')dt$$

die in den beiden Leitern in derselben Zeit entwickelte Wärme ist

$$dB = w(J-dJ)^2dt + w'(J'-dJ')^2dt.$$

Die lebendige Kraft, welche die zwischen zwei geschlossenen Leitern wirksamen elektrodynamischen Kräfte in einer sehr kurzen Zeit dt liefern können, ist bestimmt durch das Product aus den Intensitäten der beiden Ströme in die Änderung dV, welche die Grösse V in der Zeit dt erleidet. V ist das Potential der beiden Leitungen aufeinander, wenn jede derselben von der Stromeinheit durchflossen wird, und heisst $ii'V$ das Potential der diese zwei Leitungen durchfliessenden Ströme i und i' auf einander. In der Abhandlung über die Grundformeln der Elektrodynamik [1] ist abweichend von der hier angenommenen Definition die Grösse $—ii'V$ Potential der beiden Ströme auf einander genannt worden.

Es ist also die von den beiden Leitern in der Zeit dt bei der eingetretenen Bewegung gewonnene lebendige Kraft gegeben durch

$$dL = (J-dJ)\,(J'-dJ')dV.$$

[1] Sitzungsberichte LIX.

Lässt man während eines zweiten, gleich grossen Zeitelementes dt mit Hilfe einer äusseren Kraft die beiden Leiter dieselbe Bewegung in umgekehrter Weise machen, so dass sie nach der Zeit dt wieder in ihre ursprünglichen Positionen gelangen, so sind der Erfahrung gemäss die Stromintensitäten während dieser Zeit grössere als J und J' und zwar um so viel grösser, als sie während des ersten Zeitelementes dt kleiner waren. Sie sind also $J + dJ$ und $J' + dJ'$.

Die von den chemischen Kräften während des zweiten Zeitelementes dt gelieferte Energie ist

$$dA_1 = e(J+dJ)dt + e'(J'+dJ')dt$$

die in den Leitern gleichzeitig erzeugte Wärme

$$dB_1 = w(J+dJ)^2 dt + w'(J'+dJ')^2 dt$$

und die äussere Arbeit

$$dL_1 = -(J+dJ)\,(J'+dJ')dV.$$

Werden am Ende des zweiten Zeitelementes die beiden Leiter wieder festgehalten, so ist alles wieder in demselben Zustande, wie vor den ausgeführten Bewegungen und nach dem aufgestellten Princip muss die von den chemischen Kräften gelieferte Energie gleich sein der entwickelten Wärme und der gewonnenen äusseren Arbeit, also

$$dA + dA_1 = dB + dB_1 + dL + dL_1.$$

Setzt man die angegebenen Werthe ein, so reducirt sich diese Gleichung unter Benützung der Formeln (5) auf

$$w dJ^2 + w' dJ'^2 - (J dJ' + J' dJ)\frac{dV}{dt} = 0$$

und diese zerfällt in

$$w dJ = J'\frac{dV}{dt},\quad w' dJ' = J\frac{dV}{dt} \tag{6}$$

oder wenn man mit ε und ε' die elektromotorischen Kräfte, welche diesen inducirten Strömen dJ und dJ' entsprechen, bezeichnet, also

$$\varepsilon = w dJ,\quad \varepsilon' = w' dJ'$$

setzt, so erhält man für dieselben

$$\varepsilon = J'\frac{dV}{dt}, \quad \varepsilon' = J\frac{dV}{dt} \tag{7}$$

also die nämlichen Formeln, welche aus den Theorien von Neumann und Weber folgen.

III.

Betrachtet man nun die erste Hälfte des ausgeführten Kreisprocesses für sich, und führt die für dJ und dJ' gefundenen Werthe in die Ausdrücke für dA, dB und dL, so erhält man

$$dA - dB - dL = JJ'dV - dJdJ'dV,$$

d. h. es ist um den Betrag von $JJ'dV - dJdJ'dV$ mehr an chemischer Energie consumirt worden, als in der erzeugten Wärme und lebendigen Kraft wieder zu finden ist.

Betrachtet man in derselben Weise die zweite Hälfte des Processes, so ist

$$dA_1 - dB_1 - dL_1 = -JJ'dV + dJdJ'dV,$$

d. h. es ist um die Grösse $JJ'dV - dJdJ'dV$ mehr Wärme erzeugt worden, als dem Consum an chemischer Energie und dem Aufwand äusserer Arbeit entspricht.

Der Verlust an Wärme in der ersten Hälfte des Kreisprocesses wird aufgehoben durch den Gewinn während der zweiten Hälfte und bleibt für den ganzen Process das aufgestellte Princip aufrecht. Es gilt jedoch nicht mehr für jede Hälfte des Processes für sich, ausgenommen den in der Abhandlung über die Erhaltung der Kraft betrachteten Fall, in welchem eine der beiden Stromintensitäten und die Änderung der anderen gleich Null genommen ist, denn dann verschwinden die störenden Glieder.

Sind die beiden Stromstärken J und J' so gross und ihre Änderungen dJ und dJ' so klein, dass diese gegen die ersteren

vernachlässigt werden dürfen, so kann $JJ'dV$ auch als Mass der in der ersten Hälfte des Processes gewonnenen lebendigen Kraft und der während der zweiten Hälfte des Processes aufgewendeten Arbeit angenommen werden. Es lässt sich dann das gefundene Resultat in folgender Weise aussprechen: Die von den elektrodynamischen Kräften geleistete Arbeit erfordert den Verbrauch eines doppelten Äquivalentes von Wärme, die zur Überwindung der elektrodynamischen Kräfte aufgewendete Arbeit liefert das doppelte Äquivalent von Wärme.

Das Verhalten der elektrodynamischen Kräfte ist daher im allgemeinen ein ganz anderes, als das der elektromagnetischen. Denn bei den durch letztere erzeugten Bewegungen oder bei der Überwindung solcher Kräfte tritt für jedes Element einer Lagenänderung eine gleichzeitige vollständige Compensation von Arbeit und Wärme ein.

Es ist nun noch von Interesse, die Wirkungen der magnetischen Kräfte zu betrachten, da ja diese nach Ampère's Theorie ebenfalls als elektrodynamische zu betrachten sind.

Zwei Magnete bilden eine Quelle von lebendiger Kraft, welche thätig wird, sobald die Magnete ihrer Wechselwirkung folgen können. Die erzeugte lebendige Kraft erscheint als ein Gewinn, welcher von keinem gleichzeitigen Verbrauch einer äquivalenten Menge von Wärme oder einer andern wahrnehmbaren Action begleitet ist. Erst wenn man die Magnete in ihre ursprünglichen Lagen wieder zurückführt, ist eine der früher gewonnenen lebendigen Kraft äquivalente Arbeit aufzuwenden. Ebenso verhält es sich, wenn ein Magnet weiches Eisen anzieht und dadurch eine Arbeit leistet. Erst die Zurückführung des Eisens in seine ursprüngliche Lage bringt das Äquivalent der früher gewonnenen Arbeit wieder zum Verbrauch.

Es compensiren sich also bei diesen Processen, wie es zum Theil bei den elektrodynamischen der Fall ist, soweit es sich um wahrnehmbare Vorgänge handelt, zwei zeitlich getrennte Vorgänge aber der Art, dass immer Arbeit für Arbeit gewonnen oder geleistet wird. Eine Ausnahme gestattet der Fall der Anziehung weichen Eisens durch einen Magnet. Ist durch diese Anziehung Arbeit gewonnen, so kann das weiche Eisen auch

ohne Aufwand von Arbeit in seine ursprüngliche Lage gebracht werden, wenn man es vor der Wegführung so weit erhitzt, dass es seinen Magnetismus verliert, dann dasselbe in seine ursprüngliche Lage führt, wobei die Anziehung des Magneten nicht mehr zu überwinden ist, und in dieser Lage auf die ursprüngliche Temperatur wieder abkühlt. Bei diesem Processe wird Arbeit ohne Gegenaufwand von Arbeit gewonnen. Dieser Fall soll an einer anderen Stelle dieser Abhandlung in specielle Untersuchung genommen werden.

Um diese drei Wirkungsarten nochmals zusammenzufassen, hat man also

1. bei magnetischen Kräften Arbeitsgewinn ohne Wärmeaufwand oder Arbeitsaufwand ohne Wärmegewinn,
2. bei elektromagnetischen Kräften Arbeitsgewinn für den äquivalenten Wärmeaufwand oder Wärmegewinn für den äquivalenten Arbeitsaufwand,
3. bei elektrodynamischen Kräften Arbeitsgewinn für den doppelten äquivalenten Wärmeaufwand oder doppelten Wärmegewinn für den einfachen Arbeitsaufwand.

Es ist jedoch nicht zu übersehen, dass diese letzte Beziehung nicht allgemein, sondern nur für Ströme, welche die durch Bewegung erzeugten Inductionsströme an Intensität bedeutend übertreffen, giltig ist. So z. B. nähert sich das Gesetz der Arbeitsverwandlung immer mehr dem für elektromagnetische Kräfte giltigen, je kleiner die Intensität des Stromes in einem der beiden Leiter wird.

Bei den Wirkungen der aufgeführten drei Arten von Kräften treten übrigens noch andere Unterschiede auf, an die ich hier ebenfalls erinnern will.

Zwei Magnete, welche z. B. durch ihre wechselseitige Anziehung lebendige Kraft erzeugen, werden, während sie arbeiten, stärker. Sie werden schwächer, wenn sie unter Aufwand äusserer Arbeit von einander entfernt werden.

Bewegt ein elektrischer Strom einen Magnet, so wird der elektrische Strom, während er arbeitet, schwächer, der Magnet stärker. Das umgekehrte tritt ein, wenn der Magnet unter Aufwand von äusserer Arbeit gegen die elektromagnetischen Kräfte bewegt wird.

Endlich, bewegen sich zwei von elektrischen Strömen durchflossene Leiter in Folge ihrer elektrodynamischen Wechselwirkung, so werden beide Ströme schwächer, im Falle einer aufgezwungenen entgegengesetzten Bewegung aber beide stärker.

IV.

Die Untersuchung jeder der zwei Hälften des beschriebenen Processes für sich führt nun nothwendig zur Folgerung, dass die chemischen Kräfte einer Kette nicht nur zur Erzeugung von Wärme und lebendiger Kraft aufgewendet werden, sondern dass ihnen noch eine andere Leistung obliegt. Dies gilt, wenn die elektrodynamischen Kräfte Arbeit erzeugen. Im andern Falle aber, in welchem zur Ueberwindung der elektrodynamischen Kräfte Arbeit aufgewendet wird, wird nicht nur diese und die gleichzeitig von den chemischen Kräften entwickelte Energie in Wärme verwandelt, sondern es schliesst sich zugleich noch eine neue Wärmequelle auf.

Der Ausdruck für die in dem einen Falle verlorene, in dem andern Falle aber gewonnene Arbeitsgrösse, nämlich $JJ'dV$, ist die Zunahme des Potentials der beiden Leiter auf einander in dem ersten oder die Abnahme desselben im zweiten Falle. Es folgt also der Satz, dass das Potential der beiden Ströme auf einander eine reell existirende, aus den chemischen Kräften der Ketten erzeugte Energie darstellt, zu deren Vergrösserung neue Arbeit der chemischen Kräfte erfordert wird, deren Verkleinerung die Umwandlung dieser Arbeit in Wärme zur Folge hat.

Nebst dem Potentiale der beiden Ströme auf einander existirt aber noch für jeden Strom sein Potential auf sich selbst, welches für die Bewegungen der einzelnen Theile des Leiters gegen einander in ähnlicher Weise die von den elektrodynamischen Kräften geleistete oder zu ihrer Ueberwindung aufgewendete Arbeit ausdrückt, wie das Potential der beiden Leiter auf einander für die relative Bewegung dieser beiden. Das Potential des Stromes i auf sich selbst, ist dem Quadrate der Stromintensität gleich, multiplicirt mit einer von der Gestalt des Leiters

abhängigen Grösse. Sie soll künftig immer mit U bezeichnet werden, so dass $i^2 U$ das Potential des einen Stromes auf sich selbst bedeuten soll. Ebenso soll $i'^2 U'$ das Potential des zweiten Stromes auf sich selbst darstellen. Die Summe

$$i^2 U + i'^2 U' + ii' V$$

ist das Gesammtpotential des Systems der beiden Ströme.

Was nun für das Potential zweier Ströme auf einander gilt, nämlich, dass es eine reell existirende Energie ausdrückt, gilt auch für das Gesammtpotential, und wenn nur ein Strom vorhanden ist, für das Potential dieses auf sich selbst.

Es lässt sich dies auch durch eine der vorhergehenden ähnliche Betrachtung nachweisen.

In dem Leiter vom Widerstande w sei die constante Stromintensität J erzeugt durch die elektromotorische Kraft e. Können die einzelnen Leitertheile den elektrodynamischen Kräften folgen, so gewinnt man in der Zeit dt die Arbeit dL und zugleich hat der Strom während dt eine kleinere Intensität $J-dJ$. Wenn nun dA, dB, die während der Zeit dt in der Kette entwickelte chemische Energie, und die in derselben Zeit entwickelte Wärme bedeuten, so hat man

$$dA = e(J-dJ)dt$$
$$dB = w(J-dJ)^2 dt$$
$$dL = (J-dJ)^2 dU.$$

Führt man während eines zweiten Zeittheilchens dt die Leitertheile wieder in ihre ursprüngliche Position zurück, so hat der Strom während dieser Zeit die Intensität $J+dJ$, und bedeuten dA_1, dB_1, dL_1 die während dieses zweiten dt gelieferten Mengen von chemischer Energie, Wärme und äusserer Arbeit, so ist

$$dA_1 = e(J+dJ)dt$$
$$dB_1 = w(J+dJ)^2 dt$$
$$dL_1 = -(J+dJ)^2 dU.$$

Werden die Leitertheile am Ende des zweiten Zeittheilchens wieder festgehalten, so muss für den ausgeführten Kreisprocess

$$dA + dA_1 = dB + dB_1 + dL + dL_1$$

sein und man erhält nach Einsetzung der obigen Werthe

$$wdJ = 2J\frac{dU}{dt}$$

dieselbe Formel für die elektromotorische Kraft des Inductionsstroms, wie sie die Theorien von Weber und Neumann liefern.

Betrachtet man aber die beiden Hälften des ausgeführten Processes gesondert, so findet man unter Benützung des gefundenen Werthes von wdJ

$$dA - dB - dL = J^2 dU - dJ^2 dU$$
$$dA_1 - dB_1 - dL_1 = -J^2 dU + dJ^2 dU,$$

also im ersten Falle einen Mehrconsum von chemischer Energie, im zweiten Falle eine Mehrentwicklung von Wärme um eine Grösse, welche genähert die Zunahme des Potentials des Stromes auf sich selbst im ersten, die Abnahme im zweiten Falle bedeutet.

Es hat auch gerade die Untersuchung der Inductionsströme, welche ein Leiter bei Schwankungen der Stromintensität in sich selbst erzeugt, zuerst zur Annahme genöthigt, dass die chemischen Kräfte der Kette bei der Schliessung des Stromes eine in der gleichzeitig entwickelten Wärme nicht compensirte Arbeit zu leisten haben, welche dann erst bei Öffnung des Stromes wieder als Wärme in der Leitung zum Vorschein kommt. Es ist dies von Helmholtz [1] und Koosen [2] dargethan worden und schon früher hat Thomson [3] einen dem Potential eines Stromes auf sich selbst entsprechenden Ausdruck als actuelle Energie des Stromes in Rechnung gezogen.

Es hat auch Thomson schon längst die Beziehungen des Principes der Erhaltung der Kraft zu den Gesetzen der durch Magnete und elektrische Ströme erzeugten Bewegungen untersucht, es haben aber seine Arbeiten wenig Verbreitung gefunden. Ich kenne auch von denselben nicht mehr, als die Andeutungen, welche in Tait's Geschichte der mechanischen Theorie der

---

[1] Poggendorff's Annalen XCI. 258.

[2] Pogg. Ann. XCI. 427.

[3] Philosophical Magazine (4. sér.) V. 393.

Wärme sich finden. Es wird daselbst mitgetheilt, dass Thomson die Energie eines elektrischen Stromes als actuelle Energie, d. h. als Bewegung von Materie betrachtet. Diese Materie kann aber nicht die im Stromleiter circulirende Elektricität allein sein, weil die Energie des Stromes abhängt von der Form der Leitung, von der Natur des umgebenden Mittels, von der Beschaffenheit der in der Umgebung befindlichen Körper. Thomson sucht diese Bewegung nicht in dem Leiter selbst, sondern in dem Raume, über welchen sich die magnetische Action des Stromes erstreckt, und er gibt die Gründe an, aus denen folgt, dass diese Bewegung eine rotatorische sei, um die magnetischen Kraftlinien als Axen.

Die Centrifugalkraft, die diesen Wirbelbewegungen zukömmt, ist auch die Ursache der magnetischen Anziehung und Abstossung. Die Abhandlung selbst, welche diese Entwicklungen enthält, ist citirt als Artikel Magnetismus in Nichol's Cyclopaedia.

Der Satz, dass das Gesammtpotential zweier Ströme eine Energie (intrinsic energy of currents) darstellt, ist auch in Maxwell's Dynamical Theory of the electro-magnetic field [1] entwickelt. Er ist auch von Briot [2] aus der Weber'schen Theorie der Induction abgeleitet worden und findet sich auch in der Abhandlung von Helmholtz über die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper [3]. Ich habe übrigens diesen Satz selbstständig auf die hier vorgetragene Weise gefunden.

Eine Ansicht über die Natur dieser Energie ist nur von Thomson ausgesprochen worden. Ob diese die richtige ist, oder ob die Energie nur in einer relativen Verschiebung der Theilchen des umgebenden Mediums oder in einer andern Form von Arbeit bestehe, braucht hier nicht entschieden zu werden. Ich will im Folgenden auch nur den allgemeinen, durch seine Einfachheit sich empfehlenden Ausdruck Potential für diese Energie gebrauchen, und z. B. sagen, die chemischen Kräfte einer Kette erzeugen ein Potential oder ein Potential verwandelt sich in Wärme.

---

[1] Philosophical Transactions. London CLV. 470.

[2] Théorie mécanique de la chaleur.

[3] Borchardt's Journal LXXII. 71.

V.

Mit Hilfe des Satzes, dass die Potentialerzeugung und demnach auch jede Potentialvermehrung an und für sich einen Arbeitsaufwand erfordert, und umgekehrt jede Potentialvernichtung und demnach auch Potentialverminderung eine Entwicklung von Arbeit oder Wärme bedingt, lassen sich die Gesetze der Induction in allgemeinster Weise entwickeln.

So werden die Gesetze der inductorischen Wirkungen, die ein Leiter auf sich selbst ausüben kann, auf folgende Weise gewonnen.

Die in dem Leiter thätige elektromotorische Kraft e liefert in der Zeit dt, wenn während derselben der Strom i den Leiter durchströmt, die Arbeitsgrösse

$$eidt.$$

Die in derselben Zeit in der Leitung entwickelte Wärme ist

$$wi^2dt.$$

Erfährt die Leitung während dieser Zeit in Folge der zwischen den einzelnen Theilen der Leitung thätigen elektrodynamischen Kräfte eine Formänderung, so wird die dabei gewonnene lebendige Kraft oder Arbeit ausgedrückt durch die Änderung des Potentials des Leiters auf sich selbst, die Stromstärke constant gedacht, also durch

$$i^2dU,$$

zugleich erfährt auch das Potential als Ganzes, da auch die Stromintensität im allgemeinen sich ändert, den Zuwachs

$$d(i^2U)$$

und es ist

$$eidt = wi^2dt + i^2dU + d(i^2U)$$

zu setzen, woraus

$$wi = e - 2i\frac{dU}{dt} - 2U\frac{di}{dt}$$

folgt. Darin stellt $2i\frac{dU}{dt}$ die elektromotorische Kraft des durch

die Formänderung des Leiters, $2U\frac{di}{dt}$ die elektromotorische Kraft des durch die Änderung der Stromintensität erzeugten Inductionsstromes.

Auf dieselbe Art erhält man auch die Gleichungen für die Bewegung der Elektricität in zwei Leitern. Sind in diesen die elektromotorischen Kräfte e und e' thätig, sind i und i' die Stromstärken zur Zeit t, so liefern die chemischen Kräfte der Ketten in der Zeit dt die Arbeitsmengen

$$(ei+e'i')dt.$$

Daraus werden in derselben Zeit in den beiden Leitungen die Wärmemengen

$$(wi^2+w'i'^2)dt$$

entwickelt.

Werden die einzelnen Theile der Leiter und beide Leiter gegeneinander durch die elektrodynamischen Kräfte bewegt, so ist die gewonnene lebendige Kraft

$$i^2dU+i'^2dU'+ii'dV$$

wenn wieder U das Potential des ersten, U' das des zweiten Leiters auf sich selbst, V das Potential der beiden Leiter auf einander unter der Voraussetzung, dass die Stromstärken der Einheit gleich sind, bedeutet.

Endlich ist aus den chemischen Kräften noch die allgemeine Änderung des Gesammtpotentials zu leisten, nämlich

$$d(i^2U+i'^2U'+ii'V)$$

man hat sonach die Gleichung

$$(ei+e'i')dt = (wi^2+w'i'^2)dt+i^2dU+i'^2dU'+ii'dV$$
$$+d(i^2U+i'^2U'+ii'V)$$

welche man auf die Form

$$\left[e-wi-\frac{d}{dt}(2iU+i'V)\right]i+\left[e'-w'i'-\frac{d}{dt}(2i'U'+iV)\right]i'=0$$

bringen und in folgende zwei zerlegen kann:

$$(8)\qquad \begin{aligned} e &= wi + \frac{d}{dt}(2iU + i'V) \\ e' &= w'i' + \frac{d}{dt}(2i'U' + iV) \end{aligned}$$

welche zwei Gleichungen auch schon bei Maxwell und Briot sich finden.

Zu diesen beiden kommt nun noch die Gleichung für die den beiden Stromleitern von den elektrodynamischen und äusseren Kräften ertheilte lebendige Kraft. Wird die Arbeit, welche die äusseren Kräfte in der Zeit dt leisten mit dA bezeichnet, der Zuwachs, den die Leiter an lebendiger Kraft in dieser Zeit dt erfahren, mit dL, so ist dieser durch

$$(9)\qquad dL = dA + i^2 dU + i'^2 dU' + ii' dV$$

bestimmt.

VI.

Aus den vorhergehenden Formeln lassen sich nun die Aufwände an chemischer Energie in jeder der beiden Ketten berechnen. Multiplicirt man die erste derselben mit idt, so folgt

$$\begin{aligned} eidt &= wi^2 dt + id(2iU + i'V) \\ &= wi^2 dt + i^2 dU + d(i^2 U) + id(i'V). \end{aligned}$$

Aus den chemischen Kräften der ersten Kette wird also die in ihrer Strombahn entwickelte Wärme die ganze bei Änderungen dieser Bahn entwickelte lebendige Kraft und die Zunahme des Potentials dieser Bahn auf sich selbst geliefert, nebstdem aber auch ein Theil der durch Änderung in der relativen Lage der beiden Leiter hervorgerufenen lebendigen Kraft und des damit verbundenen Wachsthums des Potentials der beiden Leiter auf einander. Nur zu den letzten beiden Grössen tragen beide Ketten gemeinschaftlich bei und zwar die erste den Antheil $id(Vi')$, die zweite den Antheil $i'd(Vi)$.

Bleiben beide Leiter ihrer Gestalt und relativen Lage nach unverändert, so ist V constant, die beiden Ketten haben dann keine lebendige Kraft, sondern ausser der Wärme nur noch die Potentialvergrösserung zu liefern, die erste den Antheil $Vidi'$, die zweite den Antheil $Vi'di$, also trägt jede der beiden Ketten in dem

Verhältnisse zur Stärke ihres Stromes und des Wachsthums des Stromes der anderen zu dieser gemeinsamen Leistung bei.

Es soll nun der specielle Fall betrachtet werden, dass eine Kette in der Nähe einer zweiten geschlossenen Leitung, welche aber keine eigenthümliche elektromotorische Kraft besitzt, geschlossen wird. Die Gleichungen (8) vereinfachen sich dann in

$$e = wi + 2U\frac{di}{dt} + V\frac{di'}{dt}$$

$$0 = w'i' + 2U'\frac{di'}{dt} + V\frac{di}{dt}$$

mit der Bedingung, dass zu Beginn der Zeit sowohl $i = 0$ als auch $i' = 0$ ist. Da U, U', V in diesem Falle constant sind, so lassen sich die Gleichungen leicht integriren. Es ergibt sich, dass der Strom i allmälig bis zur Stärke $\frac{e}{w}$ ansteigt, i' hat nur während des Wachsthums des i von Null verschiedene und zwar negative Werthe, es ist der Strom i' dem Strom i entgegengesetzt gerichtet.

Multiplicirt man die erste der Gleichungen mit idt, die zweite mit $i'dt$ und integrirt beide von 0 bis t, so wird

$$\int_0^t eidt = \int_0^t wi^2dt + Ui^2 + V\int_0^t idi', \quad 0 = \int_0^t w'i'^2dt + U'i'^2 + V\int_0^t i'di.$$

Hat die Zeit t einen so grossen Werth, dass für selbe i schon als constant und demnach $i' = 0$ angenommen werden kann, so ist für dieses t

$$U'i'^2 = 0 \quad Vii' = 0.$$

Addirt man beide Gleichungen, so bleibt

$$\int_0^t eidt = \int_0^t wi^2dt + \int_0^t w'i'^2dt + Ui^2,$$

d. h. aus den chemischen Kräften der ersten Kette ist sowohl die in ihrer Leitung als auch die im Nebendrahte erzeugte Wärme und nebstdem noch das Potential der ersten Leitung auf sich selbst erzeugt worden.

Besonders merkwürdig ist der Fall, in welchem in einer Kette durch die Anwesenheit einer zweiten die Strombewegung nicht beeinflusst wird. Er tritt ein, wenn Vi' constant ist, dann verwandelt sich die erste der Gleichungen (8) in

$$e = wi + \frac{d}{dt}(2Ui)$$

in welcher keine von der zweiten Kette abhängige Grösse vorkommt.

Es ist nun Vi' constant, wenn z. B. die beiden Leitungen unverändert gehalten werden, also U, U', V constant bleiben und auch die Stromstärke i' constant ist. Die zweite der Gleichungen (8) gibt aber dann

$$e' = w'i' + V\frac{di}{dt}$$

es muss also die elektromotorische Kraft der zweiten Kette eine variable sein, sie muss steigen, wenn der Strom in der ersten Kette steigt und umgekehrt. Wird z. B. die erste Kette neben der zweiten geschlossen, so entsteht in Folge der Anwesenheit der zweiten kein Inductionsstrom in der ersten, da jetzt die Erzeugung des Potentials beider Leitungen auf einander die zweite Kette allein übernimmt.

Werden die beiden Leitungen in derselben Gestalt erhalten aber relativ gegen einander verschoben, so bleiben U und U' constant, nicht aber V. Die erste der Gleichungen (8) verwandelt sich dann in

$$e = wi + 2U\frac{di}{dt} + i'\frac{dV}{dt}.$$

Die in der Zeit dt in der ersten Kette entwickelte chemische Energie ist

$$eidt = wi^2dt + d(Ui^2) + ii'dV$$

es wird also die aus den elektrodynamischen Kräften erzeugte lebendige Kraft von den chemischen Kräften der ersten Kette geliefert, die Potentialvermehrung wieder von den Kräften der zweiten Kette.

Es lehrt die erste der Gleichungen (8.), dass die erste Kette immer nur die durch die elektrodynamischen Kräfte erzeugte lebendige Kraft allein aus ihrer chemischen Energie zu liefern hat, wenn die Stromintensität in der zweiten Leitung constant erhalten wird. Letzteres ist möglich durch das Vorhandensein einer variablen elektromotorischen Kraft, deren Grösse nach dem Bedarf sich richtet. Es ist dies aber auch bei einer constanten elektromotorischen Kraft in der zweiten Leitung möglich, wenn die Gestalt dieser Leitung in bestimmter Weise sich ändern kann, so dass das Potential derselben auf sich selbst einer Verminderung oder Vergrösserung fähig ist. Wie die zweite der Gleichungen (8) lehrt, kann bei constantem e' und i' das gemeinsame Potential Vii' wachsen auf Kosten des Potentials der zweiten Leitung auf sich selbst, ohne dass von der ersten Kette dabei mehr als die erzeugte lebendige Kraft zu leisten ist.

Dieser Fall entspricht nun dem Verhalten der elektromagnetischen Wirkungen und ist damit der Weg angezeigt, wie sich diese als specieller Fall der elektrodynamischen werden darstellen lassen. Diese Darstellung soll nun im folgenden ausgeführt werden.

VII.

An die Stelle des zweiten Stromes, dessen Intensität oben mit i' bezeichnet würde, setze ich ein System von Strömen von gleicher und constanter Intensität, die ebenfalls i' heissen soll. Die Bahnen dieser Ströme sollen ohne Widerstand sein, es sind daher zur ungeschwächten Fortdauer dieser Ströme keine elektromotorischen Kräfte nöthig. Der Art sind die Ströme, welche nach Ampère die Moleküle der Magnete umfliessen.

Die Potentiale der einzelnen Ströme dieses Systems auf sich selbst sollen bezeichnet werden mit

$$i'^2 u_1,\ i'^2 u_2,\ i'^2 u_3,\ \ldots\ldots$$

die Potentiale je zweier auf einander mit

$$i'^2 v_{12},\ i'^2 v_{13},\ i'^2 v_{23},\ \ldots\ldots$$

endlich ihre Potentiale auf den Strom i mit

$$ii'V_1,\ ii'V_2,\ ii'V_3,\ \ldots\ldots$$

An die Stelle der Gleichungen (8) tritt jetzt folgendes System von Gleichungen:

$$e = wi + \frac{d}{dt}(2iU + i'V_1 + i'V_2 + \ldots\ldots)$$

$$0 = \frac{d}{dt}(2i'u_1 + i'v_{12} + i'v_{13} + \ldots + iV_1)$$

$$0 = \frac{d}{dt}(2i'u_2 + i'v_{12} + i'v_{23} + \ldots + iV_2).$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Multiplicirt man die Gleichungen von der zweiten an alle mit i' und addirt sie sodann, so folgt

$$0 = \frac{d}{dt}\Big[2i'^2(u_1 + u_2 + \ldots + v_{12} + v_{13} + \ldots) + ii'(V_1 + V_2 + \ldots)\Big].$$

Es ist aber, wenn man

$$i'^2(u_1 + u_2 + \ldots + v_{12} + v_{13} + \ldots) = P$$

setzt, P das Gesammtpotential des angenommenen Stromsystems. Ferner ist, wenn man

$$i'(V_1 + V_2 + \ldots) = W$$

setzt, W das Potential des angenommenen Stromsystems auf den ersten Stromleiter, dieser aber statt vom Strom i von der Einheit des Stromes durchflossen gedacht. Die obigen Gleichungen kann man nunmehr ersetzen durch

$$e = wi + \frac{d}{dt}(2iU + W) \tag{10}$$

$$0 = \frac{d}{dt}(2P + iW) \tag{11}$$

und die Gleichung (9) verwandelt sich in

$$dL = dA + i^2dU + dP + idW. \tag{12}$$

Was die Vorgänge in der vom Strom i durchflossenen Leitung anbetrifft, so sind dieselben im jetzigen Falle die nämlichen, wie in dem eingangs citirten, in welchem ein Strom einen Magnet bewegt. Multiplicirt man nämlich die Gleichung (10) mit idt, so wird

$$eidt = widt + 2id(iU) + idW$$

und diese Formel fällt mit der Formel (3) zusammen bis auf das Glied $2id(iU)$, welches in (3) nicht vorkommt, weil bei Aufstellung dieser auf die Induction eines Leiters auf sich selbst keine Rücksicht genommen worden ist.

Ein Magnet lässt sich also in Bezug auf seine inductorische Wirkung auf einen Stromleiter ersetzen durch ein System von Strömen, welche in widerstandsfreien Bahnen mit unveränderlicher Stärke fliessen.

Die eingehendere Discussion der Vorgänge, welche die Wirkungen elektromagnetischer Kräfte begleiten, wird in einem späteren Abschnitte gegeben werden.

VIII.

Ich will nun annehmen, dass die einzelnen Bahnen der Ströme des Systems derart orientirt sind, dass die elektrodynamischen Wirkungen derselben nach aussen sich wechselseitig aufheben. Zwei sehr nahe an einander in einer Ebene liegende Ströme, welche unendlich kleine aber gleich grosse Flächen in entgegengesetztem Sinne umfliessen, entsprechen dieser Bedingung und auch ein System von solchen Strompaaren oder Gruppen von Strompaaren. Da in Bezug auf die Wirkung nach aussen jeder Elementarstrom durch einen Elementarmagnet ersetzt werden kann, so stellt jedes solche Strompaar ein astatisches Magnetpaar vor.

Ein System von solchen, übrigens beliebig orientirten Strompaaren ist ebenfalls astatisch und kann als Repräsentant eines Stückes weichen Eisens dienen. Gewöhnlich pflegt man ein Stück weichen Eisens als ein Aggregat von sehr vielen nach allen möglichen Richtungen orientirten Elementarmagneten zu betrachten oder was dasselbe ist, als ein System von Molekülen, welche

von elektrischen Strömen umflossen werden, so dass die Bahnen der einzelnen Molekularströme in allen möglichen Ebenen liegen. Die Vorstellung der astatischen Moleküle ist jedoch insofern einfacher, weil sie unmittelbar zur Folgerung führt, dass jede die Astasie aufhebende Verschiebung der Bestandtheile eines solchen Moleküls einen Aufwand von Arbeit erfordert.

Das astatische Stromsystem sei für sich allein unter dem Einfluss der inneren elektrodynamischen und vielleicht noch anderer Kräfte im Gleichgewichte. Wird nun in der Nähe dieses Systems eine Kette geschlossen, so kommen zu den inneren Kräften die äusseren elektrodynamischen hinzu und diese bewirken nun eine Änderung in den Lagen der einzelnen Theile jedes Strompaares und stellt sich schliesslich eine neue Gleichgewichtsstellung im Innern des Systems her.

In der ursprünglichen Lage des Systems war seine Wirkung nach aussen Null, also auch die mit W bezeichnete Grösse und somit auch das gemeinsame Potential iW. Während der Überführung des Systems in die neue Lage wird gemeinsames Potential erzeugt, und zwar ist der Zuwachs desselben während eines Zeitelementes dt bestimmt durch $d(iW)$.

Zugleich ändert sich aber auch das Potential des Stromsystems auf sich selbst und zwar derjenige Theil desselben, welcher oben mit

$$i'^2(v_{12}+v_{13}+v_{23}+\ .\ .\ .\ )$$

bezeichnet wurde. Es ist nun, da i' constant ist und auch die Potentiale der einzelnen Elementarströme auf sich selbst als unveränderlich angenommen werden

$$i'^2 d(v_{12}+v_{13}+v_{23}+\ .\ .\ .\ ) = dP.$$

Nach Gleichung (11) ist nun

$$dP = -\tfrac{1}{2}d(iW).$$

Die Abnahme des Potentials des Stromsystems auf sich selbst bildet also das halbe Äquivalent der Zunahme des gemeinsamen Potentials. Die andere Hälfte des Äquivalentes muss daher von den chemischen Kräften der Kette geliefert werden.

Der Aufwand an chemischer Energie ist aber nach Gleichung (10) gegeben durch idW.

Kommen nun ausser den äusseren und inneren elektrodynamischen Kräften keine anderen ins Spiel, erhalten auch weder der erste Stromleiter noch die einzelnen Leiter des Stromsystems eine lebendige Kraft, so ist in der Gleichung (12)

$$dL = dA = i^2 dU = 0$$

zu setzen und es bleibt

$$idW + dP = 0$$

es folgt also daraus

$$idW = -dP = \tfrac{1}{2} d(iW) \tag{13}$$

d. h. die chemischen Kräfte der Kette erzeugen die zweite Hälfte des gemeinsamen Potentials und haben weiter keine andere durch die Anwesenheit des Stromsystems bedingte Leistung zu liefern.

Aus der Formel (13) folgt aber auch

$$idW = Wdi$$

und wenn man unter k die Integrationsconstante versteht

$$W = ki \tag{14}$$

Ferner folgt aus (13) mit Benützung von (14) die gesammte von den chemischen Kräften zur Überführung des Stromsystems in die Position, in welcher das gemeinsame Potential den Endwerth iW hat, zu leistende Arbeit

$$\int idW = P_0 - P = \tfrac{1}{2} iW = \tfrac{1}{2} ki^2 \tag{15}$$

worin P_0 den Anfangswerth des Potentials des Stromsystems auf sich selbst bedeutet.

Die Formeln (14) und (15) stellen zwei merkwürdige Sätze dar, welche für die Vorgänge bei der Magnetisirung des weichen Eisens auch durch andere Betrachtungen schon gefunden worden sind.

Durch die Grösse W ist wenigstens bei schwacher Magnetisirung die Stärke der Fernwirkung des magnetisirten Eisens

bestimmt, diese ist daher, wie die Formel (14) lehrt, der Intensität des magnetisirenden Stromes proportional.

Den während der Magnetisirung des weichen Eisens in der Kette gemachten Mehraufwand von chemischer Energie nennt man die Magnetisirungsarbeit. Diese ist nach der Formel (15) proportional dem Quadrate der Intensität des magnetisirenden Stromes und sie ist gleich dem halben Potential des magnetisirten Eisens auf den magnetisirenden Strom.

Während der Magnetisirung nimmt das Gesammtpotential des Stromsystems, welches das weiche Eisen repräsentirt, um $P_0 - P$ ab. Diese Grösse ist äquivalent dem, was man in der Theorie des Magnetismus Potential der getrennten magnetischen Fluida auf einander nennt. Nennen wir diese Grösse magnetisches Potential, so lässt sich die Formel (15) in die zwei Sätze zusammenfassen:

Das magnetische Potential des magnetisirten Eisens ist gleich seinem halben elektromagnetischen Potential auf den magnetisirenden Strom.

Die Magnetisirungsarbeit ist gleich dem magnetischen Potential.

Mit Hilfe der Formel (14) ist es nun möglich, die Vorgänge in der Leitung des magnetisirenden Stromes in sehr einfacher Weise zu berechnen. Setzt man den durch (14) gegebenen Werth von W in (10), so wird

$$e = wi + 2\frac{d}{dt}(iU) + k\frac{di}{dt}.$$

Wird die Gestalt des Stromes unverändert erhalten, ist also U constant, so ist

$$e = wi + (2U + k)\frac{di}{dt}. \tag{16}$$

Das Integral dieser Gleichung ist unter der Bedingung, dass

$$i = 0 \text{ für } t = 0$$

gegeben durch die Formel

$$i = \frac{e}{w}\left(1 - e^{-\frac{wt}{2U+k}}\right)$$

und gibt diese Formel das Gesetz des Anwachsens des Stromes bis zum Endwerthe $\frac{e}{w}$, wenn er in der Nähe eines Eisenkerns geschlossen wird.

Ist dieser Endwerth erreicht, so tritt keine weitere Veränderung im weichen Eisen mehr ein, es bleibt mit i auch W und P constant.

Wird der Strom unterbrochen, setzt man also die elektromotorische Kraft in der Gleichung (16) $= 0$ und

$$i = \frac{e}{w} \text{ für } t = 0$$

so erhält man

$$i = \frac{e}{w}\, e^{-\frac{wt}{2U+k}}$$

welche Formel das Gesetz für den Verlauf des Öffnungsstromes darstellt. Die von diesem entwickelte Wärmemenge ist

$$\int_0^\infty wi^2 dt = \frac{e^2}{w^2}\left(U + \frac{k}{2}\right) = i^2 U + \frac{ki^2}{2}$$

und stellt eben das letzte Glied dieser Formel den durch Umwandlung der Magnetisirungsarbeit gewonnenen Wärmeantheil dar.

IX.

Ist die Wechselwirkung zwischen dem äusseren elektrischen Strom und den Elementarströmen in dem angenommenen System nicht auf die Herbeiführung einer neuen Gleichgewichtslage der letzteren allein beschränkt, sondern tritt auch eine relative Bewegung der Stromleiter gegen einander ein, so wird etzt nicht blos gemeinsames Potential, sondern auch lebendige

Kraft erzeugt. Dies ist z. B. der Fall, wenn ein Stück weichen Eisens von einem Strome angezogen wird.

Da nun die Gleichung (11) immer besteht, die Abnahme des Potentials des Stromsystems auf sich selbst also wieder nur das halbe Äquivalent der gleichzeitigen Zunahme des gemeinsamen Potentials darstellt, so haben die andere Hälfte des gemeinsamen Potentials und nebstbei noch die gewonnene lebendige Kraft die chemischen Kräfte der Kette zu liefern. Es besteht also die Gleichung

$$idW = \tfrac{1}{2}d(iW) + dL \tag{17}$$

welche auch aus den Gleichungen (11) und (12) unmittelbar folgt.

Aus dieser Gleichung erhält man

$$dL = idW - \tfrac{1}{2}d(iW) = \tfrac{1}{2}d(iW) - Wdi.$$

Ist das weiche Eisen zu Beginn der Zeit in unendlicher Entfernung, der Anfangswerth von W also $= 0$, so wird die bei Annäherung gewonnene lebendige Kraft

$$L = \frac{iW}{2} - \int Wdi.$$

Ist die Intensität des Stromes i so gross, dass dagegen die Änderungen derselben während der Annäherung des weichen Eisens vernachlässigt werden können, so wird näherungsweise

$$L = \frac{iW}{2}$$

und ist dieser Ausdruck zugleich die mit Magnetisirungsarbeit bezeichnete Grösse, zugleich der Endwerth des magnetischen Potentials des weichen Eisens.

Man hat also den Satz: Die lebendige Kraft, welche ein Strom einem aus unendlicher Ferne angezogenen Eisenstück ertheilt, ist gleich dem halben Endwerthe des elektromagnetischen Potentials.

Der gesammte von den chemischen Kräften der Kette geleistete Mehraufwand von Arbeit ist nun

$$\int idW = \frac{iW}{2} + L = iW - \int Wdi$$

und näherungsweise

$$\int idW = iW$$

also doppelt so gross als in dem Falle, wenn der Strom in der Nähe des weichen Eisens geschlossen wird.

Dieselbe Arbeit, welche bei Annäherung des weichen Eisens von den chemischen Kräften der Kette geleistet wird, kommt wieder als Wärme in der Strombahn zum Vorschein, wenn das weiche Eisen vom Strom wieder entfernt wird. Diese Entfernung ist aber nur unter Aufwand von äusserer Arbeit möglich. Es ist nun leicht zu übersehen, dass diese das Äquivalent der früher gewonnenen lebendigen Kraft ist.

Kommen äussere Kräfte neben den elektrodynamischen in Mitwirkung, so tragen auch diese zur Erzeugung des gemeinsamen Potentials und zur Erzeugung von lebendiger Kraft bei. Statt der Gleichung (17) hat man dann die folgende

$$idW + dA = \tfrac{1}{2}d(iW) + dL \tag{18}$$

worin dA das Element der Arbeit der äusseren Kräfte bedeutet.

Werden diese äusseren Kräfte nur zur Überwindung der elektrodynamischen angewendet, wie beim Fortziehen eines Eisenstückes von einem Strom, so ist $dL = 0$ und es bleibt für diesen Fall

$$idW + dA = \tfrac{1}{2}d(iW). \tag{19}$$

Man erhält daraus

$$dA = -\tfrac{1}{2}d(iW) + Wdi.$$

Wird das Eisen in unendliche Entfernung gezogen, so ist der Endwerth von iW Null, es wird

$$A = \frac{iW}{2} + \int Wdi$$

entsprechend der Formel (17) und näherungsweise

$$A = \frac{iW}{2}$$

Ferner wird die von den chemischen Kräften geleistete Arbeit

$$\int i dW = -\frac{iW}{2} - A = -iW - \int W di$$

und näherungsweise

$$\int i dW = -iW$$

worin das negative Zeichen eben die Aufnahme von Arbeit in die Kette oder einen Überschuss von Wärmeentwicklung bedeutet.

Die Anziehung des Eisens durch den Strom liefert also zuerst lebendige Kraft für chemische Arbeit oder Wärme und bei der Entfernung des Eisens erhält man wieder Wärme für Arbeit.

Man kann aber einen Kreisprocess auch so einleiten, dass man lebendige Kraft gewinnt, ohne in der zweiten Hälfte des Processes wieder mechanische Arbeit aufwenden zu müssen, wenn man nach geschehener Annäherung des weichen Eisens den Strom öffnet. Dann kann das weiche Eisen ohne Arbeitsaufwand in unendliche Ferne gebracht werden. Wird dann der Strom wieder geschlossen, so kann die Gewinnung von lebendiger Kraft von neuem beginnen.

Wird der Strom geöffnet, so sinkt der Werth des elektromagnetischen Potentials von iW auf Null, das Potential des weichen Eisens auf sich selbst steigt um $\frac{1}{2}iW$, es bleibt also noch $\frac{1}{2}iW$ an Potential übrig, welches in der Strombahn als Wärme auftritt und diese ist jetzt kleiner als der Aufwand von chemischer Arbeit während der Annäherung des Eisens war, und zwar kleiner um das Äquivalent der früher gewonnenen lebendigen Kraft.

Man kann aber das weiche Eisen auch in der Nähe des Stromes dadurch entmagnetisiren, dass man dasselbe bis zu jener Temperatur erhitzt, bei welcher Eisen seine magnetischen Eigenschaften verliert. Das so erhitzte Eisen lässt sich nun ohne Aufwand von Arbeit in unendliche Entfernung von dem Strom bringen. Entzieht man ihm dort die Wärme wieder, so wird es vom Strom neuerdings angezogen und kann dieser Process wieder zur Umwandlung von chemischer Arbeit in mechanische verwendet werden.

Da aber bei diesem Processe die Elementarströme nicht in Folge der abnehmenden Intensität des äusseren Stromes in ihre Lagen zurückkehren, sondern der Wirkung der äusseren elektrodynamischen Kräfte entgegen in diese Lagen zurückgeführt werden, so ist die Entmagnetisirung des Eisens durch Wärmezufuhr nicht analog der Entmagnetisirung durch Öffnung des Stromes, sondern analog der Entmagnetisirnng des Eisens durch Entfernung desselben vom geschlossenen Strome unter Aufwand von äusserer Arbeit.

Es gilt für diesen Fall die Gleichung (19) in welcher dA das Element jenes Theils der zugeführten Wärme bedeutet, welcher zur Überwindung der elektrodynamischen Kräfte verwendet wird. Zur Erwärmung des magnetisirten Eisens ist also mehr Wärme erforderlich, als zur gleich starken Erwärmung des unmagnetischen. Wäre dies nicht der Fall, so könnte man zwar durch den beschriebenen Process nicht Arbeit aus nichts erzeugen, wohl aber durch den ähnlichen, in welchem an Stelle des magnetisirenden Stromes ein Stahlmagnet gesetzt wird.

X.

Unter den Fällen, in welchen äussere Kräfte neben den elektrodynamischen in Action treten, sind von besonderer Wichtigkeit jene, in welchen diese Kräfte Molekularkräfte sind von der Beschaffenheit, wie sie in Stahlmagneten vorkommen. Sie wirken den inneren elektrodynamischen Kräften des Stromsystems entgegen und verhindern, dass die Elementarströme nach Aufhören der magnetisirenden Kräfte in jene Lagen zurückkehren, welche sie vor der Magnetisirung inne hatten. Eben so arbeiten sie bei einer weiteren Verdrehung der Elementarströme im Sinne einer stärkeren Magnetisirung mit. Man nennt diese Molekularkräfte gewöhnlich Coërcitivkräfte.

Wenn man nun ebenfalls den Stromleiter von unveränderlicher Form annimmt und unter dA das Element der von den Coërcitivkräften geleisteten Arbeit versteht, so gibt die Gleichung (12)

$$idW + dP + dA = dL. \tag{20}$$

Es gibt nun zwei Grenzfälle. Durch den ersten, in welchem

$$dA = 0$$

und der schon abgehandelt ist, wird das absolut weiche Eisen repräsentirt.

Durch den zweiten, in welchem die Coërcitivkräfte mit den inneren elektrodynamischen Kräften fortwährend im Gleichgewichte bleiben, soll ein Magnet aus hartem Stahl repräsentirt sein. Für diesen Fall ist dann, weil dP auch die Arbeit der inneren elektrodynamischen Kräfte darstellt

$$dP + dA = 0. \tag{21}$$

Für diesen Fall gibt die Gleichung (20)

$$idW = dL$$

und wenn Strom und Magnet fest sind, also keine Bewegung eingeleitet werden kann,

$$idW = 0$$

d. h. ein ruhender Magnet übt auf einen ruhenden Leiter keine inductorische Wirkung, auch wenn im Leiter der Strom erst geschlossen oder geöffnet wird.

Wird aber der Magnet durch den Strom bewegt oder umgekehrt, so hat die erzeugte lebendige Kraft ihr ganzes Äquivalent in der chemischen Arbeit der Kette.

Für einen starken Strom hat man, wenn der Magnet aus unendlicher Ferne angezogen wird, angenähert

$$L = iW.$$

Die erzeugte lebendige Kraft ist doppelt so gross als die bei demselben Endwerthe des elektromagnetischen Potentials von einem Eisenstück gewonnene lebendige Kraft.

Nähert sich der Magnet dem Strom, so wächst das elektromagnetische Potential um $d(iW)$, das halbe Äquivalent dieses Wachsthums liegt in der Abnahme des Potentials des Magneten auf sich selbst, die andere Hälfte des Äquivalentes

bildet aber die Arbeit der Coërcitivkräfte, welche nach (21) bestimmt ist durch

$$dA = -dP = \tfrac{1}{2}d(iW).$$

XI.

So wie nun die Vorgänge bei den Arbeitsleistungen elektromagnetischer Kräfte und die damit zusammenhängenden Gesetze der elektromagnetischen Induction zurückgeführt worden sind auf die allgemeinen, für die elektrodynamischen Wirkungen geltenden Gleichungen (8 und 9), so lassen sich endlich noch die analogen Gesetze für die Wechselwirkung von Magneten aus denselben Gleichungen ableiten.

Es müssen dann beide bei der Ableitung der Gleichungen (8) angenommene Ströme i und i' ersetzt werden durch Systeme von Strömen, welche in widerstandslosen Bahnen ohne gleichzeitig wirkende elektromotorische Kräfte fortwährend mit unveränderlicher Intensität kreisen. Die Gleichungen (9) gehen dann über in

$$\frac{d}{dt}(2i^2U + ii'V) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(2i'^2U' + ii'V) = 0$$

oder wenn man abkürzend

$$i^2U = P, \quad i'^2U' = P', \quad ii'V = Q$$

setzt, so dass P das Potential des ersten, P' das Potential des zweiten Systems auf sich selbst, endlich Q das Potential der beiden Systeme auf einander bezeichnet,

$$\begin{aligned} d(2P + Q) &= 0 \\ d(2P' + Q) &= 0 \end{aligned} \qquad (22)$$

woraus man

$$\begin{aligned} dP = dP' &= -\tfrac{1}{2}dQ \\ dP + dP' + dQ &= 0 \end{aligned} \qquad (23)$$

erhält.

Bei den gegenseitigen Verschiebungen zweier Systeme constanter Ströme ändern sich die Potentiale der beiden auf sich selbst immer um gleiche Grössen und die Summe der Abnahmen dieser beiden ist immer gleich der Zunahme des Potentials der beiden Systeme auf einander. Es ist vielleicht nicht überflüssig, zur Erklärung dieses Satzes folgende Bemerkung beizufügen. Die Abnahme des Potentials des Magnetes auf sich selbst hat nämlich zur Folge, dass der Magnet stärker wird. Es scheint nun, dass die Theorie eine sehr bedeutende Verstärkung der Magnete bei gegenseitiger Annäherung verlangt, während sie bei Stahlmagneten der Erfahrung gemäss, doch nur eine geringe ist. Dagegen ist nun zu erwägen, dass in einem starken Magnete, in welchem die zwei Bestandtheile jedes ursprünglich astatischen Moleküls so gestellt sind, dass sich ihre gleichnamigen Pole nahe liegen, bei weiterer Annäherung dieser Pole das Potential derselben auf einander eine sehr grosse Änderung erfahren kann, ohne dass die Wirkung eines solchen Moleküls in die Ferne merklich grösser wird.

Bei den Bewegungen von Stromsystemen, wie sie Magnete und Eisenstücke darstellen, findet also eine fortwährende Verwandlung der Potentiale derselben auf sich selbst in gemeinsames Potential und umgekehrt statt und zwar nach dem vollen Äquivalente. Es ist also nur noch das Äquivalent der bei solchen Bewegungen erzeugten lebendigen Kraft zu bestimmen.

Die Grösse dieser ist wieder gegeben durch die Gleichung (12), welche für diesen Fall die Form

$$dQ + dP + dP' + dA + dA' = dL$$

annimmt, worin dA und dA' die Arbeiten der Coërcitivkräfte in den beiden Systemen darstellen. Wegen (23) verwandelt sich diese Gleichung in

$$dL = dA + dA' \qquad (24)$$

d. h. das Äquivalent der durch magnetische Kräfte erzeugten lebendigen Kraft bilden die Arbeiten der Coërcitivkräfte.

Stellt das erste System einen Stahlmagnet dar, das zweite ein Eisenstück, so hat man

$$dP + dA = 0, \quad dA' = 0$$

zu setzen. Es wird dann aus (24)

$$dL = dA = -dP$$

und in Folge der Relationen (23) auch

$$dL = dA = -dP = -dP' = \tfrac{1}{2} dQ.$$

Die bei der Anziehung eines weichen Stückes Eisen durch einen Magnet gewonnene lebendige Kraft ist gleich dem halben Zuwachse des Potentials des Magneten auf das Eisen. Diesen Satz hat schon Helmholtz mitgetheilt als abgeleitet aus der Poisson'schen Theorie des Magnetismus. Die gewonnene lebendige Kraft ist auch gleich der Arbeit der Coërcitivkräfte im Magnete.

Stellen endlich beide Stromsysteme Stahlmagnete dar, so ist

$$dP + dA = 0, \quad dP' + dA' = 0$$

zu setzen. Die Gleichung (24) verwandelt sich jetzt in

$$dL = dA + dA' = -dP - dP' = dQ$$

und jetzt ist der Zuwachs der lebendigen Kraft gleich dem Zuwachs des Potentials der Magnete auf einander. Sie ist auch gleich der Arbeit der Coërcitivkräfte in den beiden Magneten.

Es ist nun hiemit die Einheit, welche durch die Ampère'sche Theorie des Magnetismus in die statischen Beziehungen der magnetischen, elektromagnetischen und elektrodynamischen Kräfte gebracht worden ist, auch für die dynamischen Beziehungen hergestellt und sind die damit in Verbindung stehenden Gesetze der magnetischen Vertheilung, der elektromagnetischen und elektrodynamischen Induction unter einen Gesichtspunkt gebracht.

Über die Entstehung und Eigenschaften der Monochlorcitramalsäure.

Von dem w. M. Dr. J. Gottlieb.

Schon seit geraumer Zeit beschäftigte ich mich gelegentlich mit einer chlorhältigen Säure, welche unter verschiedenen Umständen durch die Einwirkung von Chlor auf Citraconsäurehydrat entsteht und die ich lange nicht im isolirten Zustande zu gewinnen vermochte, da bei allen von mir diesfalls eingeschlagenen Methoden auch andere Producte entstehen, welche abzutrennen mir erst später gelang. Ich erkannte zunächst den innigeren Zusammenhang der fraglichen Säure mit der Citraconsäure nur aus dem Umstande, dass die rohe Säure bei der Destillation krystallisirte Monochlorcitraconsäure in erheblicher Menge lieferte, welche völlig zu reinigen, keinerlei Schwierigkeiten bot.

Das erste Verfahren, welches ich einschlug um die erwähnte Säure zu bereiten, bestand in der Behandlung einer, auf nahezu 100° C. erwärmten Lösung von krystallisirter Citraconsäure in ziemlich concentrirter wässeriger Salzsäure mit, in kleineren Portionen eingetragenem chlorsaurem Kalium. Nachdem die Einwirkung etwa 4—5 Stunden stattgefunden, wurde im Wasserbade eingedampft und so lange erwärmt, bis der Geruch nach Salzsäure verschwunden war. Der Rückstand, welcher dann ein Gemenge von Chlorkalium mit einer gelblichen, klaren, zähflüssigen Masse bildete, wurde mit Äther extrahirt, welcher die Substanz beim Verdampfen mit den oben angegebenen Eigenschaften hinterliess. Diese, sorgfältig durch anhaltendes Trocknen bei 100° C. vom Wasser befreit, liess beim Erhitzen ziemlich reichlich Monochlorcitraconsäure sublimiren, während zähe Substanzen einen braunen Rückstand bildeten.

Ähnliche Resultate wie die Behandlung mit Salzsäure und Kaliumchlorat ergab auch das mässige, anhaltende Erwärmen mit Königswasser.

Als bequemere und auch ausgiebigere Methode, das fragliche Product zu gewinnen, erwies sich mir aber zunächst die Einwirkung von freiem Chlor auf die Säurelösung, welche ich in grossen Liebig'schen Kugelapparaten vornahm und stets so lange fortsetzte, bis die Flüssigkeit durch Chlor deutlich gefärbt war. Auch in diesem Falle war der Abdampfungsrückstand unkrystallinisch und überhaupt mit dem oben erwähnten, mittelst Salzsäure und chlorsaurem Kalium erhaltenen Resultate ganz übereinstimmend.

Es gelang mir bald, aus dem Letzteren sowie aus dem, mit freiem Chlor erzielten Producte reichlich eine Säure zu gewinnen, welche deutlich krystallisirt, wobei ich den bereits früher beobachteten Umstand berücksichtigte, dass die mit dem Rohproducte erzeugten neutralen Salze der Alkalien und alkalischen Erden sich schon in sehr mässiger Wärme so zerlegen, dass Chlormetalle entstehen. Wurden aber die wässerigen, verdünnten Lösungen der rohen Säure mit essigsaurem Barium oder Blei im Überschusse versetzt, so schieden sich reichlich die betreffenden Salze der nahezu reinen Säure als schwerlösliche Verbindungen ab, welche um so deutlicher krystallisirt auftraten, je verdünnter die angewendeten Lösungen waren. Aus diesen, sorgfältig mit kaltem Wasser gewaschenen Salzen lässt sich das Hydrat der fraglichen Säuren leicht herstellen, indem man selbe mit überschüssiger Salzsäure übergiesst, hierauf im Wasserbade bis zur Trockne und völligen Vertreibung der Salzsäure erwärmt und den gepulverten Rückstand wiederholt mit Äther extrahirt, welcher die Säure beim Abdestilliren zurücklässt. Es verdient übrigens erwähnt zu werden, dass die Behandlung des Bariumsalzes wegen der Beschaffenheit des zurückbleibenden Chlorbariums weit angenehmer durchzuführen ist, als die Verarbeitung des Bleisalzes. Das Barytsalz lässt sich übrigens zur Bereitung der Säure auch mit gleichem Erfolge derart verwenden, dass man es, getrocknet und gepulvert, mit 95%igem Weingeist übergiesst, dann anhaltend Salzsäuregas einleitet, von dem abgeschiedenen Chlorbarium abfiltrirt und die Flüssigkeit in

mässiger Wärme eindampft. In allen Fällen enthält der krystallisirte Rückstand kleine Mengen einer gelben, zähflüssigen Substanz, welche durch 1—2maliges Umkrystallisiren aus Wasser vollständig beseitigt werden kann.

Die unten folgenden analytischen Daten, welche ich bei der Untersuchung der Säure und ihrer Salze erhielt, im Zusammenhange mit einigen Mittheilungen, welche Carius (Annalen der Chemie und Pharmacie, Bd. 126, S. 205 u. f.) über die Eigenschaften und die Zerleglichkeit der Salze der von ihm durch gleichzeitige Einwirkung von Chlor und Quecksilberoxyd auf citraconsaures Barium erhaltenen Monochlorcitramalsäure machte, liessen eine Übereinstimmung hinsichtlich der Zusammensetzung beider Säuren nicht verkennen, doch konnte ich anfangs an die Identität beider nicht glauben, da Carius seine Säure als eine feste, farblose, unkrystallisirbare Substanz schildert, während ich die von mir bereitete Säure in der oben angedeuteten Weise, in schönen grossen Krystallen erhielt.

Die Bereitung der Säure von Carius nach dem (a. a. O.) angegebenen Verfahren stellte jedoch bald die völlige Identität beider Producte heraus. In der Voraussetzung, dass auch nach der Methode von Carius sich nicht ganz unbedeutende Mengen von Nebenproducten bilden, welche das von ihm direct hergestellte, schwerlösliche Bariumsalz mehr oder weniger verunreinigt und die daraus abgeschiedene Säure am Krystallisiren gehindert haben dürften, wendete ich citraconsaures Natrium statt der Bariumverbindung an. Aus der von dem überschüssigen Quecksilberoxyd und basischem Quecksilberchlorid abfiltrirten Lösung des rohen Natriumsalzes wurde, ohne zuvor das gelöste Quecksilber mittelst Schwefelwasserstoff auszufällen, durch essigsaures Barium das oben erwähnte Bariumsalz mit allen seinen, mir schon bekannten Eigenschaften abgeschieden. Die daraus in der oben angegebenen Weise dargestellte krystallisirte Säure stimmte in jeder Beziehung mit der von mir auf den früher erwähnten Wegen gewonnenen überein.

Der Umstand, dass die Säure bei 100° C. zu einer sehr zähen, farblosen Masse zusammenschmilzt, welche beim Erkalten nicht krystallinisch, sondern zu einer glasigen Masse erstarrt,

mag wohl am meisten dazu beigetragen haben, dass Carius die Säure für unkrystallisirbar hielt.

Nach meinen früheren Beobachtungen über die Entstehung der Monochlorcitramalsäure lag nun die Vermuthung nahe, dass selbe sich auch leicht bilden lasse, wenn man einfach Chlor auf citraconsaures Natrium wirken lässt, was der Versuch auch bestätigte, so dass ich diesen Vorgang als die bequemste und ausgiebigste Methode bezeichnen muss, um die Säure in beliebiger Menge herzustellen. Behufs weiterer Untersuchungen über Monochlorcitramalsäure bereitete ich mir selbe seither durch Einleiten von Chlor in die mässig verdünnte Lösung des Natriumsalzes, unter Anwendung der schon erwähnten grossen Kugelapparate, bis die Flüssigkeit sich zu trüben beginnt, was von der nun eintretenden Bildung des schon von Carius (a. a. O., S. 205) erwähnten ölartigen Productes herrührt, über welches ich mir vorbehalte, später zu berichten und vorläufig nur erwähne, dass, sobald dieser Körper zu entstehen beginnt, keineswegs alle Citraconsäure in Monochlorcitramalsäure umgewandelt ist, sondern neben dieser auch regelmässig andere Producte entstehen.

Dies vorausgeschickt, lasse ich im Folgenden die analytischen Belege für die obigen Mittheilungen sowie eine Beschreibung der betreffenden Verbindungen folgen, wobei ich im allgemeinen darauf hinweise, dass ich zu jeder einzelnen Bestimmung Substanz von neuer, theilweise abgeänderter Darstellung benützt und auch nicht unterlassen habe, bei den Barium- und Bleisalzen durch Lösen derselben in heisser Essigsäure und Auskrystallisiren mich zu vergewissern, dass nicht etwa Gemenge von mehreren Verbindungen vorliegen.

Monochlorcitramalsäure-Hydrat.

Die reine Lösung dieser Säure scheidet nach dem Abdampfen bis zur beginnenden Syrupsconsistenz, zunächst in Folge der Abkühlung, später durch Verdunsten des Wassers, farblose glänzende Krystalle ab. Diese haben einen schwachen, angenehm obstartigen Geruch und ziehen an der Luft oberflächlich Feuchtigkeit an, wodurch der ursprüngliche Glanz ihrer Flächen beeinträchtigt wird, ohne dass sie übrigens selbst nur Spuren

einer Neigung zu zerfliessen verrathen würden. Dieser Umstand erschwert die Messung der Krystalle in so hohem Grade, dass Herr J. Rumpf, Adjunct der mineralogischen Abtheilung des steierm. Landesmuseums, welcher so freundlich war, dieselbe zu versuchen, sich damit begnügen musste, mir darüber folgende Mittheilungen zu machen:

„Die Krystallform der Monochlorcitramalsäure ist mit ziemlicher Sicherheit als: rhombische anzunehmen, obgleich nur an den wenigsten Krystallen ein solcher, sondern mono- oder triklinischer Charakter zum Ausdruck gelangt. Mit der Combination: $\infty P . P\bar{\infty} . P\breve{\infty}$, wozu ferner bei einigen noch $\infty P\breve{\infty}$ als ursprüngliche oder als ausgezeichnete Theilungsfläche kommt, sind alle beobachteten, unter sich völlig gleichen, mehr oder weniger glatten Flächen angegeben. Darin ist entweder der säulen- oder tafelförmige Habitus mit entsprechendem Vorwalten der Flächen von ∞P vorhanden. Als Längsabgrenzung erscheinen entweder blos die Flächen $P\breve{\infty}$, wobei häufig eine Fläche gegen die andere vorwaltet oder es tritt auch $P\breve{\infty}$ ein, und dann ist nur selten ein Gleichgewicht der Domenflächen, sondern fast immer die überwiegende Entwickelung einer derselben von den beiden Domen zu constatiren. Das schnelle Feuchtwerden der Krystalle an freier Luft hindert jede genauere Messung der Kanten. Annähernd betragen die Prismenwinkel 109° und 71°; die oberste Kante von $P\breve{\infty}$ misst circa 99° und jene von $P\bar{\infty}$ 91°."

An der Luft verflüchtigt sich die Säure, jedoch nur höchst langsam und träge, doch lasse ich vorläufig unentschieden, ob sie dabei, was den verdampften Antheil betrifft, Veränderungen erleidet oder nicht. Der Rückstand behält sicher seine ursprüngliche Zusammensetzung bei. Die Krystalle der Säure sind eigenthümlich zähe und lassen sich kaum zu einem feineren Pulver zerreiben. Sie enthalten kein Krystallwasser und lassen sich, gröblich gepulvert, über Schwefelsäure im Exsiccator sehr leicht und rasch vollständig von dem anhängenden Wasser befreien. Dass die Säure bei 100° schon schmilzt und dann beim Erkalten unkrystallinisch erstarrt, wurde schon oben erwähnt. Sie verflüchtigt sich dabei in merklicher Menge und erleidet einen fortwährenden Gewichtsverlust.

Zur Feststellung der Identität der beschriebenen Säure mit der Monochlorcitramalsäure von Carius habe ich das Hydrat der Säure von verschiedener Bereitung auf seinen Chlorgehalt geprüft und auch die in der oben erwähnten Weise, nach dem von Carius eingeschlagenen Verfahren, erzeugte Säure einer vollständigen Analyse unterworfen.

1. Säure, durch Behandlung der Citraconsäure mit Chlor gewonnen und gröblich gepulvert, welche durch sechs Monate über Schwefelsäure im Exsiccator aufbewahrt war. Die Bestimmung des Chlors fand mittelst Kalk statt. 0·3395 Grm. gaben 0·2629 Chlorsilber und 0·0075 Silber.

2. Bereitet wie 1. Bei 100° C. getrocknet, wobei eine rasche Gewichtsabnahme stattfand und die Substanz schmolz (s. o.). Nachdem dabei selbst nach drei Wochen die Gewichtsabnahme nicht zum Stillstand kam, wurde der Rückstand, behufs der Chlorbestimmung, mit absolut chlorfreiem kohlensaurem Kalium übersättigt, die Lösung nach Zusatz von etwas ganz reinem Kalisalpeter in einer geräumigen Platinschale zur Trockne gebracht und endlich vorsichtig geschmolzen. Hierauf versetzte ich die gelöste Schmelze zunächst mit Silbernitrat, dann mit überschüssiger Salpetersäure und verfuhr weiter in der gewöhnlichen Weise.

   0·4936 Grm. gaben dabei 0·372 Chlorsilber und 0·0095 Silber.

3. Säure frisch, wie 1 hergestellt und kurze Zeit über Schwefelsäure getrocknet. Chlorbestimmung nach dem bei 2 angegebenen Verfahren.

   0·5638 Grm. lieferten 0·4352 Chlorsilber und 0·0036 Silber.

4. Nach Carius mittelst Quecksilberoxyd, citraconsaurem Natrium und Chlor bereitet. Über Schwefelsäure getrocknet.

   Chlorbestimmung wie bei 2 und 3. 0·6279 Grm. lieferten 0·4827 Chlorsilber und 0·0053 Silber.

   0·8112 Grm. gaben mit chromsaurem Blei im Sauerstoffstrome verbrannt: 0·9724 Kohlensäure und 0·2925 Wasser.

In 100 Theilen wurden somit gefunden:

Procente ...	1	2	3	4	Berechnet nach der Formel $C_5H_7ClO_5$
Kohlenstoff.	—	—	—	32·69	32·87
Wasserstoff.	—	—	—	4·00	3·84
Chlor......	19·88	19·29	19·31	19·31	19·45
Sauerstoff..	—	—	—	—	43·84
					100·00

Monochlorcitramalsaures Silber.

Die Bereitung dieses Salzes gelingt, trotz seiner grossen Zerleglichkeit, durch Vermengen einer mässig concentrirten wässrigen Lösung des Säurehydrates mit essigsaurem Silber. Man lässt die Flüssigkeit an einem dunkeln Orte durch etwa 24 Stunden stehen und filtrirt das inzwischen abgeschiedene Salz rasch ab, da sich demselben später merkliche Quantitäten von Chlorsilber beimischen. Aus der Mutterlauge lässt sich, obwohl sie noch reichlich Säure und essigsaures Silber enthält, nur mehr mit viel Chlorsilber verunreinigtes Salz gewinnen. Das Silbersalz bildet kleine, weisse, dendritische Krystalle, welche gegen Licht wenig empfindlich sind, sich aber schon in mässiger Wärme unter Bildung von Chlorsilber vollständig zerlegen. Vor seiner Untersuchung wurde es im Exsiccator über Schwefelsäure getrocknet.

1. Das Salz war aus, durch Einwirkung von Chlor auf Citraconsäurehydrat bereiteter Säure hergestellt. 0·304 Grm. gaben 0·2193 Chlorsilber.
2. Wie 1 dargestellt. 0·2448 Grm. lieferten 0·1782 Chlorsilber.
3. Wurde aus der, nach der Methode von Carius u. s. w. bereiteten Säure dargestellt, 0·2974 Grm. gaben 0·2155 Chlorsilber.

Behufs der Bestimmung des Chlors wurde das Salz mit einer Lösung von reinem kohlensaurem Kalium anhaltend gekocht, wobei sämmtliches Chlor in Chlorkalium überging. Das erkaltete Gemenge lieferte nach Zusatz von Salpetersäure Chlorsilber, während sich in dem Filtrate weder

Silber noch Chlor mehr nachweisen liessen. Es wurden so aus 0·5077 Grm. erhalten 0·1834 Chlorsilber und 0·0027 Silber.

100 Theile des Salzes enthielten somit:

Procente	1	2	3	Berechnet nach der Formel $C_5H_5Ag_2ClO_5$
Silber	54·29	54·78	54·53	54·60
Chlor	—	—	9·10	8·96.

Monochlorcitramalsaures Barium.

Bezüglich der Eigenschaften dieses Salzes habe ich den Angaben von Carius wenig beizufügen. Man erhält es am deutlichsten krystallisirt, wenn man verdünnte Lösungen des Hydrates mit essigsaurem Barium versetzt, wonach die Ausscheidung des Salzes nach 1 — 2 Stunden beginnt und binnen etwa 24 Stunden vollendet ist. Deutlich krystallisirt es übrigens auch, wenn man verdünnte Lösungen der Säure mit kohlensaurer Bittererde (weisser Magnesia) oder auch mit kohlensaurem Ammonium in der Kälte sättigt und das Filtrat, nach Zusatz von wenig freier Essigsäure, mit Chlorbarium versetzt. Wird das Salz in mässig concentrirter, heisser Essigsäure gelöst, so erhält man beim langsamen Abkühlen der Lösung oder, falls viel Essigsäure angewendet wurde, auf vorsichtigen Zusatz von Weingeist gleichfalls deutlichere Krystalle, welche jedoch in allen Fällen immerhin noch klein sind, während das aus gesättigteren Lösungen gewonnene Salz als ein fein krystallinisches, schweres Pulver auftritt. In allen Fällen enthält es Krystallwasser, und jeder Versuch es in mässiger Wärme vollständig davon zu befreien führte, unter Bildung von mehr oder weniger Chlorbarium zur Zersetzung des Salzes. Nach meinen Versuchen enthält das frisch bereitete, gerade lufttrocken gewordene Salz vier Moleküle Wasser, von welchen es zwei bei längerem Aufbewahren an der Luft oder über Schwefelsäure, am schnellsten aber bei 30—40° C. verliert, wie die folgenden analytischen Daten beweisen.

Lufttrocknes Bariumsalz mit $4(H_2\Theta)$.

1. Bereitet mittelst, durch Einwirkung von Salzsäure und chlorsaurem Kali auf Citraconsäure hergestellter krystallisirter Säure, welche mit kohlensaurem Ammonium gesättigt und dann nach Zusatz von etwas Essigsäure mit essigsaurem Barium behandelt wurde.

a) 0·7759 Grm. gaben 0·4641 schwefelsaures Barium.

0·5923 Grm. gaben bei der mittelst Kalk durchgeführten Chlorbestimmung 0·2095 Chlorsilber und 0·0113 Silber.

b) 0·9031 Grm. gaben 0·5406 schwefelsaures Barium.

2. Durch Fällung von, mittelst Einwirkung von Chlor auf Citraconsäure bereiteter, Monochlorcitramalsäure mit essigsaurem Barium erhalten.

0·9645 Grm. gaben 0·5778 schwefelsaures Barium.

3. Dargestellt aus, mittelst Behandlung von Citraconsäure mit Salzsäure und chlorsaurem Kalium gewonnener, Säure durch Versetzen der Lösung mit essigsaurem Barium. 1·3862 Grm. lieferten 0·8303 schwefelsaures Barium.

4. Wie 2 bereitet. 0·9865 Grm. gaben 0·5892 schwefelsaures Barium.

5. Gewonnen wie 2. 1·4255 Grm. lieferten 0·8539 schwefelsaures Barium.

6. Dargestellt durch Sättigen der Säurelösung mit kohlensaurem Magnesium in der Kälte, Zusatz von wenig Essigsäure und Fällen mit Chlorbarium, aus sehr verdünnter Lösung. Besonders deutlich krystallisirt. Chlorbestimmung durch Behandlung mit Kalk. 0·5653 Grm. gaben 0·1898 Chlorsilber und 0·013 Silber.

100 Theile des Salzes enthielten darnach:

Procente.	1 *a)*	1 *b)*	2	3	4	5	6	Berechnet nach der Formel $\Theta_5H_5BaCl\Theta_5+4(H_2\Theta)$.
Barium ..	35·23	35·20	35·22	35·21	35·12	35·22		35·17
Chlor....	9·38	—	—	—	—	—	9·08	9·12.

Bariumsalz mit $2(H_2\Theta)$.

1. Mit sehr verdünnter Lösung von essigsaurem Barium aus mit Chlor gewonnener Säure bereitet und durch 8 Tage an der Luft bei 18° C. getrocknet.

   1·2883 Grm. gaben mit Kalk geglüht u. s. w. 0·5116 Chlorsilber und 0·0042 Silber.

   0·5728 Grm. gaben 0·3773 schwefelsaures Barium.

2. Deutlich krystallinisches Salz wurde in reiner siedender Essigsäure gelöst und das erkaltete Filtrat mit Weingeist überschichtet, wonach sich in einigen Tagen besonders deutliche Krystalle abschieden. Diese wurden zwischen 30—40° C. getrocknet.

   0·5665 Grm. gaben 0·3731 schwefelsaures Barium.

   Behufs der Bestimmung des Chlors wurde das Salz durch etwa eine halbe Stunde mit Wasser im lebhaften Sieden erhalten, nach dem Erkalten mit Salpetersäure übersättigt und mit Silbernitrat versetzt. 0·6438 Grm. gaben bei dieser Behandlung 0·2432 Chlorsilber und 0·0062 Silber.

3. Durch Behandlung von Citraconsäure mit Chlor bereitete Monochlorcitramalsäure wurde in wässeriger Lösung in zwei gleiche Portionen getheilt und eine derselben mit Bariumhydrat sorgfältig neutralisirt. Nachdem bereits sich reichlich Bariumsalz abgeschieden hatte, wurde die zweite Säureportion zugesetzt, welche jedoch keine merkliche Verminderung des Salzes hervorrief, dessen Trocknen über Schwefelsäure im Exsiccator stattfand. 0·9485 Grm. gaben 0·6305 schwefelsaures Barium.

   100 Theile des Salzes enthielten demnach:

Procente...	1	2	3	Berechnet nach der Formel $C_5H_5BaCl\Theta_5+2(H_2\Theta)$
Barium....	38·73	38·72	38·93	38·76
Chlor.....	9·93	9·67	—	10·04.

Monochlorcitramalsaures Blei.

Die Angabe von Carius, dass dieses Salz ein amorphes, leichtes Pulver vorstellt, welches bei seiner Darstellung durch Doppelzersetzung zunächst als ein voluminöser Niederschlag auf-

tritt, kann ich nur für den Fall bestätigen, wenn bei seiner Darstellung beide Salze in concentrirter Lösung angewendet werden. Aus verdünnten Lösungen von Kalium- oder Magnesiumsalz (welch' letzteres ich beim Eintrocknen seiner Lösung bei gewöhnlicher Temperatur nur als eine amorphe, glasige Masse erhielt), scheidet essigsaures Blei die Verbindung in farblosen, feinen nadelförmigen, zuweilen auch schuppigen Krystallen ab, welche viele Ähnlichkeit mit dem Bariumsalz zeigen und gleich letzterem — deutlicher — aber stets sehr klein erhalten werden, wenn man verdünnte Lösungen der Säure mit Bleizucker versetzt.

Das Salz enthält, gleich dem Bariumsalze, frisch bereitet und eben lufttrocken geworden, 4 Moleküle Wasser, von denen es bei längerem Verweilen an der Luft oder über Schwefelsäure, auch bei nicht allzulangem Erwärmen auf 30—40° C. die Hälfte verliert. Seine Zerleglichkeit beim Trocknen ist jedenfalls noch grösser als jene des Bariumsalzes, so dass es beim längeren Verweilen, selbst in gewöhnlicher Temperatur über Schwefelsäure im luftverdünnten Raume, in dem Masse als es die beiden letzten Moleküle Wasser verliert, bereits sich unter Bildung von Chlorblei zu zerlegen beginnt.

Est ist mir daher auch nicht gelungen, das Bleisalz, ohne dessen beginnende Zersetzung, in völlig entwässertem Zustande zu erhalten, denn nachdem ich das Trocknen desselben im Vacuo über Schwefelsäure durch mehr als drei Monate, bei einer Temperatur von durchschnittlich 18° C. fortgesetzt hatte, ohne dass die zwar geringe, aber stetige Gewichtsverminderung zum Stillstand gekommen wäre, fand ich in dem Salze schon nach zwei Monaten Spuren, nach drei Monaten aber bereits ganz merkliche Quantitäten von Chlorblei. Die von Carius angeführte Analyse des entwässerten Salzes muss sich demnach auf ein Product beziehen, bei welchem das Trocknen unter besonders günstigen Umständen (namentlich bei niedriger Temperatur) stattgefunden, möglicherweise auch unterbrochen wurde, bevor die Gewichtsverminderung in der That vollständig aufgehört hatte.

Lufttrocknes Bleisalz mit $4(H_2\Theta)$.

1. Zur Bereitung des Salzes mit Säurelösung und essigsaurem Blei diente durch Behandlung von Citraconsäure mit Salz-

säure und chlorsaurem Kalium entstandene krystallisirte Säure, welche durch Zerlegung des Bariumsalzes mit Salzsäuregas unter Weingeist und Eindampfen des Filtrates im Wasserbade hergestellt worden war. (S. o.)

0·8363 Grm. gaben 0·5495 schwefelsaures Blei.

2. Wurde wie 1 aus durch Einwirkung von Chlor auf Citraconsäure gewonnener Säure hergestellt. 0·4072 Grm. lieferten 0·2692 schwefelsaures Blei.
3. Bereitet wie 2. 1·255 Grm. gaben 0·830 schwefelsaures Blei.
4. Mittelst sehr verdünnten Lösungen bereitet und behufs der Chlorbestimmung mit Kalk geglüht. 0·5998 Grm. gaben 0·178 Chlorsilber und 0·01 Silber.

100 Theile des Salzes enthalten demnach:

Procente.	1	2	3	4	Berechnet nach der Formel $C_5H_5PbClO_5+4(H_2O$
Blei.....	44·88	45·16	45·18		45·04
Chlor....	—	—	—	7·89	7·73.

Bleisalz mit $2(H_2O)$.

Zur Bereitung der folgenden Salze wurde ausschliesslich durch Einwirkung von Chlor auf Citraconsäure gewonnene Monochlorcitramalsäure verwendet.

1. Mittelst essigsaurem Blei hergestellt und durch 10 Tage bei 18° C. an der Luft getrocknet. 0·6737 Grm. gaben 0·4829 schwefelsaures Blei.
2. Mittelst sehr verdünntem essigsaurem Blei bereitet und im Exsiccator über Schwefelsäure getrocknet.

   0·393 Grm. gaben 0·283 schwefelsaures Blei,

   0·5125 Grm. 0·1724 Chlorsilber und 0·0072 Silber. Diese Chlorbestimmung wurde durch Kochen des Salzes mit einer überschüssigen Lösung von kohlensaurem Kalium u. s. w. wie bei der gleichen Bestimmung im obigen Silbersalze 3 durchgeführt.
3. Wie 1 bereitet, in siedender Essigsäure gelöst, aus welcher es sich beim Erkalten in kleinen, theilweise zu Krusten

vereinigten Krystallen abschied. Durch 6 Tage an der Luft getrocknet.

0·6332 Grm. lieferten 0·4533 schwefelsaures Blei.

4. Wie 1. Neue Darstellung, bei 30—40° C. getrocknet. 0·2464 Grm. gaben 0·1762 schwefelsaures Blei.

5. Neue Darstellung wie 1, bei 30—40° C. getrocknet.

0·1835 Grm. gaben 0·1312 schwefelsaures Blei.

0·4121 Grm. lieferten wie 2 behandelt 0·1266 Chlorsilber und 0·0094 Silber.

6. Monochlorcitramalsäure wurde in mässig verdünnter Lösung mit weisser Magnesia gesättigt und das Filtrat mit essigsaurer Bleilösung versetzt. Es entstand ein schwerer weisser Niederschlag von undeutlich krystallinischer Beschaffenheit, welcher zunächst mit verdünnter Essigsäure gewaschen wurde, um etwaige Spuren von basischem Bleisalz zu beseitigen. Von dem bei 30—40° C. getrockneten Salze gaben 0·4237 Grm. 0·3035 schwefelsaures Blei.

100 Theile des Salzes enthalten demnach:

Procente	1	2	3	4	5	6	Berechnet nach der Formel $C_5H_5PbClO_5+2(H_2O)$
Blei	48·96	49·18	48·91	49·83	48·84	48·93	48·87
Chlor	—	8·78	—	—	8·33	—	8·38.

Aus den obigen Daten geht wohl die Identität meiner Säure mit Monochlorcitramalsäure entschieden hervor. Ich habe übrigens dafür noch einen weiteren Beleg in der Entstehung der Citramalsäure durch die Behandlung meiner krystallisirten Säure mit Salzsäure und Zink aufgefunden, welche ich schon beobachtete als ich noch an die Verschiedenheit meiner Säure und jener welche Carius gewonnen hatte, glaubte. Meine diesfälligen Versuche führten mich zur Herstellung eines Bleisalzes, auf welches die von Carius (Annalen der Chemie und Pharmacie, B. 129, S. 163) gegebene Beschreibung des citramalsauren Blei's vollständig passte. Ich fand in dem bei 100° C. getrockneten Salze, wovon 0·509 Grm. 0·4363 schwefelsaures Blei

lieferten, 58·56 Procente Blei, während die Formel $C_5H_6PbO_5$ 58·64 Procente verlangt. Das Salz, obwohl völlig unkrystallinisch, enthält dennoch, im lufttrocknen Zustande, chemisch gebundenes Wasser, denn 1·6473 Grm. gaben bei 100° C. 0·1505 Grm. Wasser ab, was 9·16 Percenten entspricht, während die Formel $C_5H_6PbO_5+2(H_2O)$ 9·25 Procente verlangt.

Die bisherigen Mittheilungen ergänze ich im Folgenden mit einigen vorläufigen Notizen, indem ich zunächst hervorhebe, dass ich die bereits oben erwähnte Zerlegung der Monochlorcitramalsäure beim Sublimiren in Wasser und Monochlorcitraconsäure $C_5H_5ClO_4$ schon zweifellos nachgewiesen und damit die seiner Zeit diesfalls von Carius ausgesprochene Vermuthung bestätigt habe.

Was aber die Zerlegung der Monochlorcitramalsäure in ihren neutralen Salzen durch Erwärmen mit Wasser anlangt, so ist die von Carius (Annalen der Chemie und Pharmacie, B. 126, S. 206) darüber gemachte Angabe entschieden unrichtig. Carius drückt das Resultat dieser Zerlegung durch das Schema $C_5H_5ClK_2O_5+H_2O=KCl+C_5H_7KO_6$ aus. Die letztere Formel bezeichnet das saure citraweinsaure Kalium. Carius stellte übrigens nur das neutrale Bariumsalz dar und bereitete daraus die Säure und das Bleisalz. (Annalen etc., B. 129, S. 165 u. f.)

Er verwandelte das neutrale monochlorcitramalsaure Barium in das citraweinsaure Salz, durch wiederholtes Eindampfen des Ersteren mit Wasser und überschüssigem Bariumhydrat u. s. w. Dabei musste er selbstverständlich übersehen, dass sich während des noch so lange anhaltenden Erwärmens des Bariumsalzes mit Wasser und bei noch so häufig wiederholtem Eindampfen zur Trockne, keinerlei deutlich saure Reaction der Flüssigkeit einstellt, was doch entschieden stattfinden müsste, wenn das obige Schema den Vorgang richtig wiedergeben würde. Beim Erwärmen von monochlorcitramalsaurem Barium mit Wasser im Wasserbade beobachtet man schon bevor die Flüssigkeit die Temperatur von 100° erreicht hat, eine ziemlich reichliche Entwicklung von Kohlensäure, die nun allerdings der Flüssigkeit eine sehr schwache, saure Reaction ertheilt. Bei 100° ist das Entweichen von Kohlensäure nahezu heftig, und erhitzt

man die Flüssigkeit zum Sieden, so findet lebhaftes Aufbrausen statt, so dass man bei Anwendung grösserer Mengen des Salzes vorsichtig erwärmen muss, wenn man ein Überschäumen vermeiden will. Wird das Sieden in einer Retorte vorgenommen, so geht in die Vorlage Wasser über, welches keinerlei saure Reaction zeigt. Nach etwa einer halben Stunde wird die Flüssigkeit, welche bis dahin noch von unzersetzt gebliebenem Bariumsalz getrübt war, nahezu klar und dann ist auch alles Chlor der Säure als Chlorbarium in der Lösung, welche absolut neutral erscheint. (Auf diesem Verhalten beruht auch die von mir mit den Salzen der Monochlorcitramalsäure nach obigen Mittheilungen ausgeführte Chlorbestimmung.)

Damit ist aber die Reaction noch nicht abgeschlossen, denn beim weiteren Erwärmen erfolgt dann noch die Abscheidung einer nicht unbeträchtlichen Menge von kohlensaurem Barium.

Das Bleisalz verhält sich ebenso. Auch hier beginnt, wenn auch minder heftig, bald die Entwickelung von Kohlensäure und die Flüssigkeit nimmt nur eine sehr schwachsaure Reaction an, welche eine Lösung von Chlorblei, das sich reichlich abscheidet, in völlig gleichem Grade darbietet. Eben mit der Untersuchung dieser Vorgänge beschäftigt, erwähne ich hier nur vorläufig, dass ich bereits eine deutlich krystallisirende Säure als ein weiteres Product dieser Reaction aufgefunden habe. Wenn, was ich noch keineswegs in Abrede stellen will, sich bei dem, von Carius eingeschlagenen Verfahren aus dem Bariumsalze Citraweinsäure gewinnen lässt, so kann doch ihre Entstehung bestimmt nicht so eintreten, dass sämmtlicher Kohlenstoff der Monochlorcitramalsäure sich in dem Producte als Citraweinsäure findet. Ich behalte mir vor, binnen kurzem ausführlicher über diese Reaction zu berichten.

Über die Energiedifferenz des phosphorsauren Natrons bei verschiedenem Gehalte an Krystallwasser.

Von **Dr. L. Pfaundler.**

A. Horstmann hat jüngst[1] unter Zugrundelegung der mechanischen Wärmetheorie und einiger von Debray herrührender Bestimmungen der Dampftensionen des phosphorsauren Natrons die Wärmemengen berechnet, welche beim Übergang des Salzes N_2HPO_4 in das Salz $N_2HPO_4+7H_2O$ und weiterhin in das Salz $N_2HPO_4+12H_2O$ frei werden. Er bedauert, dass keine directen calorimetrischen Bestimmungen vorliegen, durch welche sich die Resultate seiner Rechnung controliren lassen. Im Folgenden sind die Versuche mitgetheilt, die ich zur Ausfüllung dieser Lücke unternommen habe.

Methode. Löst man nacheinander äquivalente Mengen der drei erwähnten Salze in einem Überschuss von Wasser auf, so zwar, dass die resultirende Lösung stets dieselbe Concentration erhält, so gelangen die Salze aus ihren verschiedenen Anfangszuständen in denselben Endzustand. Die Differenzen der diesen Umwandlungen entsprechenden calorimetrischen Effecte sind dann die gesuchten Energiedifferenzen, welche der Umwandlung des ersten Salzes in das zweite und dritte entsprechen.

Die Darstellung der Salze wurde durch eine Analyse controlirt. Das erste Salz wurde durch Umkrystallisiren des käuflichen Salzes und Abpressen, das dritte durch mehrtägiges Erhitzen auf 100°, das zweite durch so lange fortgesetztes Erhitzen auf 100°, bis Salz von dem verlangten Wassergehalte zurückblieb erhalten[2]. Die drei Salze haben folgende Molekulargewichte:

---

[1] Annal. d. Chemie u. Pharm. VIII Suppb. 1 Heft, S. 125.

[2] Die Darstellung gelang so sicherer als durch Auskrystallisirenlassen über 33° Cels.

Salz α	Salz β	Salz γ
N_2HPO_4	$N_2HPO_4+7H_2O$	$N_2HPO_4+12H_2O$
142·8	268·8	358·8.

Zu den Versuchen wurden nun stets folgende Mengen abgewogen, welche im Verhältnisse der Molekulargewichte stehen, nämlich:

6·51 Grm. 12·25 Grm. 16·35 Grm.

Die angewendete Wassermenge betrug für die drei Salze:

294·84 Grm. 289·10 Grm. 285·00 Grm.

Diese Mengen sind so berechnet, dass nach dem Versuche stets dieselbe Menge (301·35 Grm.) Lösung von derselben Zusammensetzung (5·425% Gehalt an Salz γ), also auch derselben specifischen Wärme zurückblieb. Letztere wurde in drei übereinstimmenden Versuchen = 0·972 gefunden. Die Auflösung geschah in einem Calorimeter aus Messingblech, in welchem ein schalenförmiger Rührer auf und ab bewegt wurde. Die Salze wurden im feingepulverten Zustande mit einer Temperatur, die möglichst gleich der des Wassers war, in dasselbe eingestreut.

Beim Salz γ war die Auflösung in 1½ Minuten, beim Salz β in 2 bis 3 Minuten beendet. Salz α benöthigte stets mindestens 5 Minuten bis zur völligen Lösung. In grössern Massen ins Wasser getaucht, bildet es einen harten Klumpen, der sehr lange Zeit zur Lösung beansprucht. Dabei steigt die Temperatur anfangs, um dann bald wieder zu sinken[1]. Die Correction wegen der Wärmeeinflüsse der Umgebung wurde in der Weise, wie ich dies seinerzeit beschrieben habe, berechnet.

Beobachtungsresultate. Dieselben sind in nachfolgender Tabelle zusammengestellt und bedürfen keiner weitern Erklärung.

---

[1] Ich dachte anfänglich, dass das Salz α hiebei in Salz β oder γ übergehe und dann erst sich löse. Unter dieser Voraussetzung suchte ich aus der stattgehabten Temperaturerhöhung die Wärmeentwicklung zu berechnen. Allein die Werthe fielen nur ungefähr halb so gross aus, als sie sich später ergaben. Bei der Analyse zeigte sich dann auch, dass die zuerst entstehende harte Verbindung nur 36·5% Wasser enthält, was mit der Formel $Na_2HPO_4+3\frac{1}{2}H_2O$ (vielleicht $N_2HPO_4+N_2HPO_4 7H_2O$) nahezu stimmt. Letztere verlangt nämlich 35·00%.

Num. des Versuchs	Angewandtes Salz und berechneter Wassergehalt	Gefundener Wassergehalt des Salzes	Gesammtwasserwerth des Calor. mit Inhalt	Anfangs Temperatur	Endtemperatur (corr.)	Temperatur-Zunahme	Entwickelte Wärmemenge	Correction wegen geringer Abweich. d. Temp. d. Salzes	Corrigirter Werth der entwickelten Wärmemenge	Mittel
1	Salz γ (62·7%)	62·62	297·48	17°65	14°23	—3°42	—1017·38	—10·46	—1027·84	—1024·98
2	"	"	"	17·65	14·26	—3·39	—1008·84	—11·38	—1020·22	
3	"	62·90	"	17·94	14·52	—3·42	—1017·31	— 8·50	—1025·88	
4	"	"	"	18·49	15·07	—3·42	—1017·38	— 8·59	—1025·97	
5	Salz β (50·23%)	50·37	297·48	18·90	17°17	—1·73	—518·68	—	—518·68	—516·22
6	"	"	"	19·40	17·68	—1·72	—513·76	—	—513·67	
7	Salz α (6·30%)	6·14	297·48	18·84	19·68	+0·84	+249·88	—	+249·88	+249·88
8	"	"	"	18·86	19·70	+0·84	+249·88	—	+249·88	
9	"	6·29	"	17·90	18·65	+0·75	+223·11	—	+223·11	+227·57
10	"	"	"	17·94	18·72	+0·78	+232·03	—	+232·03	

Bei den Versuchen 9 und 10 dauerte die Lösung des Salzes länger, weshalb sie wohl weniger genau ausgefallen sein mögen, deshalb wurden auch die Mittel abgesondert berechnet.

Wie man sieht, fällt die Wärmeentwicklung bei Salz γ und β negativ aus, nur bei Salz α wird Wärme frei.

Die Berechnung der Wärmeeffecte für den Übergang des Salzes α in die andern beiden ergibt sich nun auf folgende Weise:

16·35 Grm. Salz γ verbrauchen beim Lösen . . 1024·98 WE.
12·25 „ „ β „ „ „ . . 516·22 „

Es entspricht also eine Aufnahne von 4·10 Grm. Wasser die Wärmeentwicklung . . . . 508·76 WE.

Hieraus berechnet sich für die Gewichtseinheit des Wassers 124·09 WE.

16·35 Grm. Salz γ verbrauchen beim Lösen . . 1024·98 WE.
6·51 „ „ α entwickeln „ „ . . 249·88 „

Es entspricht also der Aufnahme von 9·84 Grm. Wasser . . . . 1274·86 WE.

Also auf die Gewichtseinheit des Wassers 129·56[1].

12·25 Grm. Salz β verbrauchen beim Lösen . . 516·22
6·51 „ „ α entwickeln „ „ . . 249·88

Es entspricht also der Aufnahme von 5·74 Grm. Wasser . . . . 766·10

Also auf die Gewichtseinheit des Wassers 133·47[1].

Zusammenstellung der Resultate. Beim Vergleiche dieser Zahlen mit den von Horstmann berechneten ergibt sich keine Übereinstimmung. Die ersten 7 Moleküle Wasser entwickeln per Kilogramm fast ebenso viel Wärme, wie die spätern 5 Moleküle, die entsprechenden Wärmemengen sind nämlich:

für die Reactionen:

[1] Rechnet man mit den Zahlen der Versuche 9 und 10, so erhält man statt 129·56 und 133·47 die Werthe: 127·30 und 129·58.

$N_2HPO_4 + 7H_2O$	$(N_2HPO_4 + 7H_2O) + 5H_2O$	$N_2HPO_4 + 12H_2O$
per Kilogramm nach der Rechnung von Horstmann		
215·2	78·6	158·3
nach meinen Versuchen:		
133·47	124·09	129·56.

Ich kann unmöglich zugeben, dass diese Abweichungen in Fehlern der calorimetrischen Messung ihre Erklärung finden, muss es demnach vorderhand dahin gestellt sein lassen, ob sie in Unrichtigkeiten der Dampftensionsbestimmungen oder anderswo begründet seien.

XX. SITZUNG VOM 20. JULI 1871.

Die naturforschende Gesellschaft zu Freiburg i. Br. ladet mit Circular-Schreiben vom 20. Juni 1871 zur Feier ihres am 12. August d. J. stattfindenden Stiftungsfestes ein.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Über den Einfluss der Athmung auf den Kreislauf. II. Mittheilung: Über eine reflectorische Beziehung zwischen Lunge und Herz", vom Herrn Prof. Dr. Ew. Hering in Prag.

„Die natürliche Familie der Gürtelthiere *(Dasypodes)*." I. Abtheilung, vom Herrn Dr. L. J. Fitzinger in Pest.

„Experimentaluntersuchungen über die Keimung der Samen" I. Reihe, vom Herrn Prof. Dr. Jul. Wiesner.

„Auswerthung bestimmter Integrale", vom Herrn L. Gegenbauer, Prof. an der n.-ö. Landes-Oberrealschule zu Krems.

Das w. M. Herr Prof. Dr. A. Rollett in Graz übersendet eine für den Anzeiger bestimmte Mittheilung über Mikrophotographien von quergestreiften Muskelfasern.

Herr Prof. Dr. Aug. Em. Ritter v. Reuss übergibt eine „vorläufige Notiz über zwei neue fossile Foraminiferen-Gattungen".

Herr Hofrath Dr. E. Brücke legt folgende zwei Abhandlungen vor: 1. „Welche Zellen in den Pepsindrüsen enthalten das Pepsin?" vom Herrn E. Friedinger; 2. „Zur Statik des Glycogens im Thierkörper", von dem *Stud. med.* Herrn Sigm. Weiss.

Herr Regierungsrath Dr. K. v. Littrow überreicht eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung, betitelt: „Bericht über die vom Herrn Prof. Weiss ausgeführte Bestimmung der Breite und des Azimuth's auf dem Laaer Berge bei Wien".

Herr Dr. Ed. Albert, Assistent an der I. chirurg. Klinik in Wien, legt eine Abhandlung: „Zur Histologie der Synovialhäute" vor.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia, R., Virgiliana di Mantova: Atti e Memorie. Biennio 1869—70. Mantova, 1871; gr. 8°.

Carl, Ph., Repertorium für Experimental-Physik etc. VII. Band, 2. Heft. München, 1871; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXII, Nrs. 24—25; Tome LXXIII. Nr, 1. Paris, 1871; 4°.

Gesellschaft, Anthropologische, in Wien: Mittheilungen. I. Band, Nr. 10. Wien, 1871; 8°.

— der Wissenschaften, k. böhmische, zu Prag: Abhandlungen. VI. Folge. IV. Band. Prag, 1871; 4°. — Sitzungsberichte. Jahrgang 1870. Prag; 8°. — Základy. Oddíl I—II. V Praze, 1865, 1866, 1867, 1868, 1870; Oddíl III. IV a V, Sešit 1. 1871; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXII. Jahrg. Nr. 28. Wien; 4°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band III, 8. & 9. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1871, Nr. 15. Wien; 8°.

Museum-Verein, Siebenbürgischer: Jahrbücher. V. Band, 2. & 3. Heft. Kronstadt, 1870 & 1871; 4°.

Nature. Nr. 89, Vol. IV. London, 1871; 4°.

Protokoll über die Verhandlungen der 47. General-Versammlung der Actionäre der a. pr. Kaiser Ferdinands-Nordbahn. Wien, 1871; 4°.

Revue Scientifique de la France et de l'étranger & Revue Politique et Littéraire. Ire Année (2e Série). Nr. 2. Paris & Bruxelles, 1871; 4°.

Verein für die deutsche Nordpolfahrt: Berichte über die Sitzungen. IV.—XV. Versammlung. Bremen, 1870 & 1871; 8°.

— physikalischer, zu Frankfurt a/M.: Jahresbericht für das Rechnungsjahr 1869—1870. Frankfurt a/M., 1871; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXI. Jahrgang. Nr. 28. Wien, 1871; 4°.

Über die Integration der Differentialgleichung erster Ordnung mit rationalen Coëfficienten zweiten Grades.

Von dem w. M. Dr. A. Winckler.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juni 1871.)

Die hier in Rede stehende Differentialgleichung schliesst sich jener erster Ordnung mit rationalen Coëfficienten ersten Grades, — welche die einfachste ist und bekanntlich in allen Fällen integrirt werden kann, — unmittelbar an und ist in ihrer Allgemeinheit durch

$$\begin{aligned}&[Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Hx+2Ky+L]dx\\+&[A'x^2+2B'xy+C'y^2+2H'x+2K'y+L']dy=0\end{aligned} \quad \ldots(1)$$

dargestellt. Betrifft hiernach ihre Integration eine der elementarsten Fragen, die bei geordneter Behandlung der Differentialgleichungen zu untersuchen wären, so ist sie auch in anderer Hinsicht von einer gewissen Bedeutung. Differentialgleichungen erster Ordnung, aus welchen für $\frac{dy}{dx}$ eine irrationale oder transcendente Function von x und y erhalten wird und deren Integration selten möglich ist, lassen sich nämlich, wenn x und y innerhalb gewisser Grenzen liegen, durch Entwicklung jener Function bis zu Gliedern zweiter Ordnung auf die hier zu betrachtende Gleichung zurückführen, und Ähnliches gilt von den so häufigen Fällen, in welchen das erste Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in einer Gleichung für $\frac{dy}{dx}$ besteht, deren Integration in geschlossener Form nicht mehr geschehen kann.

Ist daher die in der Überschrift bezeichnete Aufgabe, selbst für manche Anwendungen nicht ganz ohne Belang, so ist es, zumal die allgemeine Lösung dieser Aufgabe in endlicher und geschlossener Form als unmöglich betrachtet wird,

auch nicht ohne Interesse, diejenigen mehr oder weniger bedingten Fälle aufzusuchen, für die eine solche Lösung wirklich existirt.

Eine allerdings nicht sehr grosse Anzahl solcher Fälle ist bekannt. Finden die drei Relationen

$$A'-B=0,\quad C-B'=0,\quad H'-K=0$$

statt, so besteht, wie man weiss, das Integral in einer Gleichung zwischen einem Polynom dritten Grades und einer willkürlichen Constanten. — Ist,

$$A=H=L=0 \quad \text{und} \quad B'=C'=K'=0$$

so lässt sich die Gleichung ebenfalls und zwar nach einer Formel von Bernoulli integriren.

In einigen anderen noch specielleren Fällen liefern die üblichen Verfahrungsarten, die hier nicht näher bezeichnet zu werden brauchen, das allgemeine Integral der Gleichung.

Die in gewisser Hinsicht allgemeinste Lösung der Aufgabe hat Jacobi (Journal von Crelle, B. 24) gefunden; er zeigt nämlich, dass das Integral der Gleichung

$$(a+a'x+a''y)(xdy-ydx)$$
$$-(b+b'x+b''y)dy+(c+c'x+c''y)dx=0$$

durch das Product von Potenzen dreier linearen Ausdrücke, welches einer willkürlichen Constanten gleich zu setzen ist, dargestellt werden kann.

Diese Differentialgleichung enthält scheinbar neun unabhängige Coëfficienten; in der That aber lassen sich dieselben auf acht reduciren, auch überzeugt man sich leicht, dass der von Jacobi betrachtete Fall die vier Relationen

$$A=A'+2B=C+2B'=C'=0$$

zwischen den Constanten der Differentialgleichung (1) voraussetzt.

In der vorliegenden Arbeit nun wird gezeigt, dass dieser Gleichung (1) ein Integral, dessen Zusammensetzung jener der Jacobi'schen Formel analog ist, auch dann entspricht, wenn zwischen den Coëfficienten gewisse andere Bedingungsgleichungen und zwar deren nicht vier, sondern blos drei erfüllt sind. Die genannte Formel folgt daraus als specieller Fall.

Aus dieser Lösung ergeben sich ausserdem einige speciellere Fälle mit vier oder fünf jedoch wesentlich einfacheren Relationen zwischen den Coëfficienten; sie sind Ausnahmefälle, denen ein theilweise transcendentes Integral entspricht.

Ein zweites Resultat besteht in dem Nachweis, dass der in Rede stehenden Differentialgleichung unter gewissen Umständen auch ein aus dem Product der Potenzen von vier linearen Ausdrücken gebildetes Integral genügen könne, welches in besonderen Fällen ebenfalls zum Theil transcendent wird.

Der Weg auf welchem die Resultate erhalten werden, führt immer unmittelbar zum Ziel ohne sonstige Betrachtungen nöthig zu machen; er ist zugleich sehr elementar, aber, wie man bemerken wird, durchaus indirect, was übrigens bei den meisten auf diesem Gebiet erlangten Resultaten im Grunde der Fall ist. Die Rechnung umkehren, damit die Herleitung als eine directe erscheine, wollte ich umsoweniger, als jener Weg ohne Zweifel einer noch ausgedehntern Anwendung fähig ist.

1.

Die Frage nach den Relationen, welche zwischen den Constanten der Differentialgleichung bestehen müssen, damit das Integral das Product der Potenzen dreier linearen Ausdrücke enthalte, soll hier zunächst in Betracht gezogen werden.

Ausgehend von der Gleichung

$$pvw\,du + quw\,dv + ruv\,dw = 0$$

worin p, q, r näher zu bestimmende Constante und u, v, w die linearen Verbindungen:

$$u = x + ay + a', \quad v = x + by + b', \quad w = x + cy + c'$$

sind, erhält man, wenn nach erfolgter Substitution dieser Ausdrücke, die, resp. mit dx und dy multiplicirten Glieder zusammengefasst und dann den entsprechenden der gegebenen Differentialgleichung (1) verglichen werden, zwischen den neun Coëfficienten p, q, r, a, a', b, b', c, c' und den gegebenen $A, A', .. L, L'$ die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$A=p+q+r$$
$$2B=(b+c)p+(c+a)q+(a+b)r$$
$$C=bcp+caq+abr$$
$$2H=(b'+c')p+(c'+a')q+(a'+b')r$$
$$2K=(bc'+cb')p+(ca'+ac')q+(ab'+ba')r$$
$$L=b'c'p+c'a'q+a'b'r$$
$$A'=ap+bq+cr$$
$$2B'=(b+c)ap+(c+a)bq+(a+b)cr$$
$$C'=abc(p+q+r)$$
$$2H'=(b'+c')ap+(c'+a')bq+(a'+b')cr$$
$$2K'=(bc'+cb')ap+(ca'+ac')bq+(ab'+ba')cr$$
$$L'=b'c'ap+c'a'bq+a'b'cr$$

Aus diesen 12 Gleichungen lassen sich die 9 Unbekannten berechnen und ergeben sich noch 3 Relationen zwischen den Constanten der gegebenen Differentialgleichung.

Was zunächst die Coëfficienten a, b, c der Substitution betrifft, so erhält man, wenn A als von Null verschieden vorausgesetzt wird, unmittelbar die folgenden Gleichungen

$$a+b+c=\frac{A'+2B}{A}$$

$$ab+bc+ca=\frac{C+2B'}{A}$$

$$abc=\frac{C'}{A}$$

und sieht man, dass jene Coëfficienten die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$Az^3-(A'+2B)z^2+(C+2B')z-C'=0$$

sind, folglich als bekannt betrachtet werden können.

Um ferner auch die Coëfficienten a', b', c' zu erhalten, bemerke man, dass aus den Bedingungsgleichungen sich die folgenden

$$aA-A'=(a-b)q+(a-c)r$$
$$2(aB-B')=(a-b)(a+c)q+(a-c)(a+b)r$$
$$2(aH-H')=(a-b)(a'+c')q+(a-c)(a'+b')r$$
$$2(aK-K')=(a-b)(ac'+ca')q+(a-c)(ab'+ba')r$$

ableiten lassen, und aus diesen wieder

$$a(aA-A')-(aB-B')=\frac{1}{2}(a-b)(a-c)(q+r)$$
$$a(aH-H')-(aK-K')=\frac{1}{2}(a-b)(a-c)(q+r).a'$$

sich ergeben. Durch Elimination von $q+r$ folgt eine Gleichung für a' und auf gleiche Weise erhält man auch eine solche für b' und für c'.

Diese Gleichungen sind:

$$a'[a(aA-A')-(aB-B')]=a(aH-H')-(aK-K')$$
$$b'[b(bA-A')-(bB-B')]=b(bH-H')-(bK-K')$$
$$c'[c(cA-A')-(cB-B')]=c(cH-H')-(cK-K').$$

Ebenso einfach lassen sich die noch fehlenden Coëfficienten p, q, r durch die Wurzeln der cubischen Gleichung ausdrücken. Man erhält sie sogleich aus den drei ersten Bedingungsgleichungen und findet:

$$p=\frac{a^2A-2aB+C}{(a-b)(a-c)}$$
$$q=\frac{b^2A-2bB+C}{(b-c)(b-a)}$$
$$r=\frac{c^2A-2cB+C}{(c-a)(c-b)}$$

Hiermit sind alle Unbekannten unter der Voraussetzung gefunden, dass A nicht Null sei und keine der Wurzeln a, b, c mit der andern zusammenfalle. An dieser Voraussetzung muss bis zur Annahme des Gegentheils festgehalten werden.

2.

Die drei Relationen, von welchen im vorigen Art. die Rede war, bestehen aus einer linearen und homogenen Gleichung zwischen H, H', K, K' und zwei Gleichungen für L und L', alle mit gewissen Verbindungen der Constanten $A, A', .. C, C'$ versehen.

Die erstgenannte Relation ergibt sich aus den vorhin für H, K, H', K' angegebenen Gleichungen, welche sich in der Form

$$(q+r)a'+(r+p)b'+(p+q)c'-2H=0$$
$$(cq+br)a'+(ar+cp)b'+(bp+aq)c'-2K=0$$
$$(bq+cr)a'+(cr+ap)b'+(ap+bq)c'-2H'=0$$
$$bc(q+r)a'+ca(r+p)b'+ab(p+q)c'-2K'=0$$

schreiben lassen. Sie führen, nachdem a', b', c' daraus eliminirt sind, zu einer Gleichung zwischen den übrigen Grössen, welche mehrere Reductionen zulässt. Diese Gleichung ist, wenn der Kürze wegen:

$$\Delta=(a-b)(b-c)(c-a)$$

gesetzt wird, die folgende:

$$\begin{aligned}
&H.\left[\begin{array}{l} bc(a-b)(a-c)p(r^2-q^2)+ca(b-a)(b-c)q(p^2-r^2) \\ +ab(c-a)(c-b)r(q^2-p^2) \end{array}\right] \\
+&K.\left[\begin{array}{l} (a-b)(a-c)p(bq^2-cr^2)+(b-a)(b-c)q(cr^2-ap^2) \\ +(c-a)(c-b)r(ap^2-bq^2)-pqr.\Delta \end{array}\right] \\
+&H'.\left[\begin{array}{l} (a-b)(a-c)p(cq^2-br^2)+(b-a)(b-c)q(ar^2-cp^2) \\ +(c-a)(c-b)r(bp^2-aq^2)+pqr.\Delta \end{array}\right] \\
+&K'.\left[\begin{array}{l} (a-b)(a-c)p(r^2-q^2)+(b-a)(b-c)q(p^2-r^2) \\ +(c-a)(c-b)r(q^2-p^2) \end{array}\right]=0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich, wenn für p, q, r die angegebenen Ausdrücke substituirt werden, durch Multiplication mit Δ^2 von Brüchen befreien und es zeigt sich dann bei näherer Betrachtung der in den eckigen Klammern enthaltenen ganzen Functionen von a, b, c, dass diese Functionen alternirende sind, somit durch je ein Product von Δ und einer symmetrischen Function der Wurzeln a, b, c dargestellt werden können.

Diese Function kann also in rationaler Weise durch die Constanten A, A', .. C, C' ausgedrückt werden. Die hierbei erforderlichen, allerdings etwas umständlichen Rechnungen brauchen, da sie keine Schwierigkeit machen, hier nicht näher ausgeführt zu werden, und liefern die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
&[(A'C-AC')(B'^2-A'C')+(B'C-BC')(AC'-2BB'+A'C)].H \\
+&[AC'-A'C)(AC'-BB')+2(AB'-A'B)(B'^2-A'C'+B'C-BC')].K \\
=&[CA'-C'A)(B^2-CA)+(BA'-B'A)(C'A-2B'B+CA')].K' \\
+&[C'A-CA')(C'A-B'B)+2(C'B-CB')(B^2-CA+BA'-B'A)].H'
\end{aligned} \quad \ldots \text{I.}$$

Wie man sieht, kann die eine Seite dieser Gleichung aus der andern durch Vertauschung von A, B, C, H, K resp. mit C', B', A', K', H' und von A', B', C', H', K' resp. mit C, B, A, K, H erhalten werden.

Die zwei anderen, zwischen den Constanten der Differentialgleichung bestehenden Relationen, welche die Werthe von L und L' bestimmen, ergeben sich aus den beiden früheren Gleichungen

$$\begin{aligned} L &= b'c'p + c'a'q + a'b'r \\ L' &= b'c'ap + c'a'bq + a'b'cr \end{aligned}$$

wenn darin die sechs Grössen a', b', c', p, q, r durch ihre als Functionen von a, b, c gegebenen Werthe ersetzt und hierauf a, b, c mittelst ihrer symmetrischen Verbindungen $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc, eliminirt werden. Unter der nothwendigen Voraussetzung, dass keine jener sechs Grössen unendlich, also keiner ihrer Nenner Null sei, kann man die Gleichung von Brüchen befreien und findet dann, dass die linke Seite den Factor Δ enthält und die rechte Seite näher entwickelt und nach den Quadraten und Producten der Grössen H, $H'+K$, K' geordnet, einen aus sechs Gliedern bestehenden Ausdruck gibt, welcher, da jedes dieser Glieder eine alternirende Function von a, b, c ist, als das Poduct von Δ und einem Aggregat symmetrischer Verbindungen von a, b, c dargestellt werden kann. Werden diese Verbindungen eliminirt, so erscheint die Gleichung für L in folgender Form:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{c} (B^2-AC)(BC'-B'C)+(B'^2-A'C')(AB'-A'B) \\ -2(AB'-A'B)(BC'-B'C)+(AC'-BB')(AC'-A'C) \end{array}\right].L \\ &\quad = [(AC'-A'C)C'+(B'C-BC')(2B'+C)].H^2 \\ &\quad + [(A'B-AB')C'+(BC'-B'C)(2B+A')].(H'+K)H \\ &\quad + [(A'C-AC')(A'+B)+2(AB'-A'B).B'].HK' \\ &\quad + A(B'C-BC')(H'+K)^2+A(A'B-AB').K'^2 \\ &\qquad + A(AC'-A'C).(H'+K)K' \end{aligned} \quad \ldots\ (\mathrm{II})$$

Auf demselben Wege findet man eine analoge Gleichung für L'.

Diese ergibt sich aber auch ohne Ausführung der Rechnung, wenn man die erwähnte Vertauschung der Buchstaben eintreten lässt.

Die Gleichung ist also:

$$\left[\begin{array}{c}(B'^2-A'C')(B'A-BA')+(B^2-AC)(C'B-CB')\\ -2(C'B-CB')(B'A-BA')+(C'A-B'B(C'A-CA')\end{array}\right].L'$$
$$= [(C'A-CA')A+(BA'-B'A)(2B+A')].K'^2$$
$$+ [(CB'-C'B)A+(B'A-BA')(2B'+C)].(H'+K)H \quad \ldots (\text{III})$$
$$+ [(CA'-C'A)(C+B')+2(C'B-CB').B].HK'$$
$$+C'(BA'-B'A)(H'+K)^2+C'(CB'-C'B).H^2$$
$$+C'(C'A-CA').(H'+K)H$$

Die Gleichungen (I), (II), (III) drücken die gesuchten, zwischen den Constanten der Differentialgleichung nothwendig bestehenden Bedingungen aus.

Wird denselben entsprochen, so ergibt sich aus der zu Grunde gelegten Gleichung

$$p\frac{du}{u}+q\frac{dv}{v}+r\frac{dw}{w}=0$$

sofort auch das in Frage stehende Integral:

$$u^p\, v^q\, w^r = Const.$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Man kann die Ergebnisse dieser Betrachtung wie folgt zusammenfassen.

Finden zwischen den Constanten der Differentialgleichung

$$[Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Hx+2Ky+L]\,dx$$
$$+[A'x^2+2B'xy+C'y^2+2H'x+2K'y+L']\,dy=0$$

die Relationen (I), (II), (III) statt und bezeichnet man mit a, b, c die von einander verschiedenen Wurzeln der cubischen Gleichung

$$Az^3-(A'+2B)z^2+(C+2B')z-C'=0$$

so ist, wenn A von Null verschieden, und die als endlich vorausgesetzten Grössen a', b', c', p, q, r aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
a'[a(aA-A')-(aB-B')] &= a(aH-H')-(aK-K')\\
b'[b(bA-A')-(bB-B')] &= b(bH-H')-(bK-K')\\
c'[c(cA-A')-(cB-B')] &= c(cH-H')-(cK-K')
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
p(a-b)(a-c) &= a^2A-2aB+C\\
q(b-c)(b-a) &= b^2A-2bB+C\\
r(c-a)(c-b) &= c^2A-2cB+C
\end{aligned}$$

berechnet werden, das Integral jener Differentialgleichung durch die Formel

$$(x+ay+a')^p(x+by+b')^q(x+cy+c')^r = Const.$$

ausgedrückt.

Dass die allgemeinere Bedeutung dieses Resultats durch die drei Bedingungsgleichungen erheblich beschränkt wird, braucht kaum bemerkt zu werden. Aber es hat in manchem Betracht den Anschein, als ob überhaupt die Möglichkeit der Integration der in Rede stehenden Differentialgleichung in endlicher Form dadurch bedingt sei, dass zwischen den Constanten wenigstens drei Gleichungen stattfinden.

Übrigens gestatten jene drei Bedingungsgleichungen den Constanten offenbar einen weit grössern Spielraum, als die vier Bedingungen

$$A=0,\quad A'+2B=0,\quad C+2B'=0,\quad C'=0$$

der Jacobi'schen Differentialgleichung, welcher ebenfalls ein Integral von der hier betrachteten Form entspricht.

3.

Die nähere Ausführung einer Anzahl besonderer Fälle ist nicht ohne Interesse. Hierunter gehört der bisher ausgeschlossene Fall $A=0$.

Aus den im Art. 1 erhaltenen Gleichungen für $A,..C'$ folgt:

$$A'+2B=(a+b+c)(p+q+r)$$
$$C+2B'=(ab+bc+ca)(p+q+r)$$
$$C'=abc(p+q+r)$$

und es muss daher, wenn das Integral von der vorausgesetzten Form sein soll, wegen

$$A=p+q+r=0$$

gleichzeitig auch

$$A=0,\quad A'+2B=0,\quad C+2B'=0,\quad C'=0$$

werden. Der bisher ausgeschlossene Fall ist also mit dem von Jacobi betrachteten identisch; für ihn existirt die cubische Gleichung, aus welcher die Wurzeln a, b, c zu berechnen waren, nicht mehr, überhaupt reichen die Constanten A, B, C, A', B', C' zur Bestimmung derselben nicht mehr aus, sondern es müssen hierzu noch jene H, H', K, K' in Anspruch genommen werden.

Aber es fallen auch die Gleichungen (I), (II), (III) wie man sich leicht überzeugt, als identisch erfüllt, ganz hinweg.

Obschon nun der in Rede stehende Fall bekannt ist, so mag es doch insofern von einigem Interesse sein, darauf zurückzukommen, als der bisher befolgte elementare Weg etwas kürzer als die mir bekannten Herleitungen zum Ziele führt.

Vorausgeschickt sei jedoch die Bemerkung, dass, wenn A von Null verschieden ist, für a, b, c nicht blos eine, sondern zwei cubische Gleichungen bestehen, welche aber durch dieselben Werthe dieser drei Grössen befriedigt werden, wenn die Bedingungen (I), (II), (III) erfüllt sind. Es ist nun zweckmässig, jene zweite cubische Gleichung, welche früher nicht erforderlich war, hier ebenfalls näher zu bezeichnen.

Aus den im Art. 1 aufgestellten Gleichungen findet man

$$aL-L'=(a-b)a'c'q+(a-c)a'b'r$$

und weil dort auch

$$aA-A'=(a-b)q+(a-c)r$$
$$2(aH-H')=(a-b)(a'+c')q+(a-c)(a'+b')r$$

erhalten wurde, so gelangt man zu der Gleichung

$$a'^2(aA-A')-2a'(aH-H')+aL-L'=0$$

aus welcher mit Hilfe der a. a. O. bereits angegebenen

$$a'[a(aA-A')-(aB-B')]=a(aH-H')-(aK-K')$$

die Grösse a' eliminirt werden kann. Das Ergebniss dieser Elimination ist, wenn A von Null verschieden, eine Gleichung 5. Grades, die sich aber auf eine andere vom 3. Grade reduciren lässt. Man findet nämlich zuerst

$$\begin{aligned}[a^2(aA-A')-2a(aB-B')](aH-H')^2+2(aB-B')(aH-H')(aK-K')\\ -(aA-A')(aK-K')^2-[a(aA-A')-(aB-B')]^2(aL-L')=0\end{aligned}$$

und erhält durch Verbindung dieser mit der frühern cubischen Gleichung

$$a^2(aA-A')-2a(aB-B')+aC-C'=0 \qquad \ldots.(1)$$

nach einer einfachen Rechnung die folgende:

$$\begin{aligned}(aC-C')(aH-H')^2-2(aB-B')(aH-H')(aK-K')\\ +(aA-A')(aK-K')^2+[(aB-B')^2-(aA-A')(aC-C')](aL-L')=0\end{aligned} \qquad \ldots(2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) für a, und wie sich von selbst versteht, auch für b und c, beide vom 3. Grade, müssen also gleichzeitig erfüllt werden; dies aber ist, wie bemerkt, der Fall, wenn die Bedingungen (I), (II), (III) zwischen den Constanten stattfinden. Wenn somit eine von ihnen für besondere Beziehungen zwischen diesen Constanten zu existiren aufhört, wie dies bei (1) für $A=0, .. C'=0$ wirklich geschieht, so tritt die andere rücksichtlich der Grössen a, b, c subsidiarisch an ihre Stelle. Diese Bemerkung ist, wie ich glaube, geeignet, das Verhältniss des Jacobi'schen Ausnahmefalles zu dem allgemeinern des vorigen Art. in das Licht zu setzen.

Um nun den Fall, welcher den Bedingungen

$$A=0, \quad A'+2B=0, \quad C+2B'=0, \quad C'=0$$

entspricht, näher zu entwickeln, bemerke man, dass hierbei die Gleichung (1) wegfällt und dass (2) in

$$2B(aK-K')^2-2aB'(aH-H')^2$$
$$-2(aB-B')(aH-H')(aK-K')+(aB-B')^2(aL-L')=0$$

übergeht. Sind die Wurzeln a, b, c dieser Gleichung gefunden, so ergeben sich sofort auch a', b', c' und p, q, r aus den früheren Formeln.

Man gelangt hiernach, wenn der Vereinfachung wegen $2L$ und $2L'$ resp. für L und L' geschrieben wird, zu dem folgenden Resultat.

Ist:

$$[Bxy-B'y^2+Hx+Ky+L]\,dx$$
$$+[B'xy-Bx^2+H'x+K'y+L']\,dy=0$$

die gegebene Differentialgleichung, so entspricht dieser, wenn man die von einander verschiedenen Wurzeln der cubischen Gleichung

$$B(zK-K')-zB'(zH-H')^2$$
$$-(zB-B')(zH-H')(zK-K')+(zB+B')^2(zL-L')=0$$

mit a, b, c bezeichnet und mittelst derselben die Werthe von a', b', c', p, q, r aus den Gleichungen

$$a'=\frac{a^2H-a(H'+K)+K'}{aB+B'},\quad p=\frac{2(aB+B')}{(a-b)(c-a)}$$
$$b'=\frac{b^2H-b(H'+K)+K'}{bB+B'},\quad q=\frac{2(bB+B')}{(b-c)(a-b)}$$
$$c'=\frac{c^2H-c(H'+K)+K'}{cB+B'},\quad r=\frac{2(cB+B')}{(c-a)(b-c)}$$

berechnet, die Gleichung

$$(x+ay+a')^p(x+by+b')^q(x+cy+c')^r=Const.$$

als das vollständige Integral, wobei $r=-(p+q)$ ist.

Dieses Resultat ist nicht conform mit dem Satz, welchen Jacobi für die Bestimmung des Integrals aufgestellt hat, und in welchem nicht a', b', c', p, q, r durch die Wurzeln a, b, c, sondern alle diese neun Grössen als Functionen der Wurzeln einer andern Gleichung 3. Grades ausgedrückt werden.

Da jener oft citirte Satz zum Theil verschiedene Begründungen erfahren hat, so soll hier, wie bereits bemerkt wurde, eine weitere Herleitung desselben beigefügt werden, die in dem Folgenden besteht.

Unmittelbar aus den ursprünglichen Bedingungsgleichungen, welche Art. 1 aufgestellt wurden, erhält man die schon früher benutzten Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a'(aA-A')-2(aH-H') &= -\ [(a-b)c'q+(a-c)b'r] \\
a'(aC-C')-2a(aK-K') &= -a^2[(a-b)c'q+(a-c)b'r] \\
2(aL-L') &= +a'[(a-b)c'q+(a-c)b'r]
\end{aligned}$$

wobei wieder $2L$ und $2L'$ resp. für L und L' geschrieben wurde.

Sechs analoge Gleichungen ergeben sich, wenn a mit b, dann mit c, ferner a' mit b', dann mit c' u. s. w. vertauscht werden. Zum Überfluss seien diese Gleichungen hier bemerkt:

$$\begin{aligned}
b'(bA-A')-2(bH-H') &= -\ [(b-c)a'r+(b-a)c'p] \\
b'(bC-C')-2b(bK-K') &= -b^2[(b-c)a'r+(b-a)c'p] \\
2(bL-L') &= +b'[(b-c)a'r+(b-a)c'p] \\
c'(cA-A')-2(cH-H') &= -\ [(c-a)b'p+(c-b)a'q] \\
c'(cC-C')-2c(cK-K') &= -c^2[(c-a)b'p+(c-b)a'q] \\
2(cL-L') &= +c'[(c-a)b'p+(c-b)a'q]
\end{aligned}$$

Wird hierin

$$\begin{aligned}
2\alpha &= (a-b)c'q+(a-c)b'r \\
2\beta &= (b-c)a'r+(b-a)c'p \\
2\gamma &= (c-a)b'p+(c-b)a'q
\end{aligned}$$

gesetzt und führt man die Werthe

$$A=0, \quad C=-2B', \quad A'=-2B, \quad C'=0$$

ein, so gehen die neun Gleichungen über in die folgenden:

$$\begin{aligned}
\alpha + a'B - (aH - H') &= 0\\
a\alpha - a'B' - (aK - K') &= 0\\
a'\alpha - (aL - L') &= 0\\
\beta + b'B - (bH - H') &= 0\\
b\beta - b'B' - (bK - K') &= 0\\
b'\beta - (bL - L') &= 0\\
\gamma + c'B - (cH - H') &= 0\\
c\gamma - c'B' - (cK - K') &= 0\\
c'\gamma - (cL - L') &= 0
\end{aligned}$$

Durch Elimination von a und a' erhält man aus den drei ersten dieser Gleichungen:

$$\begin{gathered}
(\alpha^2 - \alpha K - B'L)(\alpha B' + BK' + B'H')\\
+ (\alpha K' + B'L')(BK + B'H - \alpha B) = 0
\end{gathered}$$

oder, näher entwickelt:

$$\begin{gathered}
\alpha^3 + (H' - K)\alpha^2 - (BL' + B'L + HK' - H'K)\alpha\\
+ (BK + B'H)L' - (BK' + B'H')\, L = 0
\end{gathered}$$

Durch Elimination von b, b', c, c' aus den übrigen sechs Gleichungen ergibt sich offenbar für β und γ dieselbe cubische Gleichung wie für α; es sind daher α, β, γ die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{gathered}
z^3 + (H' - K)z^2 - (BL' + B'L + HK' - H'K)z\\
+ (BK + B'H)L' - (BK' + B'H')\, L = 0
\end{gathered}$$

Angenommen man habe diese berechnet, so folgen aus den obigen neun Gleichungen auch a, b, c und a', b', c'; man findet nämlich:

$$\begin{aligned}
a[BK + B'H - \alpha B] &= BK' + B'H' + \alpha B'\\
b[BK + B'H - \beta B] &= BK' + B'H' + \beta B'\\
c[BK + B'H - \gamma B] &= BK' + B'H' + \gamma B'
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
a'[BK + B'H - \alpha B] &= \alpha^2 + (H' - K)\alpha + HK' - H'K\\
b'[BK + B'H - \beta B] &= \beta^2 + (H' - K)\beta + HK' - H'K\\
c'[BK + B'H - \gamma B] &= \gamma^2 + (H' - K)\gamma + HK' - H'K
\end{aligned}$$

Die Werthe von p, q, r ergeben sich aus den Gleichungen, durch welche weiter oben die Bedeutung der Grössen α, β, γ festgestellt wurde, wenn man sie mit der Gleichung $p+q+r=0$ in Verbindung bringt.

Man erhält

$$p\,[(b-c)a'+(c-a)b'+(a-b)c'] = 2(\gamma-\beta)$$
$$q\,[(b-c)a'+(c-a)b'+(a-b)c'] = 2(\alpha-\gamma)$$
$$r\,[(b-c)a'+(c-a)b'+(a-b)c'] = 2(\beta-\alpha)$$

und sieht hieraus, dass die zu Grund gelegte Differentialgleichung

$$p\frac{du}{u}+q\frac{dv}{v}+r\frac{dw}{w}=0$$

in der Form

$$(\gamma-\beta)\frac{du}{u}+(\alpha-\gamma)\frac{dv}{v}+(\beta-\alpha)\frac{dw}{w}=0$$

geschrieben werden kann.

Dies vorausgesetzt folgt, dass das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$[Bxy-B'y^2+Hx+Ky+L]\,dx + [B'xy-Bx^2+H'x+K'y+L']\,dy = 0$$

durch die Gleichung

$$(x+ay+a')^{\gamma-\beta}(x+by+b')^{\alpha-\gamma}(x+cy+c')^{\beta-\alpha} = Const.$$

gegeben ist.

Abgesehen von der Bezeichnung stimmt dieses Resultat mit dem Jacobi'schen überein.

4.

Ein anderer besonderer Fall ist wegen der beträchtlichen Vereinfachungen, welche für ihn in den Formeln des Art. 2 entstehen, der Beachtung werth.

Die Bedingungsgleichung (I) wird nämlich identisch erfüllt, wenn die beiden Relationen

$$(A'B-AB')K+(BB'-A'C)H+(AC-B^2)H'=0$$
$$(CB'-C'B)H'+(BB'-CA')K'+(A'C'-B'^2)K=0$$

stattfinden, wovon man sich leicht durch die Elimination von H' und K' aus ihnen und der Gleichung (I) überzeugt.

Da nun aus diesen zwei Gleichungen

$$(AC-B^2)H'=(AB'-A'B)K+(A'C-BB')H$$
$$(AC-B^2)K'=(CB'-C'B)H+(C'A-BB')K$$

folgt, so können in der frühern Gleichung

$$a'[a(aA-A')-(aB-B')]=a(aH-H')-(aK-K')$$

durch welche a' bestimmt ist, H' und K' eliminirt werden; die Gleichung erscheint dann zunächst in folgender Form:

$$\begin{aligned} a'[a^2A-a(A'+B)+B'](AC-B^2) \\ =H[a^2(AC-B^2)-a(A'C-BB')+B'C-BC'] \\ -K[a(AC-B^2+AB'-A'B)+BB'-AC'] \end{aligned}$$

worin für den Ausdruck rechter Hand offenbar

$$\begin{aligned} (CH-BK)[a^2A-a(A'+B)+B'] \\ +(AK-BH)[a^2B-a(C+B')+C'] \end{aligned}$$

oder, weil vermöge der Gleichung für a

$$a^3A-a^2(A'+2B)+a(C+2B')-C'=0$$

auch

$$a^2B-a(C+B')+C'=a[a^2A-a(A'+B)+B']$$

ist, noch einfacher

$$[a^2A-a(A'+B)+B'][CH-BK+a(AK-BH)]$$

geschrieben werden kann. Wie man sieht, ist also:

$$a'=\frac{CH-BK}{AC-B^2}+a.\frac{AK-BH}{AC-B^2}$$

wofür sich mit Rücksicht auf die zwei ursprünglich angenommenen Bedingungsgleichungen auch:

$$a' = \frac{C'H'-B'K'}{A'C'-B'^2} + a \cdot \frac{A'K'-B'H'}{A'C'-B'^2}$$

setzen lässt.

Analoge Gleichungen ergeben sich für b' und c'.

Auch die Gleichungen für L und L' gestalten sich sehr einfach. Man kann jene für L sowohl aus (II) und (III) als auch aus der Art. 1 für diese Grösse angegebenen Gleichung ableiten, indem man H' und K' wie vorhin eliminirt und die Werthe von a', b', c' substituirt. Auf analoge Weise ergibt sich die Gleichung für L'. Da die Rechnung keine Schwierigkeit hat, so mag es genügen, die Resultate anzugeben.

Man erhält

$$(AC-B^2)L = CH^2-2BHK+AK^2$$
$$(A'C'-B'^2)L' = C'H'^2-2B'H'K'+A'K'^2$$

Die Ausdrücke für p, q, r erleiden keine Veränderung.

Übrigens mögen die Zähler derselben der Kürze wegen mit α, β, γ bezeichnet werden.

Die Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen.

Erfüllt die Differentialgleichung

$$(Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Hx+2Ky+L)dx$$
$$+ (A'x^2+2B'xy+C'y^2+2H'x+2K'y+L')dy = 0$$

die durch die Gleichungen[1]

$$m = \frac{CH-BK}{AC-B^2} = \frac{C'H'-B'K'}{A'C'-B'^2}$$
$$n = \frac{AK-BH}{AC-B^2} = \frac{A'K'-B'H'}{A'C'-B'^2}$$

und

$$(AC-B^2)L = CH^2-2BHK+AK^2$$
$$(A'C'-B'^2)L' = C'H'^2-2B'H'K'+A'K'^2$$

ausgedrückten Bedingungen, und bezeichnen a, b, c die Wurzeln der Gleichung

[1] m und n sind der Abkürzung wegen eingeführte Bezeichnungen.

$$Az^3-(A'+2B)z+(C+2B')z-C'=0,$$

wird auch zur Abkürzung

$$\alpha=a^2A-2aB+C$$
$$\beta=b^2A-2bB+C$$
$$\gamma=c^2A-2cB+C$$

gesetzt, so entspricht jener Differentialgleichung das vollständige Integral:

$$(x+ay+m+an)^{\alpha(c-b)}.(x+by+m+bn)^{\beta(a-c)}$$
$$\times\,(x+cy+m+cn)^{\gamma(b-a)}=Const.$$

Wie man sieht, schliessen die Bedingungen, unter welchen dies gilt, den Fall aus, dass $AC-B^2$ oder $A'C'-B'^2$ Null seien.

Ich füge noch die Bemerkung bei, dass sich dieses Resultat auch ergibt, wenn man von der Gleichung

$$(qu^2+2q'uv+q''v^2)du$$
$$+\,(pv^2+2p'uv+p''v^2)dv=0$$

ausgeht, darin die Substitutionen

$$u=x+ay+a',\quad v=x+by+b'$$

macht und dann analog wie im Art. 1 verfährt.

5.

Wenn in der Differentialgleichung das Product der beiden Veränderlichen nicht vorkommt, so entstehen in den Formeln des Art. 2 ebenfalls beträchtliche Vereinfachungen. Es mag daher auch dieser besondere Fall kurze Erwähnung finden.

Für $B=0$ und $B'=0$ geht die Gleichung (I) über in:

$$A(CK'-C'K)=C'(A'H-AH')$$

und reduciren sich die Gleichungen (II) und (III) auf die folgenden:

$$AC'L = C'H^2 - A'HK' + A(H' + K)K'$$
$$C'AL' = AK'^2 - CK'H + C'(K + H')H.$$

Finden daher diese letzteren drei Gleichungen statt, bezeichnet man mit a, b, c die Wurzeln der Gleichung

$$Az^3 - A'z^2 + Cz - C' = 0$$

und berechnet die Grössen a', b', c' aus den Gleichungen

$$a(aA - A').a' = a(aH - H') - (aK - K')$$
$$b(bA - A').b' = b(bH - H') - (bK - K')$$
$$c(cA - A').c' = c(cH - H') - (cK - K')$$

setzt auch der Kürze wegen:

$$\alpha = a^2A + C, \quad \beta = b^2A + C, \quad \gamma = c^2A + C$$

so ist das Integral der Differentialgleichung

$$[Ax^2 + Cy^2 + 2Hx + 2Ky + L]dx$$
$$+ [A'x^2 + C'y^2 + 2H'x + 2K'y + L']dy = 0$$

durch die Formel

$$(x + ay + a')^{\alpha(c-b)}(x + by + b')^{\beta(a-c)}(x + cy + c')^{\gamma(b-a)} = Const.$$

ausgedrückt.

6.

Eine besondere Betrachtung erfordert der Fall, welcher für $q = -p$ in den Formeln der Art. 1 und 2 eintritt.

Um zunächst die ihm entsprechenden Bedingungen zwischen den Constanten zu erhalten, ist es zweckmässig, auf die ursprünglichen Gleichungen (Art. 1) zurückzugehen. Aus denselben folgt:

$$c(cA - A') - (cB - B') = \frac{1}{2}(c - a)(c - b)(p + q)$$

$$c(cB - B') - (cC - C') = \frac{1}{2}c(c - a)(c - b)(p + q)$$

$$c(cH - H') - (cK - K') = \frac{1}{2}c'(c - a)(c - b)(p + q)$$

und man sieht, dass, weil der Voraussetzung gemäss $p+q=0$ ist, für c die folgenden drei quadratischen Gleichungen:

$$c^2A-c(A'+B)+B'=0$$
$$c^2B-c(C+B')+C'=0$$
$$c^2H-c(H'+K)+K'=0$$

gleichzeitig bestehen müssen. Aus denselben folgen die Gleichungen

$$c=\frac{BK'-C'H}{B(H'+K)-H(C+B')}=\frac{K'(C+B')-C'(H'+K)}{BK'-C'H}$$
$$=\frac{AC'-BB'}{AB'-A'B+AC-B^2}=\frac{BC'-B'C+A'C'-B'^2}{AC'-BB'}$$

wovon jedoch, abgesehen von dem die linke Seite bildenden Gliede c, je eine aus den beiden anderen abgeleitet werden kann.

Es versteht sich von selbst, kann aber auch durch eine etwas umständliche Rechnung direct gezeigt werden, dass, wenn diese Brüche einander gleich sind, die Bedingungsgleichung (I) identisch erfüllt wird.

Da die cubische Gleichung, deren Wurzeln nach Art. 2 die Grössen a, b, c sind:

$$Az^3-(A'+2B)z^2+(C+2B')z-C'=0$$

durch die eine bereits bekannte Grösse c befriedigt wird, so lässt sie sich auf die quadratische Gleichung

$$cAz^2-(cB+B')z+C'=0$$

reduciren, deren Wurzeln die beiden Coëfficienten a und b sind, so dass man hat:

$$a+b=\frac{cB+B'}{cA}, \quad ab=\frac{C'}{cA}$$

und auch die Gleichungen

$$ac=\frac{aB'-C'}{aA-B}, \quad bc=\frac{bB'-C'}{bA-B}$$

erhalten werden.

Rücksichtlich der noch nicht bestimmten Grössen a', b', c', ist zu bemerken, dass a' und b' in einfacherer Form als sie aus den Formeln des Art. 2 sich ergeben würden, erhalten werden können, dass aber c' in Folge der für c vorhin gefundenen quadratischen Gleichungen in unbestimmter Form erscheint und aus den ursprünglichen Bedingungen selbst abgeleitet werden muss.

Um nun zunächst a' und b' zu finden, hat man

$$a'\,[a^2A-a(A'+B)+B'] = a^2H-a(H'+K)+K'$$

und da

$$A'+B = \frac{c^2A+B'}{c},\quad H'+K = \frac{c^2H+K'}{c}$$

so ergeben sich, wie leicht zu sehen, die Gleichungen

$$a' = \frac{acH-K'}{acA-B'},\qquad b' = \frac{bcH-K'}{bcA-B'}$$

und, wenn man die vorhin für ac und bc gefundenen Ausdrücke einsetzt:

$$a' = \frac{BK'-C'H}{BB'-AC'} + a.\frac{B'H-AK'}{BB'-AC'}$$

$$b' = \frac{BK'-C'H}{BB'-AC'} + b.\frac{B'H-AK'}{BB'-AC'}$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$m = \frac{BK'-C'H}{BB'-AC'},\quad n = \frac{B'H-AK'}{BB'-AC'}$$

setzt:

$$a' = m+an,\quad b' = m+bn.$$

Wie man sieht, ist:

$$m = \frac{ab'-ba'}{a-b},\quad n = \frac{a'-b'}{a-b}$$

auch folgt

$$mA+nB = H,\quad mB'+nC' = K'.$$

Zugleich sei bemerkt, dass, wenn man nochmals von den Gleichungen

$$A'+B = \frac{c^2A+B'}{c},\quad C+B' = \frac{c^2B+C'}{c}$$

und von den beiden soeben erhaltenen Relationen Gebrauch macht, die Gleichung

$$m(A'+B)+n(C+B') = cH+\frac{1}{c}K'$$

erhalten wird. Da aber

$$cH+\frac{1}{c}K' = H'+K$$

ist, so gelangt man zu der weitern Relation

$$(mA'+nB')+(mB+nC) = H'+K$$

welche alsbald Anwendung finden wird.

Um nun ferner auch c' zu erhalten, gehe man von den, Art. 1 erhaltenen Gleichungen

$$cA-A' = (c-a)p+(c-b)q$$
$$2(cH-H') = (c-a)(c'+b')p+(c-b)(c'+a')q$$

aus und setze darin wie bisher $q=-p$; man erhält dann

$$cA-A' = (b-a)p$$
$$2(cH-H') = [(b-a)c'+(b'-a')c+ba'-ab']p$$

folglich

$$2\cdot\frac{cH-H'}{cA-A'} = c'+\frac{a'-b'}{a-b}.c+\frac{ab'-a'b}{a-b}$$

oder

$$c' = 2\cdot\frac{cH-H'}{cA-A'}-(m+cn)$$

Übrigens lässt sich c' noch in zwei anderen Formen darstellen, wozu man mittelst der im Art. 1 angeführten Gleichung

$$2H' = (b'+c')ap + (c'+a')bq + (a'+b')cr$$

gelangt, wenn darin $q = -p$, $r = A$ und für a', b' ihre Werthe gesetzt werden. Man erhält zunächst

$$2H' = (ab'-ba')p + c'(a-b)p + [2m + (a+b)n]cA$$

oder, da

$$p = \frac{cA-A'}{b-a}, \quad a+b = \frac{cB+B'}{cA}$$

ist, die folgende Gleichung:

$$2H' = -m(cA-A') - c'(cA-A') + 2mcA + n(cB+B')$$

wofür auch

$$2H' = c(mA+nB) + mA' + nB' - c\,(cA-A')$$

geschrieben werden kann. Mit Rücksicht auf die vorhin bewiesenen Relationen ergibt sich daraus einmal

$$c'(cA-A') = cH - 2H' + mA' + nB'$$

und dann auch

$$c'(cA-A') = cH - H' + K - (mB+nC)$$

Dies vorausgesetzt lassen sich nun auch die Gleichungen für L und L', und zwar leichter als aus (II) und (III) unmittelbar aus den im Art. 1 angegebenen Bedingungen

$$L = b'c'p + c'a'q + a'b'r$$
$$L' = b'c'ap + c'a'bq + a'b'cr$$

herleiten. Letztere gehen für $q = -p$ und wenn man für p und r ihre vorhin bezeichneten Werthe substituirt, über in die folgenden:

$$L = nc'(cA-A') + a'b'A$$
$$L' = -mc'(cA-A') + a'b'cA$$

Die Grössen c und c' lassen sich daraus vollständig eliminiren; wird nämlich der Werth von $c'(cA-A')$ den beiden zuletzt hierfür gefundenen Formeln entnommen, so folgt:

$$L=n[cH-2H'+mA'+nB']+a'b'A$$
$$L'=-m[cH-H'+K-(mB+nC)]+a'b'cA.$$

Da hierin

$$a'b'=m^2+mn(a+b)+n^2ab$$

oder

$$a'b'=m^2+mn.\frac{cB+B'}{cA}+n^2.\frac{C'}{cA}$$

so ist

$$a'b'A=m(mA+nB)+\frac{n}{c}(mB'+nC')$$

wofür auch

$$a'b'A=mH+\frac{n}{c}K'$$

geschrieben werden kann. Bemerkt man dazu noch, dass

$$K'=-c^2H+c(H'+K)$$

so hat man folgende zwei Gleichungen

$$a'b'A=(m-nc)H+n(H'+K)$$
$$a'b'cA=mcH+nK'$$

und kann von der erstern bei der Formel für L, von der letztern bei jener für L' Gebrauch machen. Geschieht dies, so ergeben sich die verlangten Gleichungen in folgender Gestalt:

$$L=m(nA'+H)+n(nB'+K-H')$$
$$L'=n(mC+K')+m(mB+H'-K)$$

womit nun alle erforderlichen Bestimmungen getroffen sind.

Nach Art. 2 und wenn man die vorigen Resultate zusammenfasst, ergibt sich daher der Satz:

Leisten die Constanten der Differentialgleichung

$$[Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Hx+2Ky+L]\,dx$$
$$+\,[A'x^2+2B'xy+C'y^2+2H'x+2K'y+L']\,dy=0$$

den in den Gleichungen

$$\frac{BK'-C'H}{B(H'+K)-H(B'+C)} \qquad \ldots(c)$$
$$=\frac{AC'-BB'}{AB'-A'B+AC-B^2}=\frac{BC'-B'C+A'C'-B'^2}{AC'-BB'}$$

und

$$L=m(nA'+H)+n(nB'+K-H')$$
$$L'=n(mC+K')+m(mB+H'-K)$$

enthaltenen Bedingungen Genüge, wobei

$$m=\frac{BK'-C'H}{BB'-AC'}, \qquad n=\frac{B'H-AK'}{BB'-AC'}$$

ist, und bezeichnet man mit c den gemeinschaftlichen Werth der drei Brüche in (c), setzt ferner

$$c'=2\cdot\frac{cH-H'}{cA-A'}-(m+cn)$$

und nennt man a, b die Wurzeln der Gleichung

$$cA\,.\,z^2+(cB+B')z+C'=0$$

so entspricht jener Differentialgleichung das vollständige Integral

$$\left(\frac{x+ay+m+an}{x+by+m+bn}\right)^{cA-A'}\cdot(x+cy+c')^{(b-a)A}=Const.$$

Es ist bemerkenswerth, dass dieses Resultat auch erhalten wird, wenn man von der Gleichung

$$2qw(vdu-udv)+(pu^2+2p'uv+p''v^2)\,dw=0$$

ausgehend, die Substitutionen

$$u=x+ay+a', \quad v=x+by+b', \quad w=x+cy+c'$$

macht und dann dasselbe Verfahren wie im Art. 1 befolgt.

7.

Einer der Fälle, in welchen das Resultat des Art. 2 zum Theil in unbestimmter Form erscheint, ist ferner derjenige wofür

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$$

ist.

Man überzeugt sich leicht, dass dann die Bedingungsgleichung (I) für die H und K identisch stattfindet, und dass die Gleichung

$$Az^3 - (A'+2B)z^2 + (C+2B')z - C' = 0$$

deren Wurzeln die Coëfficienten a, b, c sind, in die Form

$$(Az - A')[Az^2 - 2Bz + C] = 0$$

gebracht werden kann, deren eine Wurzel $z = c$ oder also

$$c = \frac{A'}{A}$$

bekannt ist. Es sind dann a und b die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$Az^2 - 2Bz + C = 0$$

oder, wenn man will, der Gleichung:

$$A'z^2 - 2B'z + C' = 0.$$

Sind diese berechnet, so ergeben sich a', b' aus den Formeln des Art. 2 wie folgt. Offenbar ist

$$a(aA - A') - (aB - B') = (aA - A')\left(a - \frac{B}{A}\right)$$

Da aber

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2}(a+b)$$

so folgt:

$$a' = 2 \cdot \frac{a(aH - H') - (aK - K')}{(a-b)(aA - A')}$$

und ebenso

$$b' = 2 \cdot \frac{b(bH - H') - (bK - K')}{(b-a)(bA - A')}.$$

Was nun aber c' betrifft, so zeigt die, Art. 2 erhaltene Formel

$$c'[c(cA - A') - (cB - B')] = c(cH - H') - (cK - K')$$

dass wegen

$$cA - A' = 0, \quad cB - B' = 0$$

jener Coëfficient unendlich gross ist.

Ferner findet man aus den dort angegebenen Gleichungen

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = A.$$

Das allgemeine Integral

$$(x + ay + a')^p (x + by + b')^q (x + cy + c')^r = Const.$$

würde in dieser Form für

$$p = 0, \quad q = 0, \quad c' = \infty$$

seine Bedeutung verlieren; da aber, wie gezeigt werden wird, die Producte $c'p$, $c'q$ endliche bestimmte Werthe erhalten, so betrachte man das Integral in der Form:

$$(x + ay + a')^{c'p} (x + by + b')^{c'q} \left(1 + \frac{x + cy}{c'}\right)^{c'r} = Const.$$

Dann geht der letzte Factor über in

$$e^{(x+cy)r} = e^{Ax + A'y}$$

und es sind daher nur noch die Werthe von $c'p$ und $c'q$ zu ermitteln.

Diese ergeben sich sehr leicht aus den im Eingange des Art. 1 für H, H', K, K' angeführten Gleichungen, wenn man darin

$$P = c'p, \quad Q = c'q$$

sonst aber

$$p = 0, \quad q = 0$$

setzt. Es folgt dann:

$$\begin{aligned}
2H &= P + Q + (a' + b')r \\
2K &= bP + aQ + (ab' + a'b)r \\
2H' &= aP + bQ + (a' + b')cr \\
2K' &= abP + abQ + (ab' + a'b)cr
\end{aligned}$$

und hieraus:

$$P = 2 . \frac{a(cH - H') - (cK - K')}{(a - b)(c - a)}$$

$$Q = 2 . \frac{b(cH - H') - (cK - K')}{(b - a)(c - b)}$$

Das gesuchte Integral ist somit:

$$(x + ay + a')^P . (x + by + b')^Q . e^{Ax + A'y} = Const.$$

Was nun aber die bis jetzt nicht berührten Constanten L und L' betrifft, so können in dem vorliegenden Ausnahmefall die Gleichungen (II) und (III) zu deren Bestimmung nicht benutzt werden. Sie sind hier geradezu ungiltig, weil die bei ihrer Herleitung ausdrücklich gemachte Annahme, dass keine der Grössen a', b', c' unendlich gross werde, wenigstens bei c' nicht zutrifft. Man muss daher auch in diesem Falle auf die ursprünglichen Bedingungen des Art. 1 zurückgehen, wonach

$$\begin{aligned}
L &= b'c'p + a'c'q + a'b'r \\
L' &= ab'c'p + ba'c'q + ca'b'r .
\end{aligned}$$

Wie im allgemeinern Fall lässt sich sowohl L als L' unabhängig von den Wurzeln a, b, c blos durch die Constanten der Differentialgleichung ausdrücken. Die hierzu erforderliche, etwas umständliche Rechnung braucht blos angedeutet zu werden. Für

a', b', ferner für

$$c'p = P, \quad c'q = Q$$

setze man die vorhin gefundenen Werthe, substituire A für r und befreie die Gleichungen von Brüchen, dann lassen sich die Coëfficienten der Producte und Quadrate von H, K, H', K' durch die symmetrischen und dem Werthe nach bekannten Verbindungen $a+b$ und ab sowie auch durch $c = \frac{A'}{A}$ darstellen. Ubrigens ist es nicht nöthig, diese Rechnung auch für L' auszuführen, weil sich die entsprechende Gleichung aus jener für L unmittelbar ergibt, wenn man die in Art. 2 bezeichnete Vertauschung der Buchstaben eintreten lässt.

Die Resultate erscheinen nach einigen nahe liegenden Reductionen in folgender Form:

$$\begin{aligned}
&(A'^2 - 2A'B + AC)(B^2 - AC)L \\
&= A^2[CH'^2 - 2BH'K' + AK'^2] \\
&\quad - AC[CH^2 - 2BHK + AK^2] \\
&\quad + 2A'(AK - BH)(BK - AK') \\
&\quad + 2A'(CH - BK)(BH - AH')
\end{aligned} \qquad \ldots (1)$$

und

$$\begin{aligned}
&(C^2 - 2CB' + C'A')(B'^2 - A'C')L' \\
&= C'^2[A'K^2 - 2B'KH + C'H^2] \\
&\quad - C'A'[A'K'^2 - 2B'K'H' + C'H'^2] \\
&\quad + 2C(C'H' - B'K')(B'H' - C'H) \\
&\quad + 2C(A'K' - B'H')(B'K' - C'K)
\end{aligned} \qquad \ldots (2)$$

Man kann die Ergebnisse wie folgt zusammenfassen.

Finden zwischen den Constanten der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
&[Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Hx + 2Ky + L]dx \\
&+ [A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2H'x + 2K'y + L']\,dy = 0
\end{aligned}$$

die Gleichungen

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$$

und jene (1) und (2) statt und bezeichnet man mit a, b die Wurzeln der Gleichung

$$Az^2-2Bz+C=0$$

setzt man ferner zur Abkürzung

$$a'=2\cdot\frac{a(aH-H')-(aK-K')}{(a-b)(aA-A')}$$

$$b'=2\cdot\frac{b(bH-H')-(bK-K')}{(b-a)(bA-A')}$$

und

$$P=2\cdot\frac{a(cH-H')-(cK-K')}{(a-b)(c-a)}$$

$$Q=2\cdot\frac{b(cH-H')-(cK-K')}{(b-a)(c-b)}$$

so ist das vollständige Integral jener Differentialgleichung:

$$(x+ay+a')^P(x+by+b')^Q\ .\ e^{Ax+A'y}=Const.$$

Es versteht sich von selbst, dass man zu diesem Resultat auch direct gelangt, wenn die Gleichung

$$(qv+q')du+(pu+p')dv$$
$$+(qv+q')(pu+p')(mdu+ndv)=0$$

zu Grunde gelegt, dann

$$u=x+ay,\quad v=x+by$$

gesetzt und des Weitern analog wie in den Art. 1 und 2 verfahren wird.

8.

Alles Vorhergehende gründet sich auf den Fall, dass in dem Integral die Potenzen von drei linearen Ausdrücken vorkommen. Wie ich glaube, ist das Vorkommen von vier solchen Verbindungen im Integral noch nicht in Betracht gezogen worden.

Man gelangt dazu, wenn die Gleichung

$$(qv^2+2q'v+q'')du+(pu^2+2p'u+p'')dv=0$$

mittelst der Werthe

$$u=x+ay, \quad v=x+by$$

transformirt wird. Die hieraus entstehende mit der gegebenen Differentialgleichung verglichen führt dann zu den Bedingungen

$$\begin{aligned} A &= p+q & A' &= bp+aq \\ B &= ap+bq & B' &= ab(p+q) \\ C &= a^2p+b^2q & C' &= ab(ap+bq) \\ H &= p'+q' & H' &= bp'+aq' \\ K &= ap'+bq' & K' &= ab(p'+q') \\ L &= p''+q'' & L' &= bp''+aq'' \end{aligned}$$

Aus diesen 12 Gleichungen lassen sich die 8 unbekannten Coëfficienten $p, .. q, .. a, b$ finden und ergeben sich noch 4 Bedingungen, welchen die Constanten der gegebenen Gleichung genügen müssen. Zunächst ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned} a(aA-A')-(aB-B') &= 0, & b(bA-A')-(bB-B') &= 0 \\ a(aB-B')-(aC-C') &= 0, & b(bB-B')-(bC-C') &= 0 \\ a(aH-H')-(aK-K') &= 0, & b(bH-H')-(bK-K') &= 0 \end{aligned}$$

und daraus geht hervor, dass a und b nicht nur die gemeinschaftlichen Wurzeln je zweier neben einander stehender, sondern gleichzeitig aller sechs quadratischen Gleichungen sein müssen. Damit dies der Fall sei, ist erforderlich, dass man habe:

$$\frac{A'+B}{A}=\frac{B'+C}{B}=\frac{H'+K}{H}=m$$

$$\frac{B'}{A}=\frac{C'}{B}=\frac{K'}{H}=n$$

wobei der Kürze wegen die gemeinschaftlichen Verhältnisse mit m und n bezeichnet wurden. Hierin bestehen die genannten vier Bedingungsgleichungen. Zugleich sind auch a und b als die Wurzeln der Gleichung

$$z^2 - mz + n = 0$$

bestimmt.

Für die übrigen sechs Coëfficienten ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} (a-b)p &= aA - A', & (b-a)q &= bA - A' \\ (a-b)p' &= aH - H', & (b-a)q' &= bH - H' \\ (a-b)p'' &= aL - L', & (b-a)q'' &= bL - L' \end{aligned}$$

durch welche jene Coëfficienten immer bestimmt sind, wenn a von b verschieden ist. Die zu Grunde gelegte Gleichung lässt sich dann in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} &[(bA-A')v^2 + 2(bH-H')v + bL - L']du \\ &- [(aA-A')u^2 + 2(aH-H')u + aL - L']dv = 0 \end{aligned}$$

und ihr Integral ist

$$\int \frac{du}{(aA-A')u^2 + 2(aH-H')u + aL - L'} - \int \frac{dv}{(bA-A')v^2 + 2(bH-H')v + bL - L'} = Const.$$

welches sich, wenn man

$$\begin{aligned} &(aA-A')u^2 + 2(aH-H')u + aL - L' \\ &= (aA-A')(u-\alpha)(u-\alpha') \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &(bA-A')v^2 + 2(bH-H')v + bL - L' \\ &= (bA-A')(v-\beta)(v-\beta') \end{aligned}$$

setzt, durch vier Logarithmen ausdrücken lässt.

Hieraus folgt:

Finden zwischen den Coëfficienten der Gleichung

$$\begin{aligned} &[Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Hx + 2Ky + L]\, dx \\ &+ [A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2H'x + 2K'y + L']\, dy = 0 \end{aligned}$$

die Relationen

$$\frac{A'+B}{A}=\frac{B'+C}{B}=\frac{H'+K}{H}$$

$$\frac{B'}{A}=\frac{C'}{B}=\frac{K'}{H}$$

statt und bezeichnet man mit m den gemeinsamen Werth der drei ersten, und mit n jenen der drei letzten Brüche, ferner mit a und b die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$z^2-mz+n=0$$

und mit α, α' und β, β' die Wurzeln resp. der Gleichungen

$$(aA-A')u^2+2(aH-H')u+aL-L'=0$$
$$(bA-A')v^2+2(bH-H')v+bL-L'=0$$

so ist das vollständige Integral jener Differentialgleichung durch die Formel

$$\left[\frac{x+ay-\alpha}{x+ay-\alpha'}\right]^{(\beta-\beta')(bA-A')}\cdot\left[\frac{x+by-\beta'}{x+by-\beta}\right]^{(\alpha-\alpha')(aA-A')}=Const.$$

dargestellt.

Wenn einer der Coëfficienten B', C', K' Null ist, so sind es vermöge der Bedingungen des Satzes auch die beiden anderen, und wird das zweite Glied der Differentialgleichung frei von y.

Ist nun aber $B'=C'=K'=0$, also auch $n=0$, so wird

$$A'=A\cdot\frac{C}{B}-B,\quad H'=H\cdot\frac{C}{B}-K$$

und geht die Differentialgleichung über in:

$$B.[Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Hx+2Ky+L]dx$$
$$+[(AC-B^2)x^2+2(HC-KB)x+BL']dy=0$$

Die Gleichung für z reducirt sich auf

$$z^2-mz=0$$

und es ist

$$a = m = \frac{C}{B}, \quad b = 0;$$

daher sind α, α' und β, β' die Wurzeln resp. der Gleichungen:

$$B^2u^2 + 2BKu + CL - BL' = 0$$
$$(AC - B^2)v^2 + 2(HC - KB)v + BL' = 0$$

und das Integral der vorstehenden Differentialgleichung ist:

$$\left[\frac{Bx + Cy - \alpha B}{Bx + Cy - \alpha' B}\right]^{\frac{\beta-\beta'}{B^2}} \cdot \left[\frac{x - \beta'}{x - \beta}\right]^{\frac{\alpha-\alpha'}{B^2 - AC}} = Const.$$

wie man übrigens durch die Substitution

$$y = \frac{B}{C}(x - u)$$

unmittelbar hätte finden können.

Wenn einer der Coëfficienten A, B, H Null ist, so sind es offenbar auch die beiden anderen und in diesem Falle wird das erste Glied der Differentialgleichung frei von x; die Aufgabe ist dann der vorigen ganz analog, aber es werden die Formeln unbrauchbar, weil m und n unendlich sind. Übrigens braucht kaum bemerkt zu werden, dass, weil für $A = B = H = 0$ die Differentialgleichung in

$$[Cy^2 + 2Ky + L]\,dx$$
$$+ [A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2H'x + 2K'y + L']\,dy = 0$$

übergeht, und zwischen den Constanten die Relationen

$$C = \frac{A'}{B'}.C' - B', \quad K = \frac{A'}{B'}.K' - H'$$

stattfinden, es behufs der Trennung der Veränderlichen hinreicht, wenn man blos für x eine neue Veränderliche einführt, welche durch die Gleichung

$$x = \frac{B'}{A'}(u - y)$$

bestimmt ist.

Ein eigentlicher Ausnahmefall des allgemeinern Resultates aber findet statt, wenn die Constanten der Differentialgleichung so beschaffen sind, dass $m^2-4n=0$, also die Wurzeln der quadratischen Gleichung für z einander gleich werden. Dann ist

$$a=b=\frac{1}{2}m$$

und werden die früheren Formeln unbrauchbar, aber der Weg auf dem sie erhalten wurden, führt mit einer kleinen Abänderung dennoch zum Ziele, wie hier kurz angedeutet werden mag.

In der frühern Gleichung

$$\begin{aligned}&[(bA-A')v^2+2(bH-H')v+bL-L']du\\ -\;&[(aA-A')u^2+2(aH-H')u+aL-L']dv=0\end{aligned}$$

wobei

$$u=x+ay,\quad v=x+by$$

setze man zunächst

$$b=a+\varepsilon,$$

unter ε eine kleine Grösse verstanden, so dass

$$v=u+\varepsilon y$$

also

$$v^2=u^2+2\varepsilon uy,\quad dv=du+\varepsilon dy$$

gesetzt werden kann. Es ergibt sich dann, wenn zur Abkürzung

$$U=(aA-A')u^2+2(aH-H')u+aL-L'$$

bezeichnet wird, die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}&Udu+2\varepsilon y[(aA-A')u+aH-H']\,du\\ &+\varepsilon[Au^2+2Hu+L]du-Udu-\varepsilon Udy=0\end{aligned}$$

aus welcher nach Weglassung der sich aufhebenden Glieder und wenn man mit ε dividirt:

$$ydU-Udy+[Au^2+2Hu+L]\,du=0$$

erhalten wird. Das Integral dieser und also auch der gegebenen Differentialgleichung ist

$$\frac{y}{U} - \int \frac{Au^2+2Hu+L}{U^2} du = Const.$$

Nach Ausführung der Quadratur hat man

$$u = x+ay$$

zu setzen.

Da $$m = 2a, \quad n = a^2,$$

so findet der hier in Rede stehende seltene Ausnahmefall nur dann statt, wenn die Relationen

$$\frac{A'+B}{A} = \frac{B'+C}{B} = \frac{H'+K}{H} = 2a$$

$$\frac{B'}{A} = \frac{C'}{B} = \frac{K'}{H} = a^2$$

bestehen, durch die zugleich auch a bestimmt wird, und welche, wie man sieht, fünf Bedingungen zwischen den Constanten der Differentialgleichung ausdrücken.

Unter die besonderen Fälle, in welchen die in diesem Art. aufgestellte Form des Integrals eine Modification erleidet, gehört auch jener, für den entweder die Wurzeln α und α', oder β und β' einander gleich werden.

Damit z. B. $\alpha' = \alpha$ werde, muss

$$(aA-A')(aL-L')-(aH-H')^2 = 0$$

sein und ist erforderlich, dass diese nach a quadratische Gleichung mit der frühern

$$a^2 - ma+n = 0$$

eine gemeinschaftliche Wurzel besitze, so dass sich sowohl diese Wurzel a in rationaler Form als auch noch eine weitere, fünfte Bedingung zwischen den Constanten der vorgelegten Gleichung ergibt.

Die zweite Wurzel der Gleichung

$$z^2 - mz + n = 0$$

ist dann die Grösse b.

Angenommen es seien jene fünf Bedingungsgleichungen erfüllt, so erhält man, wie nicht näher gezeigt zu werden braucht, für das vollständige Integral die Formel

$$e^{\frac{(\beta'-\beta)(bA-A')}{x+ay-\alpha}} \cdot \left[\frac{x+by-\beta'}{x+by-\beta}\right]^{aA-A'} = Const.$$

Darin ist

$$\alpha = -\frac{aH-H'}{aA-A'}$$

und werden β, β' mittelst des Werthes von b aus der weiter oben für v angegebenen quadratischen Gleichung gefunden.

Wie in dem vorhin betrachteten Ausnahmefall findet also auch hier keine rein algebraische Lösung mehr statt.

Zur Statik des Glycogens im Thierkörper.

Von **Sigmund Weiss**, stud. med.

(Aus dem physiologischen Institute der Wiener Universität.)

Nachdem in einer Reihe von Arbeiten aus den letzten Jahren nachgewiesen wurde, dass die Eiweisskörper sich nicht direct, durch Zersetzung bei der Thätigkeit des Muskels betheiligen, musste die Frage nach den chemischen Vorgängen im thätigen Muskel von neuem in der Physiologie auftauchen und einer neuen Lösung entgegensehen. Es lag nahe, die Aufmerksamkeit jetzt mehr den einzelnen stickstofffreien Bestandtheilen des Muskels zuzuwenden und zu untersuchen, in wie weit diese mit der Muskelarbeit in näherem Zusammenhange stehen.

Diese Arbeit unternahm O. Nasse („Beiträge zur Physiologie der contractilen Substanz". Pflüger's Archiv II. Jahrg. p. 97—121) und er kam in Folge seiner diesbezüglichen Untersuchungen und Experimente zu folgenden Resultaten:

1. Das Glycogen ist ein normaler Bestandtheil des Muskels, nicht nur des embryonalen, sondern auch in erwachsenen Thieren.

2. Die Erstarrung und die Thätigkeit des Muskels ist mit einem Verbrauche von Kohlenhydraten (Glycogen und Zucker) verbunden.

Das Glycogen konnte Nasse in seinen Versuchen nicht direct bestimmen, da zur Zeit, in welcher er seine Versuche anstellte, noch keine Methode bekannt war, die eine directe quantitative Bestimmung des Glycogens zuliess, und er sich offenbar, und auch aus guten Gründen, der Pavy'schen Methode nicht anvertrauen wollte.

Er bestimmte es daher indirect, als Zucker, und zwar auf folgende Weise:

Die mit einer gewogenen Menge Sand zerriebene und mit Wasser verdünnte Muskelmasse lässt er einige Zeit bei niederer Temperatur stehen, um den Übergang des Glycogens aus vielleicht noch unzerriebenen Muskelfasern vollkommen zu machen, versetzt sie hierauf mit einem zuckerbildenden Ferment, zumeist filtrirtem Speichel, und digerirt mit diesem unter häufigem Umrühren einige Stunden lang bei angemessener Temperatur.

Wenn nach der auf die Digestion verwandten Zeit alles Glycogen als in Zucker umgewandelt angesehen werden kann, erhitzt er die Masse im Wasserbade auf 100° Ç. zur Ausfällung der Eiweisskörper, wägt nach dem Abkühlen und titrirt nun die Zuckermenge mit einer verdünnten Lösung von Kupfervitriol unter Zusatz von Kalilauge.

Von etwa vorgebildetem Zucker sah er ab, da nach ihm der von Meissner in den Muskeln entdeckte gährungsfähige Zucker Zersetzungsproduct des Glycogens ist.

Dies Nasse's Methode der Glycogenbestimmung.

Da es nun von Interesse war, zu untersuchen, welche Resultate sich bei einer directen Bestimmung des Glycogens ergeben würden, unternahm ich eine Reihe von Versuchen, deren Art und Ausführung ich hier folgen lasse:

Ein Frosch wurde decapitirt; seine Schenkelnerven in ihrem Verlaufe in der Beckenhöhle blossgelegt. Die Nerven der einen Seite wurden in diesem Verlaufe herausgeschnitten, während die der anderen über zwei Drähte gespannt wurden, welche die Enden der secundären Spirale eines Du-Bois'schen Schlittenapparates darstellten.

Auf diese Weise wurde der betreffende Schenkel (zuerst mit schwachen, endlich mit immer stärkeren Strömen) bis zur vollkommenen Erschöpfung der Muskeln tetanisirt. Jedes Zucken der Muskeln der andern Seite, das etwa durch Stromschleifen hätte entstehen können, wurde sorgfältig vermieden. Diese Procedur wurde bei allen Versuchsfröschen gleichmässig vorgenommen, doch so, dass der eine nicht eher in Angriff genommen ward, bis nicht sein Vorgänger in den bereitstehenden Gefässen (siehe weiter unten) untergebracht war. Ich muss noch erwähnen, dass ich nicht immer den Schenkel derselben Seite tetanisirte, sondern abwechselnd bald den der rechten, bald den der linken,

um etwaige Ungleichheiten zwischen rechten und linken Beinen möglichst auszuschliessen, so also, dass ich in meinem ersten (untenangeführten) Versuche drei tetanisirte Schenkel der rechten und eben so viele der linken Seite habe u. s. w. Es handelte sich nun darum, aus den Muskeln, den tetanisirten sowohl, als den nicht tetanisirten, das Glycogen zu bestimmen. Dies geschah nach der von Professor Brücke angegebenen Methode („Über eine neue Methode, Dextrin und Glycogen aus thierischen Flüssigkeiten und Geweben abzuscheiden und über einige damit erlangte Resultate". Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. Bd. 63, Abth. II., p. 1—9), wie folgt: Waren die Muskeln des tetanisirten Beines vollkommen erschöpft, so wurden diese sowohl, als auch jene des nicht tetanisirten Beines in kleinen Portionen abgetragen, getrennt in siedendes Wasser geworfen, dem vorher etwas Kalilösung zugesetzt war, und damit vollständig zerkocht.

Die nun erhaltene Lösung wurde, nach dem Erkalten, mit Salzsäure und Jodquecksilberkalium, so lange noch ein Niederschlag entstand, gefällt, einige Zeit, 5 Minuten ungefähr, stehen gelassen und filtrirt. Der Niederschlag wurde mit Wasser, dem etwas Salzsäure und Jodquecksilberkalium zugesetzt war, so lange gewaschen, bis eine Probe des Filtrates mit Jodkalijodlösung keine rothe Farbe mehr gab. Nun vereinigte ich das Waschwasser mit dem ursprünglichen Filtrate, fällte mit starkem Alkohol (der unsere hat 95½ Volumprocente), indem ich auf 3 Theile Flüssigkeit ungefähr 4 Theile Alkohol rechnete, und liess das Glycogen sich absetzen. Hatte sich das Glycogen so weit abgesetzt, dass über ihm eine klare Schichte lagerte, so filtrirte ich. (Das Filtrat war häufig von tief rothbrauner Farbe und färbte Stärkekleister blau.)

Der Niederschlag, der aus Glycogen bestand, das noch mit den Reagentien verunreinigt war, und daher eben so häufig wie das Filtrat eine rothbraune oder rothe Farbe zeigte, wurde nun gewaschen, anfangs mit schwächerem Alkohol (60—61%) später mit stärkerem. Ich wusch so lange mit Alkohol, bis der abfliessende eine verdünnte Kalilösung, der etwas Ammoniak- oder Salmiaklösung zugesetzt war, nicht mehr trübte, und auch keine Chlorreaction mehr gab. War dieses geschehen, so wartete ich eine Zeit lang, bis der Alkohol vom Filter theils abgetropft, theils

verdunstet war. Hierauf löste ich den Niederschlag in einer flachen Porzellanschale in Wasser auf und brachte die nun erhaltene Lösung in ein Becherglas. Nun fällte ich das Glycogen aus dieser Lösung mit starkem Alkohol, dem ich vorher etwas Ammoniak zugesetzt hatte, liess absetzen und filtrirte.

Nach dieser Fällung ist das Glycogen bereits schön weiss, während es nach der ersten häufig, wie bereits oben bemerkt, schmutzig-gelb, rothbraun oder roth ist. Hatte ich den ganzen Niederschlag auf dem Filter, dann löste ich nach einiger Zeit wieder auf, filtrirte die Lösung, um Verunreinigungen zu entfernen, die beim wiederholten Fällen, Auflösen und Filtriren etwa hinzugekommen sein möchten, und fällte nun schliesslich mit starkem Weingeist, der vorher mit etwas Eisessig angesäuert wurde, liess absetzen, brachte den Niederschlag auf ein gewogenes Filter, trocknete und wog ihn. Prof. Brücke hat in der oben erwähnten Arbeit nachgewiesen, dass aus dem wiederholten Auflösen und Wiederfällen bei sorgfältigem Arbeiten kein Verlust entsteht. Mit der Stickstoffprobe von Pelouze ist in dem so dargestellten Glycogen kein Stickstoff nachweisbar.

Ich habe nach jedem Versuche nach dem Wägen eine Probe auf Stickstoff untersucht, doch solchen nie gefunden. Beim Verbrennen auf dem Platinblech bleiben stets Spuren anorganischer Salze, welche von der zum Zerkochen angewendeten Kalilösung herrühren. Wenn ich Leberglycogen (aus Hühnerlebern) so darstellte, dass ich die Leber blos in siedendem Wasser zerkochte, dann erhielt ich das Glycogen nicht nur stickstoff-, sondern auch aschefrei, wie es Prof. Brücke früher bei demselben Verfahren erhalten hatte.

Bevor ich jedoch daran ging, das Glycogen auf die geschilderte Weise zu bestimmen, musste ich mich überzeugen, ob die allgemeine Annahme : Das Glycogen werde durch Kochen mit Kalilauge nicht angegriffen, auch richtig ist. Einige quantitative Bestimmungen bestätigten diese Annahme.

Auch musste ich mich, ehe ich mit ammoniakalischem Alkohol fällte, überzeugen ob das Glycogen durch Stehen unter solchem, keine Veränderungen erleidet. Es ist dies nicht der Fall.

Ich gebe nun die Resultate meiner Experimente in beistehender Tabelle, in welcher Col. I die Zahl der Frösche, Col. II

die Menge des Glycogens der nicht tetanisirten Schenkel, Col. III die Menge des Glycogens der tetanisirten Schenkel, Col. IV den Glycogenverlust in Procenten auf die in Col. II angegebene Zahl bezogen, Col. V die Glycogenmenge in einem nicht tetanisirten Schenkel, Col. VI die Glycogenmenge in einem tetanisirten Schenkel, Col. VII endlich die Differenz zwischen Col. V und VI angibt.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
6.	0·1413	0·107	24·27	0·02355	0·01783	0·00572
12.	0·262	0·188	28·24	0·02183	0·01566	0·00617
15.	0·117	0·059	50·427	0·00780	0·00393	0·00387

Man sieht, dass in den tetanisirten Schenkeln geringere Mengen von Glycogen sind, dass also thatsächlich die Muskelthätigkeit mit einem Verbrauche von Glycogen verbunden ist.

Dass die Zahlen beim dritten Versuche viel geringer sind als bei den beiden ersten, erklärt sich zum Theil daraus, dass die Frösche, die zu diesem Versuche verwendet wurden, kleiner und auch etwas länger in Gefangenschaft waren, als die der anderen, andererseits daraus, dass ich von diesen Fröschen nur die grösseren Muskeln verarbeitete, während ich von den, zu den beiden ersten Versuchen verwendeten Fröschen alle Muskeln der Extremität abtrug.

Da sich nun aus diesen Versuchen ein Verbrauch des Glycogens beim Tetanus ergab, war es mir interessant zu untersuchen, wie sich das Verhältniss beim Herzen gestaltet, einem Muskel, der in immerwährender Thätigkeit begriffen ist.

Ich entnahm daher einem, zu anderen Zwecken, mit Curare getödteten Hunde, der 3½ Stunden vorher mit Stärkekleister gefüttert war und vorher 40 Stunden lang gehungert hatte, möglichst kurze Zeit nach dessen Tödtung, das Herz, und des Vergleiches wegen, eine dem Herzen an Masse ungefähr gleiche Menge (ich habe sie, um der postmortalen Zersetzung des Glycogens keine Zeit zu gönnen, nicht gewogen) von Rückenmuskeln.

Dieser Versuch ergab einen Gehalt an Glycogen:

Im Herzen: 0·510

In den Rückenmuskeln: 0·7175

Im Herzen war also trotz seiner steten Thätigkeit eine Quantität Glycogen aufgespeichert, die noch mehr als $^2/_3$ von dem betrug, was in einer etwa gleich grossen Menge von Rückenmuskelfleisch gefunden wurde.

Wenn nun ein Verbrauch von Glycogen mit der Muskelthätigkeit verbunden ist — und die oben mitgetheilten Versuche sprechen entschieden dafür — so erscheint es schwer begreiflich, wie sich die Muskelthätigkeit bei mangelhafter Nahrung noch ziemlich lange erhält, wenn das Muskelglycogen bei wechselnder Nahrung ähnlich grossen und schnellen Schwankungen unterworfen ist, wie sie Pavy (Berichte über die Fortschritte der Anatomie und Physiologie im Jahre 1862 p. 308—318) und Tscherinoff („Über die Abhängigkeit des Glycogengehaltes der Leber von der Ernährung". Sitzb. der Wiener Akad. der Wissensch. 51. Bd. II. Abth. p. 412—419) für das Leberglycogen fanden.

Um zu untersuchen, wie sich das Muskelglycogen in dieser Beziehung verhält, unternahm ich eine zweite Reihe von Versuchen. Ich fütterte nämlich Hühner auf verschiedene Weise und bestimmte dann das relative Verhältniss des Leberglycogens zum Brustmuskelglycogen.

Die Hühner wurden, bevor sie der in Col. I untenstehender Tabelle angegebenen Diät unterworfen wurden, einige Tage lang mit Weizen gefüttert; hierauf bekamen sie erst eine gewisse Zeit hindurch das ihnen zugewiesene Nahrungsmaterial. Nach Verlauf der in Col. I angegebenen Zeit wurden sie durch Decapitation getödtet und während das Blut aus den durchschnittenen Gefässen abfloss, die Federn der Brustmuskelgegend (auf beiden Seiten) gerupft. Nun wurde der rechtsseitige Brustmuskel in flachen, dünnen Stücken schnell abgetragen und ganz so behandelt, wie ich es oben bei den Froschschenkeln geschildert.

Dann wurde der Brustkorb geöffnet, die Leber herauspräparirt und nach Entfernung der Gallenblase so behandelt wie der Muskel, mit dem Unterschiede jedoch, dass sie als Ganzes in das siedende Wasser (mit Kalilösung) eingetragen, und, nachdem sie eine Zeit lang gekocht, in einer Reibschale fein zerrieben, in die Flüssigkeit zurückgebracht und völlig zerkocht wurde.

Ich stelle nun die Resultate dieser Versuche in beifolgender Tabelle zusammen. Col. I gibt die Art und Dauer der Fütterung

an; Col. II Gewichtszu- oder Abnahme bei der Fütterung, Col. III zeigt den Glycogengehalt der Leber, Col. IV den Glycogengehalt des Brustmuskels, Col. V Gewicht des Brustmuskels der andern Seite, feucht gewogen, Col. VI den Glycogengehalt des Brustmuskels in Procenten, bezogen auf den Brustmuskel der andern Seite.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Weizen 5 Tage	+35	0·155	0·381	58·5	0·651
Hirsekörner u. Grünes 14 Tage[1]	—90	Spuren	0·0623	62·95	0·09895
Fibrin, Kochsalz u. Fett, 3 Tage	+43	0·0009	0·4165	47	0·886
Ebenso	+20	0·032	0·604	75	0·805
Gequolln. Reis u. Rohrzucker 3 Tage	—157	0·852	0·7625	66	1·1553
Ebenso[2]	—91	0·1556	0·328	56·14	0·5842
Ebenso	—46	2·132	0·474	68·22	0·6948

Fassen wir nun die Zahlensprache dieser Tabelle in Worte, so gibt sie uns als Antwort auf unsere oben gestellte Frage: Der Glycogengehalt des Muskels schwankt nicht so stark, wie der der Leber. Das Glycogen schwindet nicht so rasch, wie in der Leber, bei unzureichender Nahrung (Versuch 2) oder auch nur bei Mangel an Kohlehydraten (Versuch 3). In Versuch 3 zeigt sogar der Brustmuskel nach 3tägiger Entziehung aller Kohlehydrate, während fast alles Leberglycogen geschwunden ist, noch einen höheren Procentgehalt an Glycogen als in Versuch 7, in dem eine 2369mal grössere Menge von Leberglycogen gefunden wurde, und ähnlich verhält es sich mit Versuch 4.

Damit ist auch die Erklärung gegeben, warum bei mangelhafter Ernährung die Muskelthätigkeit noch anhält, wenn sich auch ihre Energie allmälig vermindert, und man sieht, dass der Gesammtvorrath an Glycogen, der sich im Organismus befindet, bei

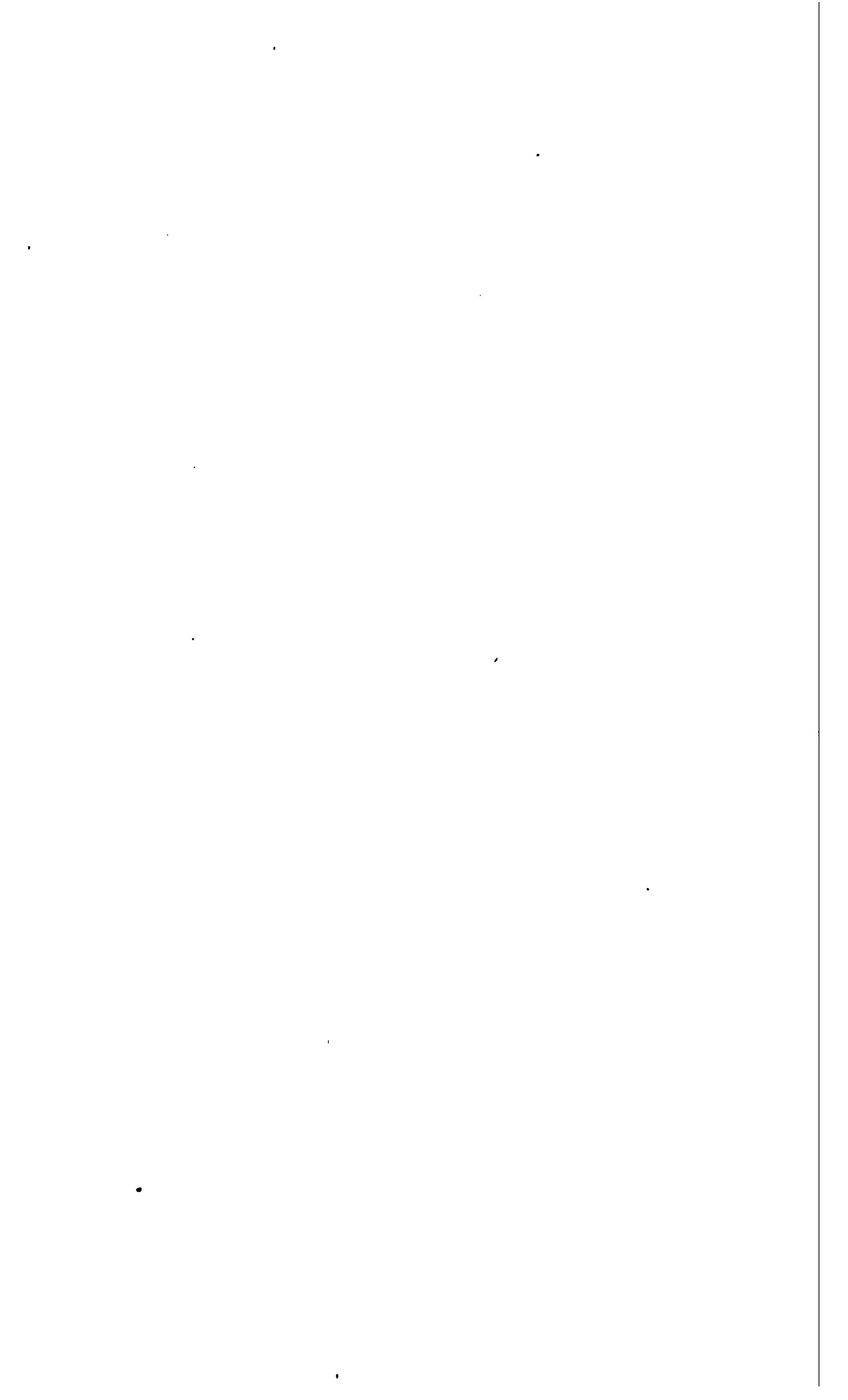
---

[1] Dem, in Versuch 2 angeführten Huhne wurde sein Futter in zum guten Fortkommen ungenügender Menge verabreicht, als Abmagerungsfutter.

[2] Die Ziffer des Leberglycogens ist in diesem Versuche, im Vergleiche mit anderen bei analoger Fütterung von Pavy, Tscherinoff und mir erzielten, sehr klein; es bleibt ungewiss ob aus pathologischen Ursachen oder weil das Futter der letzten drei Tage, dessen Zubereitung ich in diesem Versuche nicht überwachen konnte, nicht die rechte Beschaffenheit hatte.

mangelhafter Zufuhr keineswegs so schnell erschöpft wird, wie man dies aus den früheren Versuchen glauben konnte.

Diese Tabelle lehrt uns aber noch eines, nämlich, dass der Glycogengehalt in den Muskeln doch immerhin ein sehr verschiedener, von der Ernährung abhängiger, ist; und daraus folgt, dass das relative Verhältniss der Muskelbestandtheile zu einander, von der Ernährungsweise abhängigen Veränderungen unterworfen ist, die bis jetzt nicht in Rechnung gezogen wurden.



Die jedem Fachmanne bekannten, bei der raschen Entwickelung der Wissenschaft von Jahr zu Jahr sich steigernden Unzukömmlichkeiten, welche mit der cumulativen Herausgabe von Abhandlungen verbunden sind, die sich auf sämmtliche naturwissenschaftliche Fächer beziehen, haben die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften bestimmt, ihre Sitzungsberichte in zwei gesonderten Abtheilungen erscheinen zu lassen.

Die **erste Abtheilung** enthält die Abhandlungen aus der *Mineralogie, Botanik, Zoologie, Anatomie, Geologie* und *Paläontologie*; die **zweite Abtheilung** die aus der *Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie* und *Astronomie.*

Von jeder dieser Abtheilungen erscheint jeden Monat mit Ausnahme von August und September ein Heft, welches *drei* Sitzungen umfasst. Der Jahrgang enthält somit zehn Hefte.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine vollständige Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen voran, selbst wenn diese nicht zur Aufnahme in die Schriften der Akademie bestimmt werden.

Der Preis des Jahrganges beträgt für eine Abtheilung 12 Gulden ö. W.

Von allen grösseren Abhandlungen kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und sind durch die akademische Buchhandlung Karl *Gerold's* Sohn zu beziehen.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXIV. BAND. III. HEFT.

Jahrgang 1871. — October.

(Mit [illegible] Tafeln.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1871.

INHALT

des 3. Heftes (October) des 64. Bandes, II. Abth. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 30 kr. = 26 Ngr.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

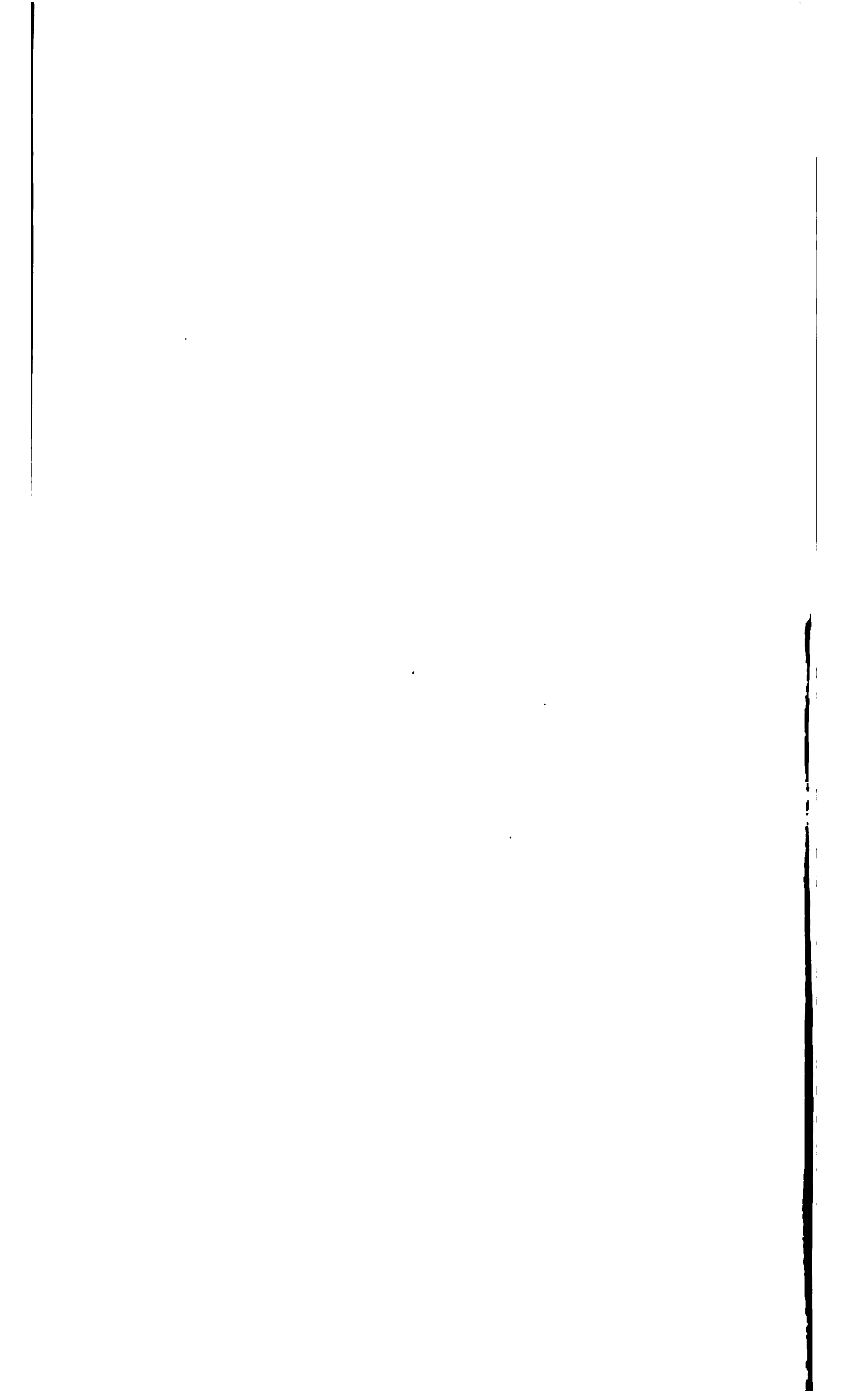
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXIV. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

8.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.



XXI. SITZUNG VOM 12. OCTOBER 1871.

Der Präsident begrüsst die Mitglieder bei Wiederaufnahme der Sitzungen.

Der Secretär theilt folgende Dankschreiben mit:

Von Sr. Excellenz dem Herrn Grafen Anton Auersperg, für seine Wahl zum Ehrenmitgliede der Akademie;

von Sir Charles Darwin für seine Wahl zum ausländischen correspondirenden Mitgliede;

vom Herrn Prof. Dr. Alex. Rollett in Graz für seine Wahl zum wirklichen, und vom Herrn Prof. Dr. Adalbert v. Waltenhofen in Prag für seine Wahl zum inländischen correspondirenden Mitgliede;

endlich von dem Official im k. k. Ministerium für Landesvertheidigung und öffentliche Sicherheit, Herrn Franz Noé, für die ihm, zur Ausführung von weiteren auf die Vervollkommnung von Thermosäulen abzielenden Versuchen, bewilligte Subvention von 300 fl.

Der Secretär theilt ferner ein Telegramm des Herrn Dr. Petermann über den günstigen Erfolg der letzten, von den Herren J. Payer und C. Weyprecht unternommenen Nordpol-Expedition mit.

Das h. Curatorium übersendet, mit Erlass vom 30. September l. J., zwei Exemplare eines vom französischen Handelsministerium veröffentlichten Programms für einen Concurs von Vorschlägen zur Abwehr einer neuen, seit 5 Jahren im Rhône-Thale und anderen Gegenden Frankreichs aufgetretenen Krankheit des Weinstockes, welche durch ein Insect *„Philloxera vastatrix“* verursacht werden soll. Der ausgesetzte Preis, für den auch Ausländer concurriren können, beträgt 20000 Francs.

Das k. & k. Ministerium des Äussern übermittelt mit Indorsat vom 19. Juli l. J. einen Gesandtschaftsbericht des Freiherrn v. Lederer, ddo. Washington 25. Juni 1871, zur Einsicht und Mittheilung an die hiesige medicinische Facultät, welcher die Entdeckung der Heilkraft einer Pflanze, Namens „*Cundurango*" zum Gegenstande hat.

Das k. k. Ministerium des Innern übersendet mit Note vom 10. October l. J. die graphischen Nachweisungen über die Eisbildung an der Donau und March in Nieder-Österreich während des Winters 1870—71.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Die natürliche Familie der Gürtelthiere *(Dasypodes)*" II. Abtheilung, vom Herrn Dr. L. J. Fitzinger in Pest.

„Nachweis für die im Berliner Jahrbuche für 1874 enthaltenen Ephemeriden der Planeten (58) Concordia, (59) Elpis, 62 Erato, (64) Angelina, (91) Ägina und (113) Amalthea", vom Herrn Prof. Dr. Th. v. Oppolzer.

„Histologische Mittheilungen", vom Herrn Prof. Dr. C. Wedl.

„Analyse der Mineralquellen des Herkulesbades nächst Mehadia", von den Herren Professoren J. Köttsdorfer und F. C. Schneider.

„Beiträge zur Lehre von den Transformationen in der Centralprojection und deren Anwendung", vom Herrn Jos. Tesař, suppl. Lehrer an der k. k. Oberrealschule zu Brünn.

„Formel für die Spannkraft gesättigter Dämpfe", vom Herrn Emil Herrmann, Assistenten an der kgl. ungar. Berg- & Forst-Akademie zu Schemnitz.

Herr Prof. Dr. Edm. Reitlinger hinterlegt ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung seiner Priorität.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften, Königl. Preuss., zu Berlin: Abhandlungen aus dem Jahre 1870. Berlin, 1871; 4°. — Monatsbericht. Mai, Juni, Juli 1871. Berlin; 8°.

Akademie der Wissenschaften, Königl. Bayer., zu München: Sitzungsberichte. 1870. II., Heft 3—4; 1871. Philos.-philolog. und histor. Classe, Heft 1—3; Mathem.-physik. Classe, Heft 1—2. München; 8°.

— Kaiserl. Leopoldino-Carolinische Deutsche, der Naturforscher: Verhandlungen. XXXV. Band. Dresden, 1870; 4°.

Annalen der Chemie & Pharmacie von Wöhler, Liebig & Kopp. N. R. Band LXXXII, Heft 3; Band LXXXIII, Heft 1—2. Leipzig & Heidelberg, 1871; 8°.

Annales des mines. VI° Série. Tome XVIII. 4°—6° Livraisons de 1870. Paris; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 9. Jahrgang, Nr. 21—29. Wien, 1871; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1849—1862. (Bd. 78. 1—14.) Altona, 1871; 4°.

Ateneo Veneto: Atti. Serie II. Vol. VI, punt. 3; Vol. VII, punt. 1. Venezia, 1871; 8°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome XLI. Nrs. 162—164. Genève, Lausanne, Paris, 1871; 8°.

Carl, Ph., Repertorium für Experimental-Physik etc. VII. Band, 3. Heft. München, 1871; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXII, Nr. 23; Tome LXXIII, Nrs. 2—13. Paris, 1871; 4°.

Gesellschaft, Anthropologische, in Wien: Mittheilungen. I. Bd., Nr. 11—12. Wien, 1871; 8°.

— geographische, in Wien: Mittheilungen. N. F. 4. 1871, Nr. 7—9. Wien, 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VI. Band, Nr. 14—19. Wien, 1871; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXII. Jahrg., Nr. 29—40. Wien, 1871; 4°.

Hamburg, Stadtbibliothek: Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1871. 4°.

Istituto, R., Veneto di Scienze, Lettere ed Arti: Atti. Tomo XVI°, Serie III°, Disp. 7°—9°. Venezia, 1870—71; 8°.

Jahrbuch, Neues, für Pharmacie und verwandte Fächer, von F. Vorwerk. Band XXXV, 5. & 6. Heft; Band XXXVI, 1. & 2. Heft. Speyer, 1871; 8°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band III, 10. Heft; Band IV, 1.—4. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

Landbote, Der steirische. 4. Jahrgang, Nr. 15—20. Graz, 1871; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1871, Nr. 16—19. Wien; 8°.

Mittheilungen des k. k. technischen und administrativen Militär-Comité. Jahrgang 1871, 8. & 9. Heft. Wien; 8°.

— aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 17. Bd., 1871. VII.—IX. Heft. Gotha; 4°.

Nature. Nrs. 90—98, 100—101, Vol. IV. London, 1871; 4°.

Pest, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1870/1. 4° & 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. Jahrgang 1871. XXI. Band, Nr. 2. Wien; 4°. — Verhandlungen. Jahrgang 1871, Nr. 10—12. Wien; 4°.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXI. Band, Jahrgang 1871, Juli-Heft; XXII. Band. August-Heft. Wien; 8°.

Revue politique et littéraire, et Revue scientifique de la France et de l'étranger. 2e Série. Ire Année, Nrs. 3—15. Paris & Bruxelles, 1871; 4°.

Studenten-Kalender, österr., von Dr. Czuberka, für das Studienjahr 1871. VIII. Jahrgang. Wien; 12°.

Vierteljahresschrift, österr., für wissenschaftliche Veterinärkunde. XXXV. Band, 2. Heft; XXXVI. Band, 1. Heft. Wien, 1871; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXI. Jahrgang, Nr. 29—40. Wien, 1871; 4°.

Zeitschrift für Chemie, von Beilstein, Fittig & Hübner. XIV. Jahrgang. N. F. VII. Band, 8. & 9. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

— des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXIII. Jahrgang, 10.—12. Heft. Wien, 1871; 4°.

Über die Proteïnstoffe.

Von H. Hlasiwetz und J. Habermann.

(Mit 1 Holzschnitte.)

Erste Abhandlung.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Juli 1871.)

Mit Mulder's bekannter grosser und wichtiger Arbeit über die Proteïnstoffe (1837) begann eine Reihe von Untersuchungen, die uns zahlzeiche Zersetzungs- und Umwandlungsproducte derselben kennen gelehrt haben.

Die meisten generellen Methoden der Spaltung, Oxydation, Substitution u. s. w. sind an ihnen versucht worden, und die Producte dieser Verfahrungsweisen, zusammengenommen mit denen, welche aus der trockenen Destillation und der freiwilligen Zersetzung durch die Gährung hervorgingen, waren fast durchwegs Verbindungen gewöhnlicher Art, über deren Natur und Stellung im System schon lange keinerlei Zweifel mehr obwalten: niedere Fettsäuren, Amide, Aminsäuren, sauerstofffreie Basen u. dgl.

Jedermann kennt den Antheil, den in erster Reihe v. Liebig und seine Schüler weiterhin an diesen Untersuchungen hatten, Jedermann weiss, in welch genialer Weise er die Resultate derselben zu Schlüssen auf das Pflanzen- und Thierleben verwerthete, wie er damit den Grund zu einer chemischen Physiologie legte, an der seither emsig weiter gebaut wurde.

Die ganze neuere Lehre von der Ernährung und Assimilation, von dem Stoffwechsel überhaupt, ruht auf unsern Kenntnissen von den Proteïnstoffen, Kohlehydraten, und jenen ihrer Abkömmlinge, die wir aus ihnen entstehen sehen, oder deren Entstehung wir auch ohne experimentellen Beweis aus ihnen annehmen zu dürfen glauben.

Und wenn diese Kenntnisse noch bedeutende Lücken zeigen, wenn gerade in der so wichtigen Frage, welches das Material für die Athmung und Wärmeerzeugung, welches für

den Ersatz des Abgenützten und Umgesetzten im Organismus dient, die Ansichten noch nicht ganz geeinigt sind, so liegt das gewiss grossentheils an der, doch noch sehr unvollkommenen Kenntniss von der innern Natur dieser Verbindungen, die in ihrem ganzen Wesen so ausserordentliche Verschiedenheiten von den übrigen zahllosen chemischen Verbindungen zeigen, dass sie trotz der vielen Zersetzungsproducte, in die wir sie zerfällen können, noch immer die grössten Räthsel geblieben sind, die uns zu lösen vorliegen.

Nicht nur sind sie das bezüglich ihrer Verwendung in den Organismen, sondern auch bezüglich ihrer Entstehung in diesen, und während wir nachgerade in den synthetischen Arbeiten der neuesten Zeit eine Menge der sichersten Anhaltspunkte haben, uns über den Aufbau und die Bildung der Pflanzensäuren, der Fette, der sogenannten ätherischen Öle, ja selbst der Zuckerarten ein Urtheil zu bilden, sind wir über die Entstehung dieser stickstoffhaltigen Körper noch fast völlig rathlos. Nicht einmal wissen wir gewiss, ob sie primär entstehen können, oder ob ihrer Bildung die anderer Verbindungen vorausgehen muss, und welcher.

Und doch gewähren, so scheint es, die, bei gewissen Einwirkungen constant auftretenden Zersetzungsproducte ziemlich bestimmte Andeutungen über die Natur der, an der Bildung der Proteïnstoffe betheiligten Verbindungen, Andeutungen, die es wahrscheinlich machen, dass sie auf die vorausgehende, oder mindestens gleichzeitige Entstehung einiger anderer angewiesen sind.

Und diese anderen sind offenbar nur die Kohlehydrate.

Beide Körpergruppen, Kohlehydrate und Proteïnstoffe, umschliessen eine Anzahl untereinander isomerer und polymerer Substanzen.

Einige derselben sind löslich und nicht organisirt, einige derselben sind unlöslich und organisirt.

Den löslichen (Dextrin, Eiweiss . . . .) wohnt eine, wie man in Ermanglung eines besseren Ausdruckes sagen kann, virtuelle Plasticität, oder Organisationsfähigkeit inne, die in dem Spiel vitaler Processe zur Erscheinung kommt.

Die organisirten, unlöslichen (Cellulose, thierisches Zellgewebe, Hornsubstanz . . .), entstehen, wie man annehmen

muss, aus den löslichen, nicht organisirten. Dabei scheint sich das Molekül dieser Körper zu verdichten.

Die intermediäre Modification dieser Zustände scheint das Protoplasma, die werdende, rudimentäre Zelle zu sein.

Alles weist darauf hin, dass ein bestimmtes Abhängigkeitsverhältniss dieser beiden Körpergruppen besteht, dass die Proteïnstoffe nicht verstanden werden können, wenn man nicht die Verhältnisse der Kohlehydrate mit in Rechnung bringt.

Unter der Annahme aber, die Kohlehydrate seien das Primäre und die Proteïnstoffe Derivate dieser, bieten sich eine Reihe nicht zu verkennender Parallelen.

Es sei erlaubt, in diesem Sinne einiges Bekannte übersichtlich zusammenzustellen.

Schon die äussere Beschaffenheit beider Arten von Verbindungen bietet Analogien. Sie ist am ähnlichsten zwischen den, Schleime bildenden Kohlehydraten und den thierischen Schleimen.

Eingetrocknetes Eiweiss, löslich gemachtes und dann getrocknetes Fibrin und Caseïn gleicht dem Gummi und Dextrin. Kohlehydrate organisiren sich zu einzelnen, unzusammenhängenden Gebilden in den Stärkearten, die Proteïnstoffe in den verschiedenen Arten von Blutzellen.

Dem Protoplasma der Pflanzen entspricht die Granulose der Thiere, der pflanzlichen Cellulose das thierische Zellgewebe, der in Schalen und Kernen verdichteten Cellulose die Hornsubstanz, den krystallisirten Proteïnstoffen der Pflanzen[1] das Hämatokrystallin der Thiere.

Die Erscheinung des Quellens ohne Lösung mancher Proteïnstoffe (Fibrin, Casein . . .) scheint im Zusammenhange mit derselben Erscheinung einiger Varietäten der Gummiarten (Bassorin, Traganth . . .) zu stehen.

Die Löslichkeit mancher Gummiarten ist bedingt durch kleine Mengen alkalischer Basen; sie werden aus ihren Lösungen flockig gefällt durch Zusatz von Säuren.

Auch das Eiweiss verdankt, wenn es löslich ist, diese Lösung vornehmlich kleinen Mengen alkalischer Verbindungen.

---

[1] In *Lathraea squammaria* (Radlkofer), in Kartoffeln (Cohn).

Lösliches Serumalbumin lässt sich frei von Alkalien oder Salzen gar nicht erhalten. Nimmt man durch Säuren oder Reagentien diese weg, so coagulirt es, wie im gleichen Falle eine Arabinlösung etwa.

Unlösliche Kohlehydrate, Stärke z. B., gehen, ohne ihre percentische Zusammensetzung zu ändern, durch anhaltendes Kochen mit Wasser, Chlorzink, Eisessig u. s. w. in lösliche Modificationen über. In derselben Weise können unlösliche Proteïnstoffe, wie Fibrin, löslich gemacht werden.

Auch der umgekehrte Fall ist bekannt. Man kann das sonst lösliche Dextrin in einer unlöslichen Modification erhalten[1] und es dann dem unlöslichen Fibrin vergleichen, welches aus löslichem Albumin hervorgegangen ist.

Die Fähigkeit, durch Gährung zersetzt zu werden, zeichnet vor allen übrigen organischen Verbindungen gewisse Kohlehydrate und die Proteïnstoffe aus.

Die hauptsächlichsten Gährungsproducte beider Körpergruppen stehen in einer unverkennbaren, sehr einfachen Beziehung zu einander.

Man hat unter ihnen vornehmlich gefunden:

Aus Kohlehydraten.	Aus Proteïnstoffen.	
Kohlensäure-, Wasserstoff	Kohlensäure, Wasserstoff, Schwefelwasserstoff, Ammoniak	Tyrosin.
Äthylalkohol	Aethylammin	
Propylalkohol	Trimethylammin	
Butylalkohol	—	
Amylalkohol	Amylammin	
—	Caproylammin?[2]	
Glycerin	—	
Essigsäure	Essigsäure	
Propionsäure	Propionsäure	
Buttersäure	Buttersäure	
Valeriansäure	Valeriansäure	
Milchsäure	Milchsäure	
Bernsteinsäure	—	
—	Leucin	

[1] Musculus, Zeitschr. für Chemie 1869. 446, und 1870. 346.

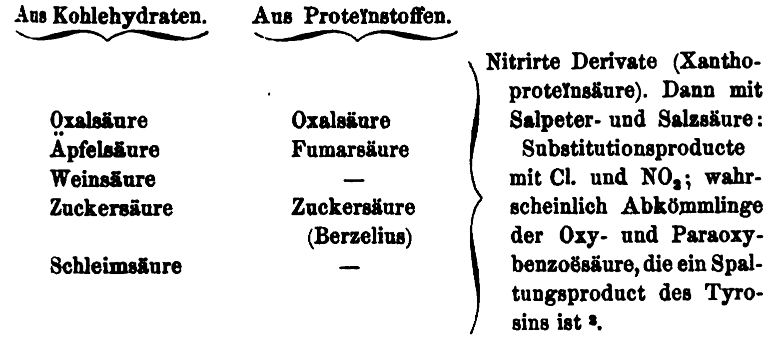
[2] Diese Basen fanden Al. Müller und Hesse in gefaulter Hefe, Sullivan in gefaultem Mehl. Jahresbericht 1857. 402, und 1858. 230.

Man hat also hier entweder identische Producte, Glieder aus der Reihe der Fettsäuren, oder es sind, wie bei den Kohlehydraten Alkohole, bei den Proteïnstoffen die diesen entsprechenden Amide. Vielleicht wird man bei näherer Untersuchung auch die, der Essigsäure correspondirende Oxysäure (Glycolsäure) auffinden, da die Oxysäure der Propionsäure (Milchsäure) in beiden Fällen vorkommt [1].

Nur für das Tyrosin der Proteïnstoffe, eine der aromatischen Reihe angehörige Verbindung, lässt sich keine correspondirende stickstofffreie Verbindung unter den Gährungsproducten der Kohlehydrate finden.

Auch bei den übrigen Zersetzungsweisen der Proteïnstoffe treten immer gewisse Producte auf, die der aromatischen Reihe, und andere, die auch den Kohlehydraten eigen sind.

Die Behandlung mit Salpetersäure hat geliefert:



Aus Kohlehydraten.	Aus Proteïnstoffen.	
Oxalsäure	Oxalsäure	Nitrirte Derivate (Xanthoproteïnsäure). Dann mit Salpeter- und Salzsäure: Substitutionsproducte mit Cl. und NO_2; wahrscheinlich Abkömmlinge der Oxy- und Paraoxybenzoësäure, die ein Spaltungsproduct des Tyrosins ist [2].
Äpfelsäure	Fumarsäure	
Weinsäure	—	
Zuckersäure	Zuckersäure (Berzelius)	
Schleimsäure	—	

Die Oxydation mit Braunstein und Schwefelsäure gab:

Aus Kohlehydraten.	Aus Proteïnstoffen.	
Ameisensäure	Ameisensäure	Benzoësäure [3]
Essigsäure	Essigsäure (und deren Homologe bis zur Capylsäure)	
—		
—		

[1] Im Traubensaft ist das Vorkommen der Glycolsäure durch Erlenmeyer schon constatirt.

[2] Vergl. Mühlhäuser. Annal. d. Ch. CI. 171.

[3] Fröhde's, aus Leim erhaltene „Collinsäure“ ist unreine Benzoësäure.

Aus Kohlheydraten.	Aus Proteïnstoffen.	
Aldehyd	Aldehyde dieser Säuren	Benzaldehyd.
Akroleïn	Acelonitril	
	Propionitril	
	Valeronitril	

Nach der Behandlung mit Schwefelsäure wurde erhalten:

Aus Kohlehydraten	Aus Proteïnstoffen.	
—	Ammoniak	Tyrosin.
Ameisensäure	Asparaginsäure	
—	Glutamminsäure (dieser homolog) (Daraus die, der Äpfelsäure homologe Glutansäure.)	
Glucinsäure $C_{12}H_9O_9$ (?)		
Gepaarte Säuren (Sulfosäuren)	Gepaarte Säuren (Protëinschwefelsäure.) (Daraus durch Salpetersäure die Hexanitroalbuminsulfonsäure: $C_{72}\left\{\begin{matrix}H_{101}\\(NO_2)6\\SO_2OH\end{matrix}\right\}N_{18}SO_{22}$ (Loew)[1]	
	Leucin[2]	

Mit Kalihydrat geschmolzen gaben:

Kohlehydrate.	Proteïnstoffe.	
Oxalsäure	Oxalsäure	Tyrosin.
Essigsäure	Essigsäure	
Propionsäure	—	
—	Buttersäure	
—	Valeriansäure	
Ketone	—	
Bernsteinsäure	—	
—	Leucin	
—	Sauerstofffreie Amminbasen	
—	—	
—		
Humussubstanz	Humussubstanz (mit Kalihydrat gekocht auch Glycocoll)	

---

[1] J. pr. Chem. 1871. 180.

[2] Über die Producte der Einwirkung der Weinschwefelsäure auf Proteïnsubstanzen stehen nach einer vorläufigen Mittheilung noch neue Resultate von W. Knop in Aussicht. (Berl. Berichte. 1870, 969.)

Jod und doppeltkohlensaures Kali gibt:

Mit Kohlehydraten.	Mit Proteïnstoffen.
Jodoform.	Jodoform.

Die trockene Destillation liefert:

Aus Kohlehydraten.	Aus Proteïnstoffen.
Kohlensäure, gasförmige Kohlenwasserstoffe	Kohlensäure, gasförmige Kohlenwasserstoffe, Ammoniak
Methylalkohol	—
Essigsäure	Essigsäure
Ketone	Ketone
—	Methylamin und Homologe
—	Phenol und Homologe
Phenol	—
Guajakol	—
Brenzkatechin	—
—	Kohlenwasserstoffe der arom. Reihe
Kohlenwasserstoffe der arom. Reihe, Naphtalin, Chrysen etc.	—
Paraffin	—
	Anilin und Homologe, Pyrrol, Picolin, Pyridin, Lutidin, Collidin.

Die vorstehende Zusammenstellung zeigt, wie scharf begrenzt die, aus den Kohlehydraten und den Proteïnstoffen gewinnbaren Zersetzungsproducte sind, was sie Gemeinsames und was sie Verschiedenes haben, und wie die eine Serie der von den Proteïnstoffen abstammenden Producte immer wo nicht identisch, so doch aufs nächste verwandt mit der der Kohlehydrate ist.

Rechnet man dazu, dass thierische Stoffe, wie das Mucin und das Hyalin, mit verdünnten Säuren gekocht, neben Proteïnstoffen Traubenzucker liefern, dass das Chitin und das Cerebrin als Glucoside betrachtet werden können, erwägt man, dass die Proteïnstoffe in Pflanzen und Thieren fast immer mit Kohlehydraten zusammen vorkommen, berücksichtigt man endlich, dass, wie die Physiologie in der letzten Zeit aus den Ernährungs- und Fütterungsversuchen schliesst, die Proteïnstoffe ebensowohl zur Fettbildung dienen, als sie zum Ersatz des abgenützten Muskels und der Gewebe verwendet werden, so wird es mehr als wahrschein-

lich, dass die Proteïnstoffe und Kohlehydrate in einer genetischen Beziehung zu einander stehen.

Dieser Gedanke ist hier nicht zum erstenmale ausgesprochen. Hunt hat vor geraumer Zeit schon (1847) sogar versucht, ihn bestimmt zu formuliren, und das Fibrin als das Nitril der Cellulose, Albumin und Caseïn als Nitrile des Dextrins und Gummi's, den Leim als das Nitril des Krümelzuckers betrachtet [1]. Und 1860 hatte Schoonbrodt Versuche angekündigt, die es möglich erscheinen lassen sollten, Zucker zu eiweissartiger Substanz umzuwandeln. Es hat indessen weder Hunt seine Ansicht experimentell begründet, noch ist Schoonbrodt's versprochene Arbeit bisher erschienen [2].

Ohne thatsächliche Beweise aber konnten natürlich Ansichten dieser Art nicht zu Überzeugungen werden, und was in dieser Richtung etwa verwerthbar wäre, beschränkt sich auf einige Versuche Schützenberger's über die Einwirkung des Ammoniaks auf Kohlehydrate bei höherem Druck in der Hitze, wodurch er amorphe Substanzen erhielt, die einen Stickstoffgehalt von 2—4 Proc. auswiesen und beim Erhitzen den Geruch nach verbranntem Horn verbreiteten.

Es schien uns darum, dass man vorerst noch einmal an Versuche gehen und eine passende Methode anwenden müsste, um bestimmter noch als bisher die Abkömmlinge oder Zersetzungsproducte der Kohlehydrate unter den Zersetzungsproducten der Proteïnkörper aufzufinden, so dass man das, oder die Kohlehydrate genauer bezeichnen könnte, welche bei der angenommenen Bildung der Proteïnstoffe betheiligt sind.

Die Methode sollte womöglich die nächsten, und nicht nur die entfernteren Spaltungsproducte zu erhalten erlauben, und jedenfalls sollte durch sie die Zersetzung glatt und vollständig

---

[1] $$\underbrace{C_{12}H_{20}O_{10}}_{\text{Cellulose}} + 3\,NH_3 - 6\,H_2O = \underbrace{C_{12}H_{17}N_3O_4}_{\text{Fibrin}}$$

$$\underbrace{2\,C_6H_{12}O_6}_{\text{Krümelzucker}} + 4\,NH_3 - 8\,H_2O = \underbrace{C_{12}H_{20}N_4O_4}_{\text{Leim}}, \text{ oder allgemein:}$$

$$n.\ \underbrace{C_6H_{12}O_6} + 2\,n\,NH_3 - 4\,n\,H_2O = n.\ \underbrace{C_6H_{10}N_2O_2}_{\text{Leim}}$$

[2] Vergl. auch Schlossberger Lehrbuch, Capitel „Proteïnkörper".

zu Ende zu führen sein, in dem Sinne, dass nicht Reste übrig bleiben, deren Untersuchung (wie es bei den meisten bisher eingeschlagenen Verfahrungsweisen geschah) als nicht weiter entwirrbar aufgegeben werden müssten.

Das von uns kürzlich benützte Verfahren, zuckerartige Kohlehydrate in Säuren überzuführen, die für sie charakteristisch sind [1], liess uns hoffen, dass wir durch dasselbe dieses Ziel erreichen könnten, und wir hatten am Schlusse der betreffenden Mittheilung schon die Absicht ausgesprochen, es auch auf die Proteïnstoffe auszudehnen.

Wir sind nun heute nach einer ziemlich mühsamen Arbeit in der Lage, über unsere erste Versuchsreihe zu berichten, mittelst welcher wir uns dem gestellten Ziel wenigstens genähert haben, wenn es auch noch nicht erreicht ist. Die Zersetzung war eine vollständige restlose, aber die Producte noch nicht jene nächsten, die wir erwarteten, sondern entferntere, grösstentheils schon bekannte. Sie bestätigen zunächst andere, schon früher erhaltene Resultate, sind uns jedoch noch dadurch von einigem Werth gewesen, weil sie uns Fingerzeige zu weitern Versuchen gegeben haben, die wir in einer spätern Abhandlung beschreiben werden.

Wir haben vorerst das thierische Eiweiss, das Caseïn und das Fibrin, dann das Pflanzeneiweiss und das Legumin in den Kreis unserer Untersuchung einbezogen, und von jedem dieser Stoffe grössere Mengen in der, gleich näher zu beschreibenden Weise behandelt. Die Versuche wurden mehrmals wiederholt und erst dann für verlässlich erachtet, wenn immer das gleiche Resultat erhalten wurde.

Die Materialien wurden in gereinigtem Zustande angewendet, und besonders sorgfältig alles Fett entfernt. Das Eiweiss war Hühnereiweiss. Das Caseïn war nach der Vorschrift von Rochleder bereitet.

Von Fibrin verwendeten wir eine Quantität, die jahrelang schon in Weingeist aufbewahrt war, und ausserdem mit dem gleichen Erfolg frisch dargestelltes.

---

[1] Diese Sitzungsberichte Bd. LXII II. Abth., Juni-Heft.

Das Pflanzeneiweiss gewannen wir nach der Methode von Rüling aus Kartoffeln, das Legumin nach der von Ritthausen aus Erbsen.

Über das Pflanzenfibrin (Kleber), welches wir noch nicht absolut stärkefrei darzustellen vermochten, und das Gliadin, welches ein etwas abweichendes Verhalten zeigt, werden wir eine nachträgliche Mittheilung machen.

Das Gemeinsame bei allen Versuchen war, dass die betreffenden Stoffe zunächst mit Brom und Wasser verflüssigt und zersetzt wurden. Zu dem Ende wurden Quantitäten, welche je etwa 50 Gramm Trockensubstanz entsprachen, mit einem halben Liter Wasser und 50 Gramm Brom in Champagnerflaschen gebracht, und diese mit einem Pfropf von vulkanisirtem Kautschuk verschlossen, der besonders hergerichtet war [1].

Durch die Bohrung desselben ging ein Glasröhrchen, welches an dem einen Ende in eine lange zugeschmolzene Spitze ausgezogen, an dem andern, offenen, mit einem ausgeweiteten Rande versehen war, damit es durch den Druck der Dämpfe nicht aus der Bohrung herausgetrieben werden konnte. Um den Pfropf fest mit Drath an dem Flaschenhals befestigen zu können, war er oben mit einer kleinen durchbohrten Metallscheibe oder Kupfermünze belegt.



Die Zeichnung versinnlicht diese einfache, für ähnliche Operationen sehr praktische Vorrichtung.

So vorbereitet kamen die Flaschen in ein gemeinsames Wasserbad mit constantem Niveau, worin sie Tag und Nacht verweilen konnten.

Wenn die ersten eingebrachten Brommengen verschwunden waren, wurden die ausgekühlten Flaschen durch Erweichen der Spitze vor der Lampe von den Dämpfen befreit, dann

---

[1] Der Kautschuk wird bei den ersten Operationen kaum verändert. Bei den späteren erweicht er nur an der untern Fläche, ohne, Spuren von Schwefel abgerechnet, etwas Lösliches abzugeben. Die Pfropfen wurden übrigens bei jeder neuen Beschickung gewechselt.

-nene Brommengen zugesetzt, die Spitze wieder zugeschmolzen und weiter erhitzt.

In dieser Weise wurde die Behandlung mit Brom fortgesetzt, bis sich ein kleiner Überschuss davon in dem über der Flüssigkeit stehenden Dampf verrieth.

Der Druck desselben in den Flaschen ist nach den ersten zugebrachten Brommengen unbedeutend; etwas grösser wird er erst, wenn man die weitern zugebracht und wieder erhitzt hat.

Man findet darin vornehmlich Kohlensäure.

Bei allen Proteïnstoffen blieb nach dieser Behandlung ein Rückstand, der, einmal gebildet, weiterer Bromeinwirkung nicht mehr wich (*A*).

Allein er war der Menge nach verschieden gross, niemals eigentlich bedeutend, und bei einigen Proteïnstoffen sehr gering. Er hatte ein braunes zähes Äussere, und es konnten, wenn er überhaupt grösser war, in ihm oft schon mit freiem Auge Krystalle bemerkt werden.

In jedem Falle wurde nun der ganze Flascheninhalt in einen Destillirkolben gebracht, und das Flüchtige sammt den kleinen Mengen überschüssigen Broms abdestillirt.

Das Destillat enthielt nun in allen Fällen neben saurem Wasser eine specifisch schwerere, mehr oder minder beträchtliche Schichte einer Flüssigkeit, braun gefärbt durch freies Brom (*B*).

Gleichzeitig verflüchtigten sich manchmal Spuren einer bromhaltigen Substanz, die im Kühlrohr zu feinen Nadeln erstarrte (*b*).

Die Flüssigkeit im Destillirkolben wurde nun filtrirt, und der erwähnte unlösliche Rückstand zu späterer Untersuchung bei Seite gelegt. Das Filtrat wurde hierauf mit Äther wiederholt ausgeschüttelt. Der Äther färbte sich hiebei immer mehr oder weniger bräunlichgelb, und hinterliess beim Abdestilliren einen braunen öligen Rückstand (*C*) von heftigem, zu Thränen reizenden Geruch, der oft nach wenig Stunden schon Krystalle ansetzte, deren Menge wechselnd war, die indess niemals ganz fehlten.

Die von dem in Äther Löslichen befreite Flüssigkeit (*D*) wurde, nachdem der in ihr noch enthaltene Äther abgetrieben war, in einer geräumigen Porcellanschale auf etwa 70—80° C.

erhitzt und dann ein Schlamm von gut ausgewaschenem Silberoxyd eingetragen.

Man erleichtert sich die spätere Filtration, wenn man die ersten Partien des Bromsilbers, welches sich bildet, durch ein Tuch von der Flüssigkeit trennt, und dann erst mit dem Silberzusatz so lange fortfährt, bis die Flüssigkeit vollkommen neutral geworden ist.

Wenn der Neutralitätspunkt heranrückt, wird die Flüssigkeit milchig, während sie sich bis dahin sofort klar von dem Schlamm trennte, und bald gibt sich dann auch das überschüssige Oxyd durch die dunklere Farbe des Schlammes kund. Gleichzeitig empfindet man einen schwachen Ammoniakgeruch. (Der grössere, zuerst abgeseihte Theil ist reines Bromsilber, dem letztern kleineren mischt sich auch phosphorsaures Silberoxyd bei.)

In Folge der Entbromung erhitzt sich die Flüssigkeit noch etwas mehr; indessen wurde vermieden, dass sie jemals ins Kochen kam.

War die Reaction neutral, so wurde schnell Alles auf bereit gehaltene, grosse, gut durchlassende Filter gebracht. Das heisse Filtrat beginnt in der Regel bald von etwas reducirtem Silber trübe zu werden.

Ohne es auskühlen zu lassen, wurde es sofort mit einem raschen Strome Schwefelwasserstoff zerlegt, während indessen die Filterrückstände mit siedendem Wasser nachgewaschen wurden. Auch die Waschwässer wurden dann mit Schwefelwasserstoff behandelt, und nach der Entfernung des Schwefelsilbers die Filtrate auf dem Wasserbade concentrirt. In den, so erhaltenen, schwach gelb gefärbten Flüssigkeiten entstand durch neutrales essigsaures Bleioxyd in allen Fällen ein nicht sehr bedeutender Niederschlag von bräunlich gelber Farbe (*E*), der sich rasch absetzte.

Ebenso brachte basisch essigsaures Bleioxyd in dem von ihm ablaufenden Filtrat einen lichteren, viel copiöseren Niederschlag hervor (*F*), der in siedendem Wasser unlöslich war, in überschüssigem Fällungsmittel dagegen sich ein wenig löste, weshalb ein Überschuss dieses letzteren durch öfteres Abfiltriren kleiner Proben zu vermeiden gesucht wurde.

Die von diesem Niederschlag ablaufende Flüssigkeit (*G*) wurde mittelst Schwefelwasserstoff entbleit, und dann im Wasserbade eingedampft.

Meistens erschienen nun, wenn die Flüssigkeit die Consistenz eines dünnen Syrups hatte, auf derselben brüchige, milchweisse Häute, während sich in ihr krümliche Ausscheidungen bildeten, die sich oft so vermehrten, dass das Ganze ein Brei wurde, von dem die Laugen durch Leinwand abgepresst werden mussten. In einigen Fällen, in welchen es an einem gewissen Bromüberschuss gefehlt zu haben schien, entstanden diese Ausscheidungen spärlich, erst nach sehr langer Zeit, oder fehlten wohl auch ganz.

Allein alle die bisher beschriebenen Escheinungen traten ein, wenn man solche, nicht zum Krystallisiren zu bringende dickliche Massen wieder angemessen verdünnt mit Brom in die Digerirflaschen zurückbrachte, und hierauf allen den schon beschriebenen Operationen ein zweitesmal unterwarf.

Die, von dem weichen, krümlichen, unter dem Mikroskop undeutlich krystallinischen Ausscheidungen (*H*) abgepresste dicke Lauge liess sich durch starken Alkohol in einen löslichen und einen unlöslichen Theil trennen.

Sie wurde in eine Reibschale gebracht, und mit oft erneuerten Mengen von absolutem Alkohol so lange durchgeknetet, bis sie so spröde und brüchig geworden war, dass sie sich zu einem Schlamm zerreiben liess, von dem der Alkohol abfiltrirt wurde [1]. Die alkoholischen Lösungen wurden destillirt.

Es hinterblieb ein nicht sehr grosser Rückstand, welcher bald feine, weiche, nadelförmige Krystalle (*I*) ansetzte.

Was der Alkohol nicht gelöst hatte (*K*), war nun in keiner Weise mehr in eine passende Verbindung, oder sonst brauchbare Form zu bringen. Endlich zeigte sich, dass diese Rückstände, deren Menge wechselnd war, nichts anderes sein konnten, als nur etwas veränderte, löslich gewordene, halb umgesetzte Proteïnsubstanzen, aus denen in der That mit Ausnahme des festen Rückstandes *A* alle die schon beschriebenen Producte wieder

---

[1] Von dem Alkohol wurde auch die Essigsäure aufgenommen, welche die Laugen von den zum Fällen verwendeten essigsauren Bleioxyden her noch enthielt.

erhalten werden konnten, wenn man sie einer neuen Bromirung und der darauf folgenden bisher beschriebenen Behandlung unterwarf, so dass sich schliesslich jeder der angewendeten Proteïnstoffe total zersetzen liess.

Wir stellen die nächsten Rohproducte noch einmal zusammen:

A. Unlöslicher Rückstand von der Bromirung.

B. Destillationsproduct, (*b*) Sublimationsproduct.

C. Mit Äther aus der gebromten Flüssigkeit ausziehbarer Theil.

D. Die davon befreite Flüssigkeit.

E. In *D* mit neutralem essigsaurem Bleioxyd entstehender Niederschlag.

F. In *D* durch basisch essigsaures Bleioxyd entstehender Niederschlag.

G. Von den Bleiniederschlägen getrennte entbleite Flüssigkeit, welche enthält:

H. Die beim Eindampfen sich krümlich ausscheidende Substanz.

I. Die im Alkohol lösliche krystallisirende Substanz.

K. Noch nicht völlig umgesetzte lösliche Proteïnsubstanz.

Die nähere Untersuchung dieser Partien hat nun folgendes ergeben:

A. Unlöslicher Rückstand von der Bromirung.

Er ist braun, manchmal flockig, meistens pflasterartig zähe. Im ersteren Falle enthält er sehr wenig Krystalle beigemischt, ist der Menge nach überhaupt gering, zeigt die Eigenschaften humöser Substanz, und löst sich nur zum Theil in Alkohol.

Der Rückstand von der Behandlung mit Alkohol löst sich leicht mit brauner Farbe in alkalischen Flüssigkeiten, und wird dann durch Säuren wieder gefällt.

Dadurch etwas reiner geworden, erweist er sich fast frei von Stickstoff, verbrennt aber mit etwas grün gesäumter Flamme, und ist darum nicht ganz bromfrei.

War der Rückstand pflasterartig zähe, so geht, wenn man ihn mit warmem Alkohol behandelt, ein grosser Theil in Lösung,

und kleine, glänzende, gelbliche Krystalle, durchsetzt mit pulveriger humöser Substanz bleiben zurück.

Durch Schlämmen mit kaltem Alkohol kann man diese letztere grossentheils entfernen, und die Krystalle, die selbst in heissem Alkohol nur sehr wenig löslich sind, lassen sich durch Sublimiren reinigen.

Sie erscheinen hienach als goldgelbe Blättchen von grossem Glanz. Schliesslich noch einmal auf einem Filter mit kaltem Alkohol gewaschen, zeigten sie alle Eigenschaften, die man vom Bromanil kennt. Es genügte die Bestimmung ihres Bromgehalts, um die Identität festzustellen.

$C_6Br_4O_2$	Gefunden
Br — 75·2	75·1.

Das, was der Alkohol aus dem braunen Rückstand gelöst hatte, blieb beim Verdunsten desselben als eine harzartige Masse zurück, die in Alkalien löslich war. In einem Kolben, an dem ein Rückflusskühler befestigt war, mit schwach alkalischem Wasser gekocht, verflüchtigte sich allmälig mit den Wasserdämpfen eine kleine Menge einer Substanz, die im Halse des Kolbens, und in der Kühlröhre sich zu farblosen feinen Nadeln verdichtete. Dabei entwich Ammoniak.

Von den Krystallen wurde in mehreren Operationen so viel gesammelt, dass sie gereinigt und analysirt werden konnten. Sie erwiesen sich brom- und stickstoffhaltig, lösten sich in heissem Weingeist, und fielen bald nach dem Auskühlen als eine Masse feiner verfitzter, seidenartiger Nadeln wieder heraus.

Ihre geringe Menge reichte eben nur hin, die folgenden Zahlen zu ermitteln, welche der Formel der Tribromamidobenzoësäure entsprechen [1].

	$C_7H_2Br_3(NH_2)O_2$	Gefunden
C	22·5	22·4
H	1·1	1·4
Br	64·2	64·8.

[1] Vergl. Geitner und Beilstein, Zeitschrift für Chemie 1865. 506.

Der Rückstand im Kolben liess nach dem Auskühlen auf Zusatz von verdünnter Schwefelsäure eine kleine Menge einer pechartigen Masse fallen.

Die angesäuerte Flüssigkeit durch ein nasses Filter klar filtrirt, gab an Äther eine ranzig riechende, in Wasser schwer lösliche, gelbliche, dickliche Säure ab, die noch etwas bromhaltig war.

Von dieser Säure können wir nur mit Wahrscheinlichkeit aussagen, dass sie Capronsäure gewesen sei.

Ihre Quantität war nicht genügend gross, um sie chemisch rein herzustellen. Sie nimmt ihre Entstehung, wie wir glauben, von einer theilweisen Zersetzung des Leucins, von dessen Vorkommen weiter unten die Rede sein soll.

B. Das Destillationsproduct.

Es ist eine schwere, ölige, zunächst immer noch bromhaltige Flüssigkeit, der das überschüssige Brom durch Waschen mit verdünnter Kalilauge entzogen wurde.

Dadurch wurde sie farblos, besass nach dem Trocknen mit Chlorcalcium und dem Rectificiren einen süsslich ätherartigen Geruch, und den Siedpunkt 145°.

Die Analyse bestätigte, dass sie Bromoform war [1].

	$CHBr_3$	Gefunden
Br	— 94·8	94·3.

b) Das Sublimationsproduct.

Wie schon erwähnt, trat dieses nur spurenweise auf oder fehlte wohl auch ganz. Eine, mit einer sehr kleinen Menge ausgeführte Brombestimmung ergab, dass die Verbindung, deren Äusseres dem der Brombenzoësäuren glich, über 60 Perc. Brom enthielt.

---

[1] Es wurde mehrfach bemerkt, dass das rohe, noch bromhaltige Bromoform bei längerer Berührung mit der Lauge sich gänzlich in Krystalle von Tetrabrom-Kohlenstoff verwandelte.

Wir kommen auf diese interessante Erscheinung zurück.

C. Der mit Aether aus der gebromten Flüssigkeit ausziehbare Theil.

Er besteht, wie erwähnt, aus einer gelblichen oder bräunlichen, heftig riechenden öligen Flüssigkeit, die stets mehr oder weniger mit Krystallen durchsetzt ist.

a) Die Krystalle. Sie waren oft so reichlich erschienen, dass sie leicht und ohne grossen Verlust durch Waschen mit kaltem Äther von dem flüssigen Theil befreit werden konnten. Sie liessen sich aus Wasser gut umkrystallisiren, und besassen die bekannten Eigenschaften der Oxalsäure.

b) Der von den Krystallen getrennte ölige Theil wurde in ganz verdünntem Ammoniak aufgenommen, etwas braune, schmierige Masse durch Filtration entfernt, und hierauf die noch vorhandene Oxalsäure durch Chlorcalcium ausgefällt. Dann das Filtrat vom oxalsauren Kalk mit Schwefelsäure angesäuert, und wieder mit Äther ausgezogen.

Nach dem Verjagen des Äthers hinterblieb die Substanz wieder als schwach gefärbtes, dickliches Öl, welches besonders beim Erwärmen einen heftigen, zu Thränen reizenden Geruch entwickelte, mit Alkohol und Wasser mischbar war, und eine stark saure Reaction besass.

Beim Erhitzen zersetzte es sich theilweise unter Entwicklung von Bromwasserstoff. Es erstarrte im Vacuo krystallinisch. Die Eigenschaften der Substanz waren die der Bromessigsäure.

Bei zwei Bereitungen wurden auch in ihr Bromgehalte gefunden, wie sie der Formel dieser Säure entsprechen.

$C_2H_3BrO_2$	Gefunden im Mittel
Br 57·6	58·1.

Das aus der Säure dargestellte Barytsalz enthielt 32·8 Proc Baryum. Für $C_2H_2BrBaO_2$ berechnen sich 33·2 Proc.

Endlich wurde durch Behandlung der wässrigen Lösung der Säure mit Natriumamalgam Essigsäure erhalten, die in der Form eines Silbersalzes analysirt wurde.

$C_2H_3AgO_2$	Gefunden
Ag 64·7	64·6.

Bromreichere Säuren dieser Art, die wir bei anderen Versuchen erhielten, waren allen Eigenschaften nach offenbar Gemische von Mono- und Dibromessigsäure. Sie zeigten oft vorwaltend die Eigenschaften der letzteren, wie sie zuletzt von Schäffer [1] angegeben wurden. Die Reduction mit Natriumamalgam lieferte immer nur Essigsäure.

D — E. Der mit neutralem essigs. Bleioxyd in der Flüssigkeit *D* entstandene Niederschlag *E*

enthielt neben kleinen Mengen färbender organischer Substanz vornehmlich den Rest der Oxalsäure, den der Äther übrig gelassen hatte und ausserdem etwas Phosphorsäure.

F. Durch basisch essigs. Bleioxyd in der von *E* abfiltrirten Flüssigkeit erzeugte Fällung.

Unter Vermeidung eines Überschusses des Fällungmittels erzeugt, wurde der Niederschlag, statt ihn, da er in Wasser nicht ganz unlöslich ist, lange zu waschen, auf einem Tuch gesammelt und vorsichtig in einer Schraubenpresse trocken gepresst.

Dann mit Wasser wieder zu einem Schlamm zerrieben, dieser mit heissem Wasser verdünnt und mit Schwefelwasserstoff zersetzt. Das Filtrat vom Schwefelblei unter der Luftpumpe bis zur Honigdicke verdunstet, erstarrte nun nach längerem Stehen zu einer eigenthümlich krümlich durchsichtigen, klebrigen Gallerte, die an den Rändern weisslich, hornartig eintrocknete, doch aber sehr hygroskopisch war.

Sie war von ausserordentlich saurem Geschmack und verbrannte auf dem Platinblech mit Hinterlassung eines kohligen Rückstandes von stark saurer Reaction.

Sie enthält, wie sich zeigte, den grössten Theil der Phosphorsäure, die aus dem Phosphor der Proteïnstoffe gebildet worden war, neben einer zweiten stickstoffhaltigen organischen Säure.

In Wasser wieder gelöst und mit Barytwasser bis zur schwach alkalischen Reaction versetzt, entstand schon in der Kälte ein

---

[1] Bericht d. ch. Gesellschaft zu Berlin. 1871. 366.

sehr reichlicher Niederschlag, der aus etwas schwefelsaurem und phosphorsaurem Baryt bestand. Beim Kochen wird die Ausscheidung des letzteren vollständig. Die von diesem Niederschlag getrennte Flüssigkeit neuerdings mit Bleiessig gefällt, gab nun ein Bleisalz, welches unter Wasser mit Schwefelwasserstoff zersetzt, eine fast farblose Flüssigkeit lieferte, die unter der Luftpumpe eingedampft wurde.

Als sie auf ein kleines Volum gebracht und dicklich geworden war, bildeten sich nach mehrtägigem Stehen wieder nur knollige, noch gallertartig durchscheinende, anfangs nur an den Rändern, später auch in der Mitte trüb und griesig werdende Massen, die offenbar noch keine reine Substanz darstellten.

Die Erfahrungen berücksichtigend, die Ritthausen in seiner sorgfältigen Untersuchung über die Zersetzungsproducte des Legumins und Conglutins beim Kochen mit Schwefelsäure [1] gemacht hatte, wobei er zuerst eine, der unsrigen ganz ähnliche Säure erhielt, die ihm anfangs mit der Succinaminsäure isomer zu sein schien und die er „Leguminsäure" nannte, bald darauf aber als eine unreine Asparaginsäure erkannte, verfuhren wir mit der Lösung dieser sauren Masse nach seinen Angaben und sättigten sie in der Hitze mit Kupferoxydhydrat.

Es wurde viel gelöst, und in der erhaltenen tiefblauen Flüssigkeit entstanden in der That nach kurzer Zeit sehr reichlich hübsche blaue verfilzte Nadeln, die von der Lauge getrennt, mit kaltem Wasser gewaschen und zwischen Papier gepresst, eine reine himmelblaue Farbe besassen und deren sonstige Eigenschaften völlig mit der Beschreibung des asparaginsauren Kupfers übereinstimmten.

Das Salz andauernd bei 150—152° getrocknet, gab auch die, der Formel $C_4H_5CuNO_4$ entsprechenden Procentgehalte.

	Berechnet	Gefunden
C	24·7	24·7
H	2·6	3·0
N	7·2	
Cu	32·6	32·4.

[1] Journ. pr. ch. CVII. 218.

Dass wir es mit einer Säure von der Formel der Asparaginsäure zu thun hatten, hatten wir schon früher durch ein Barytsalz ermittelt, welches wir aus der, noch nicht durch das Kupfersalz gereinigten Verbindung so dargestellt hatten, dass wir Barytwasser bis zum schwachen Überschuss zusetzten, dann mit Kohlensäure den Überschuss wegnahmen, filtrirten und das Salz, welches durch Abdampfen nicht krystallisiren wollte, mit Alkohol ausfällten.

Die rein weissen Flocken, welche so entstanden, lieferten getrocknet ein kreideweisses Pulver, welches (bei 130°) folgende, gut mit der Formel $C_4H_6BaNO_4$ stimmende Zahlen gab.

Berechnet	Gefunden
C — 23·9	23·8
H — 3·0	2·9
Ba — 34·2	34·5.

Da nun die Menge des Kupfersalzes, wenn auch ansehnlich, doch aber nicht so gross war, als sie der angewandten Säuremenge nach hätte sein sollen, das Barytsalz hingegen ziemlich die ganze verbrauchte Säurenmenge repräsentirte und Zahlen lieferte, die eine Beimischung einer total verschiedenen Säure nicht verriethen, so darf man vielleicht annehmen, dass man in der ursprünglichen Säure ein Gemisch von Asparaginsäure und der, allerdings noch wenig untersuchten isomeren Malaminsäure vor sich hatte. Sie war optisch activ, rechtsdrehend.

Alle von uns untersuchten Proteïnstoffe lieferten diese Säuren. Ritthausen hatte Asparaginsäure aus Legumin und Conglutin, Kreusler aus Caseïn, Eiweiss und Vitellin erhalten[1].

Glutamminsäure konnten wir bei dieser Art der Zersetzung der Proteïnstoffe nicht auffinden.

G — H. Die von dem Niederschlag F ablaufende Flüssigkeit G mit Schwefelwasserstoff entbleit und bis zur Consistenz eines dünnen Syrups concentrirt, lieferte eine, meistens reichliche krümliche, weissliche Krystallisation (*H*).

---

[1] Journ. pr. ch. CVII. 240.

In der Mehrzahl der Fälle entstanden schon während des Eindampfens durchschimmernde Häute, unter denen beim Erkalten sich die Hauptmenge der Verbindung breiig weich ausschied.

Die Concentration der Mutterlaugen gab noch weitere Quantitäten derselben. Sie wurde auf Leinwand gesammelt, trocken gepresst, in heissem Wasser gelöst und mit Kohle entfärbt.

Es genügt, anzuführen, dass diese Substanz, die sich auch in kochendem verdünntem Weingeist, wenn gleich ziemlich schwer löste und daraus in Schüppchen krystallisirte, Leucin war.

In der letztern Art öfters gereinigt, gab sie bei der Analyse:

$C_6H_{13}NO_2$	Gefunden
C — 54·9	54·4
H — 9·9	9·9
N — 10·7	11·0.

I—*K*. Die in den vom Roh-Leucin abgepressten Mutterlaugen enthaltenen Substanzen.

Die Menge der ziemlich dick gewordenen Laugen war immer um so kleiner, je weiter die Bromirung der Proteïnstoffe gegangen war. Starker Alkohol löste aus ihnen einen Theil auf (*I*) und verwandelte den Rest in eine zerreibliche Masse (*K*).

Die alkoholische Lösung wurde filtrirt und der Alkohol abdestillirt.

Aus den Destillationsrückständen schieden sich bald feine weiche Nadeln aus, die nicht viel Mutterlauge einschlossen.

Davon abgepresst, waren sie durch Krystallisation aus gewöhnlichem Weingeist leicht zu reinigen, erschienen dann ganz farblos, schmolzen leicht und sublimirten in charakteristisch wolliger Form.

Es passte auf sie vollständig die Beschreibung, die man vom Leucimid besitzt, über welches erst kürzlich Thudichum[1] neue Angaben gemacht hat, die wir ganz bestätigen können.

Die Analyse stimmte mit der Berechnung für die Formel $C_6H_{11}NO$.

---

[1] Chem. Centralblatt 1871. I.

$C_6H_{11}NO$	Gefunden
C — 63·7	63·3
H — 9·7	9·6.

Von der Natur der Rückstände nach der Alkoholbehandlung (*K*) war schon früher die Rede. Sie verhielten sich wie jene löslichen Modificationen der Proteïnstoffe, die man Peptone genannt hat. Bei wiederholter Bromirung derselben wurden sie zuletzt in der angegebenen Weise völlig zersetzt. Nur darin zeigte sich eine kleine Verschiedenheit, dass unter den Zersetzungsproducten das Bromanil und die Tribromamidobenzoësäure fast gänzlich fehlte.

Wir haben dem Gesagten nur hinzuzufügen, dass wir auch bei etwas abgeändertem Gange der Untersuchung keine neuen Resultate erhielten, und den hier mitgetheilten, nach welchem jeder der untersuchten Proteïnstoffe wenigstens zweimal vorgenommen wurde, zuletzt als den besten beibehalten haben.

Die analytischen Resultate sind nur der Kürze wegen nicht alle angeführt, da sie Verbindungen betreffen, die sonst schon bekannt sind.

Nur bei den besonders leicht erkennbaren haben wir uns beim Wiederauffinden an qualitativen Reactionen genügen lassen.

Es hatte sonach diese Zersetzung der Proteïnstoffe geliefert:

Bromessigsäure	Leucin
Bromoform	Leucimid
Kohlensäure	(Capronsäure)?
Asparaginsäure	Tribromamidobenzoësäure
Malaminsäure (?)	Bromanil.
Oxalsäure	

Auch war etwas Ammoniak und humöse Substanz gebildet worden. Niemals fanden wir Tyrosin.

Allein, da man durch Städeler[1] weiss, dass das Tyrosin durch Chlor völlig in Chloranil und Chloraceton[2] verwandelt wird, so ist kein Zweifel, dass das Brom in der nämlichen Weise

[1] Annal. d. Ch. CXVI. 57.

[2] Ob der zu Thränen reizende Geruch, den das Rohproduct besitzt, welches sich durch Äther aus den gebromten Proteïnstoffen ausziehen

wirkt und das erhaltene Bromanil, so wie auch die Tribromamidobenzoësäure aus derselben Quelle stammt, aus welcher sonst Tyrosin hervorgeht.

Wenn nun auch diese Zersetzungsweise der Proteïnstoffe qualitativ immer dieselben Hauptproducte liefert, so ist das jedoch nicht auch in quantitativer Beziehung der Fall.

Freilich können wir die gefundenen Mengen nur in Zahlen ausdrücken, die aus vielen Gründen nicht sehr genau sein können, die demungeachtet aber doch darauf hinzuweisen scheinen, dass diesen Stoffen nicht eine gemeinsame Stammverbindung nach Art des Mulder'schen Proteïns zu Grunde liegt.

Auch Ritthausen und Kreusler heben in ihrer letzten Abhandlung[1] hervor, wie verschieden die Mengen von Asparaginsäure und Glutaminsäure sind, die einige Proteïnkörper liefern, und wir theilen vollständig ihre Ansicht, dass diese Differenzen ihren Grund in einer Verschiedenheit der Proteïnkörper unter sich haben.

Solche quantitative Bestimmungen der nach einer und derselben Methode von allen Proteïnstoffen erhaltenen Zersetzungsproducte, sind nunmehr viel zu wichtig, als dass wir nicht versuchen müssten, die nachstehenden Daten zu vervollständigen und so genau als möglich herzustellen.

Von 100 Theilen trockener Proteïnsubstanz wurde erhalten:

	Eieralbumin	Pflanzenalbumin	Caseïn	Legumin
Bromoform	29·9	39·1	37·0	44·9
Bromessigsäure	22·0	16·9	22·1	26·2
Oxalsäure	12·0	18·5	11·2	12·5
Asparaginsäure (u. als Malamins. angenommene amorphe Säure).	23·8	23·1	9·3	14·5
Leucin (rohes)	22·6	17·3	19·1	17·9
Bromanil	1·5	1·4	0·3	1·4.

Die Hoffnung, die wir hegten, durch die von uns eingeschlagene Behandlungsweise der Proteïnstoffe auch jene Säuren

---

lässt, ganz auf Rechnung der Bromessigsäuren kommt oder auch zum Theil von Spuren Bromaceton herrührt, müssen wir unentschieden lassen. Bestimmter nachweisen konnten wir es nicht.

[1] Journal für prakt. Chemie. Neue Folge Bd. II. 314.

zu erhalten, welche wir unter denselben Umständen aus verschiedenen Zuckerarten erhalten hatten (Gluconsäure, Lactonsäure, Glycolsäure) und dadurch einen directeren Beweis für die Präexistenz von Kohlehydraten in den Proteïnstoffen zu finden, hatte sich nicht erfüllt.

Allein abgesehen davon, dass ja nicht alle die bei der Proteïnbildung möglicherweise betheiligten Kohlehydrate gerade diese Säuren liefern müssen, sondern vielleicht nur Oxalsäure und Bromessigsäure, die wir doch gefunden hatten[1], so konnte es auch noch sein, dass statt derselben nur ihre Zersetzungsproducte zu erhalten waren, wenn, wie in unserem Falle, die Behandlung mit Brom länger fortgesetzt werden musste.

Wir hielten es daher für nöthig, uns zu vergewissern, wie bei einer weitern Behandlung mit Brom, Wasser und Silberoxyd sich Säuren von der Natur der Gluconsäure verhalten würden.

Diese und andere Versuche, namentlich auch über Dextrin und Stärke, sollen in einem zweiten Theil dieser Abhandlung zur Sprache kommen.

Für diesmal führen wir aus derselben nur kurz die schon ermittelte Thatsache an, dass die Gluconsäure z. B. fast geradeauf in Kohlensäure, Bromoform, Bromessigsäure und Oxalsäure zerlegt wird und dass das Dextrin eine entsprechende Säure liefert, die sich ebenso zu verhalten scheint.

Unsere Zersetzungsweise der Proteïnstoffe hat demnach in Übereinstimmung mit den andern Zersetzungsweisen wieder zu Producten geführt, die sich in die beiden, in der Einleitung aufgestellten zwei Gruppen, die fette und die aromatische einreihen lassen.

Betrachtet man die gefundenen Glieder dieser Gruppe näher, so erkennt man, dass die höchsten nicht mehr als 6 Atome Kohlenstoff im Kern oder der Hauptkette enthalten, so dass man sie auf die beiden Kohlenwasserstoffe C_6H_{14} und C_6H_6 zurückführen kann. Man hat dann von

[1] Man erinnert sich, dass das Phloroglucin, auch eine Art Kohlehydrat, bei der Behandlung mit Chlor und Wasser ausschliesslich Chloressigsäure gibt.

$C_6H_{13}(NH_3$ Caprylammin	—	—	—	—	—	—
$C_5H_{11}(NH_2)$ Amylamin	$C_5H_{11}(COOH)$ Capronsäure	$C_5H_{10}\left\{\begin{matrix}NH_2\\COOH\end{matrix}\right.$ Leucin	—	—	—	—
$C_4H_9(NH_2)$ Butylammin	$C_4H_9(CO_6H)$ Valeriansäure	—	—	—	—	—
$C_3H_7(NH_2)$ Propylammin	$C_3H_7(COOH)$ Buttersäure	—	—	$C_3H_5NH_2\left\{\begin{matrix}COOH\\COOH\end{matrix}\right.$ Glutamminsäure	—	—
$C_2H_5(NH_3)$ Aethylammin	$C_2H_5(COOH)$ Propionsäure	—	$C_2H_4\left\{\begin{matrix}OH\\COOH\end{matrix}\right.$ Milchsäure	$C_2H_3NH_2\left\{\begin{matrix}COOH\\COOH\end{matrix}\right.$ Asparaginsäure	$C_2H_2\left\{\begin{matrix}COOH\\COOH\end{matrix}\right.$ Fumarsäure	$\begin{matrix}COOH\\COOH\end{matrix}$ Oxalsäure
$CH_3(NH_2)$ Methylamin	$CH_3(COOH)$ Essigsäure	$CH_2\left\{\begin{matrix}NH_2\\COOH\end{matrix}\right.$ Glycocoll	—	—	—	CO_2 Kohlensäure

Von $C_6H_6 = [-CH=CH-CH=CH-CH=CH-]$

$C_6H_3\left\{\begin{matrix}NH.\ C_2H_5\\OH\\COOH\end{matrix}\right.$ Tyrosin	$C_6Br_4O_2$ Bromanil
$C_6H_5(COOH)$ Benzoësäure	$C_6H_4\left\{\begin{matrix}COOH\\OH\end{matrix}\right.$ Paraoxybenzoësäure [1]
$C_6H_5(COH)$ Benzaldehyd	

[1] Daraus NO_2 und Clhaltige Abkömmlinge.

Der genetische Zusammenhang dieser Verbindungen ist ohne weiters klar. Man erhält also immer gewisse nächste, primäre Spaltungs- oder Oxydationsproducte und daneben eine ganze Reihe solcher, die secundär sind. Charakteristisch für die Proteïnstoffe sind nur die höchsten Glieder: Leucin, Asparaginsäure, Glutamminsäure, Tyrosin. Alle übrigen sind nur Abkömmlinge dieser.

Man kann, glauben wir, nach den vorstehenden Resultaten die Versuche, die Proteïnstoffe durch Oxydationsmittel zu zersetzen, als ziemlich abgeschlossen betrachten.

Schwerlich wird man auf diesem Wege neue Aufklärungen erhalten und Verbindungen finden, die nicht unter die nächsten Verwandten der bisher beschriebenen gehörten.

Der Organismus indess erzeugt noch besonders zwei Zersetzungsproducte, die künstlich aus den Proteïnstoffen noch nicht hergestellt werden konnten: die Harnsäure und den Harnstoff.

Wir werden versuchen Thatsachen aufzufinden, die für die Erklärung auch dieser Art von Umsetzung verwerthet werden können.

Welche Zellen in den Pepsindrüsen enthalten das Pepsin?

Von **Ernst Friedinger.**

(Aus dem physiologischen Institute der Wiener Universität.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Juli 1871.)

Kölliker erwähnt zuerst das Vorkommen von zweierlei Zellen in den Pepsindrüsen des Hundes. (Mikroskop. Anatomie, Leipzig 1854, pag. 141—142.) In neuester Zeit wurde dieser Gegenstand von Heidenhain und Rollet der genauesten Untersuchung unterzogen. Im Allgemeinen kamen beide Forscher zu übereinstimmenden Resultaten.

Ich stelle dieselben in Folgendem kurz zusammen:

1. Bei den Säugern (Hund, Katze, Schaf, Kaninchen, Meerschweinchen u. s. w.) kommen zweierlei Arten von Zellen vor. Die einen, früher als Pepsinzellen oder Labzellen gekannt, von Heidenhain als Belegzellen, von Rollet als delomorphe Zellen aufgeführt, liegen der Schlauchwand an, ohne einen vollständigen, zusammenhängenden Wandbeleg zwischen der Membrana propria und dem Lumen zu bilden.

2. Die zweite Art von Zellen, welche früher entweder gänzlich übersehen, oder, wie von Kölliker, nur beim Hunde erwähnt wurden, bezeichnet Heidenhain als Haupt-, Rollet als adelomorphe Zellen [1]. Sie bilden die eigentliche Füllungsmasse der Drüsenschläuche. Sie begrenzen eines Theils das

---

[1] Rollet leitet die beiden Namen von Bildern ab, welche er bei der Untersuchung frischer Kaninchenmägen bekam. Haidenhain's Hauptzellen zeigen im frischen Zustande der Drüsen keine deutliche Begrenzung, noch regelmässige Kernvertheilung, sondern bilden eine zusammenhängende Masse, wurden daher von Rollet als adelomorphe Zellen bezeichnet, im Gegensatze zu den delomorphen (Belegzellen), welche scharf abgegrenzt sind.

Lumen, anderen Theils liegen sie der Membrana propria dort an, wo die Belegzellen fehlen.

Abgesehen von ihrer Gestalt, unterscheiden sich diese beiden Zellenarten noch durch ihr verschiedenes Verhalten gegen Tinctionsmittel, welches besonders genau von Rollet studirt wurde.

3. Der Drüsenhals (äusseres Schaltstück Rollet's) ist gewöhnlich von delomorphen Zellen ähnlichen Gebilden eingenommen, welche sich durch gleiches Verhalten gegen Tinctionen wie die delomorphen Zellen auszeichnen, nur sind sie mehr kugelig geformt, während die delomorphen Zellen der Endstücke mehr in die Länge gezogen sind.

So das hauptsächliche Verhalten beider Zellenarten in den Pepsindrüsen der früher erwähnten Säugethiere. Anders verhält sich die Sache bei den bis jetzt untersuchten Amphibien. Bei den Fröschen und Tritonen kommen ausschliesslich Zellen vor, welche sich analog den Belegzellen verhalten.

Das ganz gleiche Verhalten fand ich bei der Schildkröte *(Emys Europaea)*.

Hier unterscheiden sich auch die Drüsen des Pylorus wesentlich von denen der übrigen Magenschleimhaut. Die Pylorusdrüsen führen bis zum Grunde cylindrische Zellen, während die andern mit Belegzellen erfüllt sind.

Ein von mir untersuchter Magen der Schlingnatter *(Coronella laevis)* zeigte in den Endschläuchen nur Belegzellen, im Drüsenhalse grosse blasenförmige Zellen, ähnlich denen, welche Heidenhain in den Pepsindrüsen des Frosches beschreibt, und sie für Schleimzellen erklärt.

Es gelingt leicht, sich von dem eben beschriebenen Verhalten beider Zellenarten zu unterrichten, wenn man sich der verschiedenen, von Heidenhain und Rollet angegebenen Tinctionsmethoden bedient. Ich muss hier erwähnen, dass ich nach der Methode Heidenhain, die Belegzellen mit Karmin zu tingiren, immer zwar deutliche Färbung bekam, doch waren stets die Zellencontouren etwas verwischt, die Zellen mehr gequollen, was ich nur der Einwirkung von Essigsäuredämpfen zuschreiben kann.

In Rücksicht auf die Punkte, in denen Rollet und Heidenhain von einander abweichen, kam ich zu folgender Anschauung:

Heidenhain behauptet, dass in dem Drüsenausgange (beim Hunde) Belegzellen vereinzelt noch vorkommen, und zwar zwischen dem Bindegewebe der Schleimhaut und dem Cylinderepithel, welches Vorkommen auch von F. E. Schulze an den Magendrüsen des Fuches beobachtet wurde.

Rollet dagegen bestreitet das Vorkommen seiner delomorphen Zellen in dem inneren Schaltstück (Anfang des Drüsenhalses bei Heidenhain) und in den Magengruben. Er erklärt, die Fig. 2, Taf. XX, bei Heidenhain beruhe auf einer Täuschung, hervorgerufen durch zu dicke Schrägschnitte der Magenschleimhaut.

Nach meinen Beobachtungen scheint allerdings dieses Verhalten der Belegzellen seltener vorzukommen, doch habe ich unter den vielen Schnitten, welche ich untersuchte, mehrere Drüsen gefunden, welche das oben besprochene Bild zeigen. Es waren für mich hier immer nur sehr dünne Längsschnitte massgebend, welche genau die Magengruben halbirten. Ein Präparat zeigte mir eine Belegzelle bis in die Mitte der Magengrube unterhalb des Cylinderepithels vorgedrungen.

Rollet erklärt sich ferner gegen die Bindegewebsnischen, welche nach Heidenhain die Belegzellen in dem mittleren Dritttheile des Drüsenschlauches beim Schweine aufnehmen. Rollet meint, dass diese Öffnungen die leeren Lichtungen von Capillargefässen und kleinen Venen seien. Ich habe diese Öffnungen sehr häufig an ausgepinselten Präparaten gesehen, kann aber der Anschauung Rollet's nicht beipflichten, und erkläre sie mir folgendermassen: Wie schon Kölliker hervorhebt, liegen sehr häufig grosse Zellen (Belegzellen) in den Ausbuchtungen der Membrana propria. Sehr oft sieht man auf Längsschnitten nur eine einzige Belegzelle in einer solchen Ausbuchtung liegen, wo sie dann zumeist vollkommen von der Contour einer Bindegewebsmembran umschlossen wird.

Dieses Verhalten scheint mir dadurch erklärlich, dass bei dem Schnitte die andern Zellen, welche noch in der Ausbuchtung lagen, weggeschnitten wurden, und nur eine einzige liegen blieb.

Für diese Ansicht spricht das relativ viel seltenere Vorkommen einer einzigen Belegzelle in einer solchen Nische, als das von mehreren Zellen.

Die wichtigste Frage aber, welche aus vorstehender mikroskopischer Untersuchung hervorgeht, ist für mich die, welche von beiden Zellenarten das Pepsin enthalten. In früherer Zeit, wo man die zweite Art der Zellen nicht kannte, wurde nur den Belegzellen die verdauende Wirkung zugeschrieben.

Haidenhain fühlt sich aus dem verschiedenen Verhalten der Drüsen im Hungerstadium und in der Verdauung zu der Annahme gedrängt, dass den Belegzellen die Säurebildung, den Hauptzellen die Pepsinabsonderung zufällt.

Ebstein hat diese Ansicht Heidenhain's gestützt, indem er fand: 1. Dass auch das Infus der keine Belegzellen führenden sog. Magenschleimdrüsen in hohem Grade das Vermögen besitzt, Eiweisskörper zu lösen, und 2. dass die Drüsenzellen der Pylorusdrüsen identisch mit den Hauptzellen der sog. Labdrüsen sind. Die Methode, welche ihn zu diesem Resultate führte. kann indessen der Kritik nicht Stich halten.

Zunächst ist zu bemerken, dass es sich offenbar darum handelte, zu bestimmen, ob in den Pylorusdrüsen oder in den bisher sogenannten Pepsindrüsen mehr Pepsin enthalten sei. beziehungsweise darum, ob von den Pylorusdrüsen überhaupt solches abgesondert werde. Der Weg, den Ebstein eingeschlagen hat, ist aber nicht derjenige, welchen man zur quantitativen Bestimmung des Pepsins einzuschlagen hat.

Ebstein hat, nachdem er den Magen bis zur neutralen Reaction ausgewaschen, Infuse von beiden Arten von Drüsen gemacht, und die Eiweissmengen bestimmt, welche diese Infuse in gleichen Zeiten verdauten.

Es ist nun seit längerer Zeit bekannt (vergleiche Brücke Beiträge zur Lehre der Verdauung, I. Abtheilung. Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften Band 37, S. 131), dass die Menge des in einer gegebenen Zeit verdauten Eiweisses keineswegs direct von der Pepsinmenge abhängt, dass sich nur. wenn die Pepsinmengen äusserst gering sind, wesentliche Unterschiede zeigen, welche mit Sicherheit von der grösseren oder geringeren Pepsinmenge hergeleitet werden können.

Wenn dagegen die Pepsinmenge eine gewisse, verhältnissmässig tiefliegende Grenze erreicht hat, so wird damit auch das Maximum der Verdauungsgeschwindigkeit erzielt, welches unter den gegebenen Umständen überhaupt erzielt werden kann, und die Verdauungsflüssigkeit würde unter übrigens gleichen Umständen nicht mehr schneller verdauen, wenn sie auch den doppelten, den dreifachen, ja den zehnfachen Pepsingehalt besässe.

Es ist deshalb klar, dass zwei Verdauungsflüssigkeiten sehr ungleiche Pepsinmengen enthalten, und dennoch in gleichen Zeiten gleiche oder nahezu gleiche Eiweissmengen verdauen können.

Ich habe mich deshalb zur Entscheidung der uns vorliegenden Frage der Methode bedient, welche in Brücke's obencitirten Beiträgen zur Lehre von der Verdauung beschrieben ist.

Zunächst wurde der Magen eines in der Verdauung befindlichen, so eben getödteten, grossen Hundes über der convexen Seite einer Abrauchschale ausgespannt, durch 24 Stunden unter fliessendem Wasser ausgewaschen.

Nun trennte ich den Pylorustheil der Schleimhaut so weit ab, als er nach meinen früheren Untersuchungen nur die bisher sogenannten Schleimdrüsen enthielt, dann die Zone, wo diese und zugleich Wasmann'sche Drüsen vorkommen, dann die durchwegs mit Wasmann'schen Drüsen besetzte Schleimhaut des Fundus und der grossen Curvatur.

Die erste und die letzte der genannten Portionen wurden zerkleinert, und mit destillirtem Wasser auf dem Filtrum ausgewaschen.

Das Waschwasser wurde behufs eines Vorversuches angesäuert, und schon dieser Vorversuch gab ein mit den Resultaten von Ebstein sehr wenig übereinstimmendes Ergebniss. Die Wasmann'schen Drüsen hatten ihr Eiweiss in einer Stunde vollständig verdaut, während die Pylorusdrüsen nach 48 Stunden mit den ihrigen noch nicht vollständig fertig waren.

Ich bediente mich zu diesen und den folgendeu Versuchen nicht der Eiweisswürfel oder Eiweissschnitte, wie es Ebstein gethan, sondern säuerte Eiweiss schwach an, coagulirte es in der Wärme zu Flocken, und bediente mich dieser.

Ich that dies, um einerseits schnellere Versuchsresultate zu haben, und andererseits doch gegen das Zerfallen der Eiweissflocken in blosser verdünnter Chlorwasserstoffsäure (welches vorkommt, wenn man verdünntes Eiweiss ohne anzusäuern in Flocken coagulirt hat, l. c.) gesichert zu sein. — Die weiteren Versuche stellte ich derart an, dass ich die beiden wie oben behandelten Schleimhautportionen trocknete und pulverisirte.

Von jedem dieser Pulver wurden 0·5 Grm. auf einem Filtrum, das auf einem unten geschlossenen Trichter lag, mit 15 CC. verdünnter Chlorwasserstoffsäure, die 1·5 ClH im Litre enthielt, infundirt, und die Infuse nach 24 Stunden abgelassen. Mit diesen Infusen machte ich nun derartige vergleichende Versuche, dass ich sie mit bestimmten Mengen Chlorwasserstoffsäure von demselben Säuregrade verdünnte, so dass, wenn die Pepsinmenge in der ursprünglichen Flüssigkeit gleich p gesetzt wird, sie in dem ersten Gemisch $^1/_2 p$, im zweiten $^1/_4 p$, im dritten $^1/_8 p$ u. s. f. betrug. Die so erzielten Gemische wurden nun mittelst Eiweissflocken bei gewöhnlicher Zimmertemperatur, und unmittelbar neben einander stehend, auf ihre Verdauungsgeschwindigkeit geprüft. Es zeigte sich noch beim 5. und 6. Infus, dass die von den Pylorusdrüsen gewonnene unverdünnte Mutterflüssigkeit langsamer verdaute, als das gleichzeitig gewonnene Infus von den Pepsindrüsen, nachdem das letztere so weit verdünnt war, dass ihm nur noch $^1/_{32}$ seines Pepsingehaltes geblieben war. Erst die Flüssigkeit, bei welcher der Pepsingehalt auf $^1/_{64}$ reducirt war, hielt nahezu mit dem Pylorusdrüseninfus gleichen Schritt, und blieb am zweiten Tage hinter demselben zurück.

Auch an dem Filterrückstande zeigte sich in sehr auffallender Weise die Verschiedenartigkeit beider Drüsen. Während er da, wo die Wasmann'schen Drüsen infundirt wurden, in Folge der Selbstverdauung rasch abnahm, so dass beim 6. Infus nur noch sehr wenig zurückblieb, änderte er sich, da wo Pylorusdrüsen infundirt wurden, in seinem Aussehen kaum merklich.

Diese meine Versuchsresultate sind in voller Übereinstimmung mit denen, welche Wasmann, Kölliker und Goll erhielten, aber sie sind im offenen Widerspruche mit denen von Ebstein. Den Grund davon kann ich in Berücksichtigung der

fehlerhaften Versuchsmethode, der sich Ebstein bediente, nur darin suchen, dass in der durch und durch mit Pepsin infiltrirten Magenschleimhaut auch im Pylorustheile trotz des Auswaschens noch so viel Pepsin zurückgeblieben war, dass sich die Pepsinmenge in dem gewonnenen Infus der oben erwähnten, wie gesagt, verhältnissmässig niedrigliegenden Grenze näherte, und ihm deshalb scheinbar eine nicht viel geringere Verdauungskraft zukam, als dem aus den Wasmann'schen Drüsen bereiteten Aufgusse.

Da nun die Wasmann'schen Drüsen es sind, in denen ausschliesslich die Belegzellen (Rollet's delomorphe Zellen) vorkommen, während Heidenhain's sogenannte Hauptzellen (Rollet's adelomorphe Zellen) den Epithelzellen der Pylorusdrüsen gleichen, so scheint es mir das natürlichste zu sein, anzunehmen, dass das Pepsin aus den Belegzellen stamme, wie man es in der That auch bis zum Erscheinen von Heidenhain's Abhandlung allgemein gethan hat: denn die Pepsinzellen der Autoren waren nach den Beschreibungen und Abbildungen, die davon gegeben wurden, Heidenhain's Belegzellen, und nicht seine Hauptzellen.

Heidenhain führt freilich für seine Hauptzellen an, dass sie in der Verdauung ein anderes Aussehen zeigen, als nach längerem Fasten, aber dies kann nicht als ein Beweis dafür gelten, dass sie das Pepsin absondern. Der veränderte Mageninhalt, die grosse Menge der vorhandenen Säure kann auf sie zurückgewirkt, und sie verändert haben. Überdies führt Rollet an, dass er nicht im Stande gewesen sei, das An- und Abschwellen der Drüsenschläuche, während einer Verdauungsperiode, zu constatiren. Es ist ferner eine wohl zu berücksichtigende Thatsache, dass in den Wasmann'schen Drüsen der Frösche Zellen mit den Charakteren der Belegzellen vorkommen, aber keine die den Hauptzellen entsprechen, es sei denn, dass man die unweit des Einganges gelegenen, von Heidenhain als Schleimzellen bezeichneten Gebilde dafür ansehen wollte. Diese Thatsache hat schon Heidenhain an Winterfröschen beobachtet, Rollet auch an Sommerfröschen, und ich kann seine Angabe hierin vollkommen bestätigen.

Ebenso wie die Frösche, verhalten sich in diesem Punkte nach Rollet die Tritonen, nach meinen Untersuchungen auch die Schildkröten *(Emys Europaea)* und Schlangen *(Coronella laevis)*; ich habe sie in der warmen Jahreszeit, Monat Juli, untersucht.

Noch wichtiger scheint mir die von Rollet gemachte Beobachtung, dass sich bei den winterschlafenden Fledermäusen fast gar keine delomorphen Zellen (Belegzellen) in den Endstücken der Drüsenschläuche vorfinden, während bei den fliegenden Fledermäusen in den Endstücken aller Schläuche wieder eine Anzahl dissociirter delomorpher Zellen wahrgenommen wird.

Über den Einfluss der Athmung auf den Kreislauf.

Zweite Mittheilung.

Über eine reflectorische Beziehung zwischen Lunge und Herz.

Von **Ewald Hering.**

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Juli 1871.)

§. 1. Mässige Aufblasung der Lunge vermehrt die Herzschläge.

Bei Gelegenheit der Untersuchung, welche Herr Dr. Breuer mit mir über den Einfluss des Nervus vagus auf die Athembewegungen [1] ausführte, machten wir an Hunden die Beobachtung, dass die Aufblasung der Lunge einen auffallenden Einfluss auf die Schlagfolge des Herzens hat. Seitdem habe ich vielfache Erfahrungen über diesen Gegenstand gesammelt und denselben neuerdings mit verbesserten graphischen Methoden einer nochmaligen Prüfung unterworfen.

Führt man in die Trachea eines Hundes eine luftdicht schliessende Canüle ein, welche in einen Kautschukschlauch übergeht, bläst sodann durch letzteren mit einem Blasbalge oder besser aus der eigenen Lunge Luft ein, so dass Lunge und Thorax des Thieres passiv erweitert werden, und schliesst endlich den Schlauch luftdicht ab, so tritt in den weitaus meisten Fällen eine deutliche Beschleunigung des Herzschlages ein.

---

[1] Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wiss. zu Wien. 57. Bd., II. Abth. 1868 April und 58. Bd., II. Abth. 1868 November.

Zur genaueren Untersuchung wurde eine T-förmige Canüle mit dem einen Ende in der Trachea befestigt, das zweite Ende mit einem Quecksilbermanometer verbunden, und an das dritte Ende ein kurzer Kautschukschlauch angefügt, durch welchen der Hund athmen und mittels dessen auch die Aufblasung der Lunge geschehen konnte. Die Arteria carotis oder cruralis wurde gleichzeitig mit einem Manometer in Verbindung gesetzt, und beide Manometer zeichneten ihre Schwankungen vertical über einander auf das berusste Papier eines Kymographions. Fast immer waren die Hunde mit Opium oder Morphium narkotisirt. So lange die Trachealcanüle durch den kurzen Schlauch frei mit der Atmosphäre communicirt, verzeichnet das mit der Trachea in Verbindung stehende Manometer die äusserst geringen Änderungen des Luftdrucks in der Trachea entweder gar nicht, oder geräth nur bei starken Exspirationsstössen in kleine Schwingungen. Wenn aber durch den erwähnten Schlauch Luft in die Lungen eingetrieben und dann der Schlauch luftdicht zugeklemmt wird, steigt das Manometer sofort auf die der Spannung der Lungenluft entsprechende Höhe und gibt den Druck an, unter welchem die Innenfläche der Lunge steht. Da von diesem Drucke der Ausdehnungsgrad der Lunge und des Thorax abhängt, so dient der Stand des Quecksilbers im Manometer als Mass für den Grad der passiven Erweiterung der Lunge, und man kann dieselbe controliren, was deshalb von besonderer Wichtigkeit ist, weil bei übertriebener Aufblasung, d. h. wenn der Lungenluftdruck über 40 oder höchstens 50 Mm. hinausgeht, der Versuch meist misslingt, worauf weiter unten zurückzukommen sein wird.

Wenn nun, während die Lunge aufgeblasen ist, das Thier fortathmen würde, so müsste das Quecksilber des mit der Trachea communicirenden Manometers in heftige Schwankungen gerathen. Da aber, wie l. c. gezeigt wurde, eine irgend erhebliche Ausdehnung der Lunge über ihr mittleres Volumen hinaus die Inspirationsbewegungen bei den meisten Hunden hemmt und nur einen mit der Dauer des Versuchs immer deutlicher hervortretenden Tetanus der Exspirationsmuskeln hervorruft, so bleibt die Quecksilbersäule in Ruhe oder steigt langsam mit dem wachsen-

den Exspirationstetanus an [1], bis endlich die zunehmende Dyspnoe des Thieres die Hemmung der Inspirationsbewegungen überwindet. Sobald aber in Folge dessen die erste tiefe Inspiration erfolgt ist, kann der Versuch als abgeschlossen betrachtet und die Trachealcanüle wieder der atmosphärischen Luft eröffnet werden.

Verfolgt man während des eben beschriebenen Versuchs die Curve des Blutdruckes, so bemerkt man als Folge der gesteigerten Spannung der Lungenluft ein Absinken des Blutdruckes, welches um so bedeutender wird, je stärker der Druck der Lungenluft ist. Dieses Sinken des Blutdruckes ist bekanntlich im Wesentlichen dadurch bedingt, dass das Einströmen des Blutes in den Thorax erhöhten Widerstand findet, und nebenbei auch dadurch, dass die erweiterte Lunge dem Blutstrome in den Lungencapillaren gesteigerten Widerstand darbietet. Zweitens aber bemerkt man, dass die Herzschläge sich rascher folgen, so lange die Lunge ausgedehnt bleibt, dagegen in den langsameren Rhythmus zurückfallen, sobald die Lunge wieder frei mit der Atmosphäre communicirt. Diese Beschleunigung der Herzschläge ist im Allgemeinen um so auffälliger, je geringer vor dem Aufblasen die Frequenz der Herzschläge war. Es kommt bisweilen vor, dass bei stärkerer Aufblasung der Lunge die Zahl der Herzschläge um mehr als das Dreifache erhöht wird. Der Versuch lässt sich beliebig oft an demselben Thiere wiederholen und die Dauer der Lungenerweiterung beliebig kurz machen oder bis zum Wiederbeginn der Inspirationsbewegungen ausdehnen, ohne dass der Erfolg ausbleibt, soferne nur die Herzschläge des Thieres nicht von vornherein zu frequent sind, oder die Aufblasung allzu seicht oder gar zu übertrieben gemacht wird. Insbesondere ist es überraschend zu sehen, wie die manchmal sehr geringe Frequenz der Herzschläge eines mit Opium oder Morphium betäubten Hundes, sobald man seine Lunge stärker aufbläst, einer so eiligen Herzthätigkeit weicht, wie man sie bei Hunden nur als Folge der Vaguslähmung zu beobachten gewöhnt ist.

---

[1] Dabei ist vorausgesetzt, dass das Manometer ganz luftdicht mit der Trachea verbunden ist, was bei den Versuchen, die auf beiliegender Tafel verzeichnet sind, nicht ganz der Fall war.

Die Erscheinungen, welche man am Blutdruck und Herzschlag beobachtet, wenn man Hunde comprimirte Luft athmen lässt, sind von Einbrodt [1] auf Anregung Ludwig's in dessen Laboratorium zum Gegenstande einer exacten und, was das Thatsächliche betrifft, fast erschöpfenden Untersuchung gemacht worden. Auch die so eben beschriebene Beschleunigung der Herzschläge bei erhöhter Spannung der Lungenluft ist in der Abhandlung Einbrodt's schon erörtert, aber sie bildet hier nur einen untergeordneten Theil des Ganzen und kann in ihrer wahren Bedeutung deshalb gar nicht hervortreten, weil nach Einbrodt's Angabe erhöhter Luftdruck in der Lunge viel öfter eine Verminderung als eine Vermehrung der Herzschläge herbeiführt, und weil Einbrodt gar nicht die gesteigerte Ausdehnung der Lunge, sondern lediglich die Erhöhung des Luftdruckes in der Lunge im Auge hatte.

Einbrodt comprimirte Luft in einer grossen Glasflasche und setzte durch Eröffnung eines Hahnes den Innenraum der Flasche mit der Trachea und Lunge in Communication. Der angewandte Druck variirte zwischen 7 und 147 Mm. Quecksilber. Es scheint aber vorherrschend ein sehr hoher Druck angewandt worden zu sein; wenigstens sind von 48 specieller beschriebenen Versuchen nur 18 mit einem Drucke angestellt, der weniger als 50 Mm. betrug.

Bei meinen Versuchen galt es nicht, die Lungenluft stark zu comprimiren, sondern nur die Lungen auszudehnen, um ihnen künstlich mehr oder weniger annähernd jene Form zu geben, welche sie bei der spontanen Inspiration des Thieres annehmen. Eine mässige Erhöhung des Druckes ist hierzu genügend, und wenn derselbe bis auf 30 Mm. Hg gesteigert wurde, so war er für unsere Zwecke schon sehr hoch. Nur ausnahmsweise und nur bei grossen Hunden wurde der Druck über 30 Mm. hinaus gesteigert und nie überstieg er 50 Mm. Von Einbrodt's Versuchen, soweit sie näher beschrieben sind, können also, was allein den Druck betrifft, nur wenige mit den meinigen in Parallele gebracht werden.

Ferner war bei meinen Versuchen die Drucksteigerung schon deshalb stets eine schonende und nicht zu schroff ansteigende, weil sie fast immer durch die Lungenluft des Experimentirenden besorgt wurde. Bei Einbrodt war die Aufblasung wahrscheinlich eine sehr rasche, denn die in der Flasche bereits comprimirte Luft musste sich, wenn der Hahn nicht allmälig, sondern plötzlich geöffnet wurde, mit grosser Gewalt in die Lunge drängen und durch die Geschwindigkeit der Erweiterung eine dem Thiere ungewohnte Zerrung des Lungengewebes herbeiführen, und zwar auch dann, wenn der Druck an sich nicht übermässig hoch war.

Diese sozusagen unnatürliche Zerrung des Lungengewebes, wie sie durch zu schroffe oder zu weit gehende Aufblasung der Lunge herbeigeführt wird, hat aber vielleicht einen ganz andern Einfluss auf die Schlag-

[1] Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wiss. zu Wien. 40. Band, II. Abth. S. 361.

folge des Herzens als eine schonende, den Vorgang bei der natürlichen Inspiration imitirende Aufblasung. Ferner wird bei übermässiger Drucksteigerung die Circulation des Blutes in viel stärkerem Masse beeinträchtigt als bei meinen Versuchen. Aus diesen und noch andern, erst später zu erörternden Gründen wird es erklärlich, dass Einbrodt bei seinen Versuchen öfter die Herzschläge verzögert als beschleunigt sah.

Dies möge vorläufig genügen, um wegen des scheinbaren Widerspruchs zu beruhigen, welcher zwischen meinen und Einbrodt's Angaben besteht. Eine ausführliche Kritik der interessanten Arbeit Einbrodt's kann erst gegeben werden, nachdem noch mehrere andere hierbei in Betracht kommende Fragen erörtert worden sind.

§. 2. Die Vermehrung der Herzschläge bei Aufblasung der Lunge ist nicht lediglich die Folge des vermehrten Druckes, welcher auf der Aussenfläche des Herzens lastet.

Vier Fragen sind es, welche sich bei Beobachtung des beschriebenen Phänomens zunächst aufdrängen: ist es der höhere Druck, unter welchen das Herz gesetzt wird, sind es die veränderten Strömungswiderstände des Kreislaufs, sind es Störungen des Gaswechsels, oder endlich, ist es eine durch gewaltsame Dislocation des Herzens bedingte Zerrung seiner Nerven, durch welche die erhöhte Frequenz der Herzschläge herbeigeführt wird?

Die erste Frage bedarf um so mehr einer eingehenden Erörterung, als von Einbrodt die Ansicht aufgestellt worden ist, dass eine erhebliche Vermehrung des auf die Herzoberfläche wirkenden Druckes das Herz in ähnlicher Weise reize, wie etwa der Druck der Finger, welche das blossgelegte Herz fassen.

Von vornherein ist es nicht wahrscheinlich, dass der bei unsern Versuchen angewandte Druck von 2—4 Cm. Hg das Herz lediglich durch directe Reizung zu so auffallenden Beschleunigungen seiner Thätigkeit veranlassen sollte; denn abgesehen davon, dass die gedehnte Lunge einen beträchtlichen Theil des fraglichen Druckes trägt, so dass nur der Rest auf das Herz wirken kann, ist auch die schonende Art, wie dieser Druck unter Vermittlung der Lunge auf das Herz übertragen wird, gewiss nicht zu starker mechanischer Reitzung geeignet. Um aber die Annahme, dass der erhöhte das Herz belastende Druck bei unserem Versuche

Herzschläge auch dann vermehrt, wenn die Brusthöhle geöffnet ist und die ausgedehnten Lungen keinerlei Druck auf das Herz ausüben können.

Zum weitern Beweise dafür, dass Ausdehnung der Lunge die Herzschläge beschleunigt, auch wenn jede Pressung des Herzens ausgeschlossen ist, dienen folgende Versuche:

Saugte ich aus dem Pneumothorax jener Hunde, in deren Brustwand jederseits die oben beschriebene Cantüle luftdicht eingeführt war, die Luft aus, so dass die zuvor vollständig collabirten Lungen sich wieder mässig ausdehnen mussten, so trat eine zwar nur vorübergehende, aber deutliche Beschleunigung der Herzschläge ein. Diese Versuche bedürfen einer ausführlicheren Beschreibung.

Nachdem die Cantülen in der beschriebenen Weise in der Brustwand befestigt waren, wurde die bis dahin unterhaltene künstliche Athmung ausgesetzt und die Trachealcantüle des Hundes rasch mit einem Kautschukschlauche verbunden, der in einen, im Verhältniss zur Lunge des Hundes sehr geräumigen, mit Wasserstoffgas gefüllten Gasometer führte. Das Gas war zuvor auf dieselbe Spannung gebracht worden, welche die atmosphärische Luft hatte, und der Gummischlauch bis zur Trachealcantüle ebenfalls mit Wasserstoff gefüllt und bis zum Versuche geschlossen gewesen. Wurde nun, nachdem das Thier durch das Aussetzen der Ventilation bereits dyspnoisch geworden war, Luft aus dem Pneumothorax ausgesaugt, und demnach die Spannung der Luft in der Brusthöhle kleiner gemacht, als die Spannung des Wasserstoffgases war, so drang letzteres nothwendig in die Lunge ein und blähte dieselbe auf, soweit der beengte Raum des, durch den Überdruck der atmosphärischen Luft zusammengedrückten Thorax dies erlaubte. Trotz dieser sehr mässigen Aufblasung der Lunge durch den Wasserstoff war doch die sofort auftretende Beschleunigung der Herzschläge sehr deutlich. Der Wasserstoff wurde hier, wie auch öfters bei den schon oben beschriebenen Versuchen, deshalb benützt, damit die Zufuhr von Sauerstoff zur Lunge ausgeschlossen würde. Denn dieser würde, ins Blut und mit diesem bis zum verlängerten Marke gelangt, die Dyspnoe mindern und die durch die Dyspnoe bedingte stärkere Erregung der Hemmungsnerven des Herzens

herabsetzen können. Ferner wurde der Versuch mit dem Aussaugen öfter hintereinander wiederholt, ohne irgend neue atmosphärische Luft eindringen zu lassen, weil man so sicher sein konnte, dass höchstens nur noch Spuren von Sauerstoff in der Lunge zurückgeblieben sein konnten.

Trotz der gewaltigen Dyspnoe also, welche durch die lange Absperrung der atmosphärischen Luft von der Lunge entstand, zeigten doch die im Allgemeinen stark verlangsamten Herzschläge deutlich die erwähnte Beschleunigung. Dass dieselbe nur vorübergehend war und den Act der Aussaugung nicht lange überdauerte, war von vornherein zu erwarten, wenn man bedachte, dass in einem, durch den negativen Druck der eingeschlossenen Luft künstlich verengten Thorax nur eine sehr mässige Ausdehnung der Lunge zu erzielen ist, und dass dabei die Lunge kaum das Volumen erreicht, welches sie im unverletzten Thorax bei activer Exspiration annimmt. Im Vergleich aber zu dem äusserst geringen Volumen der collabirten Lunge war die Ausdehnung derselben beim Versuche immerhin erheblich genug, um die geschilderte Wirkung auf das Herz auszuüben.

Somit scheint mir hinreichend bewiesen, dass der gesteigerte Druck auf das Herz nicht der wesentliche Grund ist, warum das Aufblasen der Lunge im geschlossenen Thorax die Frequenz der Herzschläge vergrössert. Mag sein, dass jener Druck diese Frequenz mit beeinflusst; dies zu untersuchen lag nicht in meinem Plane. Ich begnüge mich, gezeigt zu haben, dass eine deutliche Vermehrung der Herzschläge bei gesteigerter Lungenausdehnung auch dann eintritt, wenn der Druck auf das Herz gar nicht verändert oder sogar, wie bei den letztbeschriebenen Versuchen, vermindert ist.

§. 3. Die Vermehrung der Herzschläge bei Aufblasung der Lunge ist nicht eine Folge der veränderten Circulationswiderstände.

Da bei der Aufblasung der Lunge, wie schon gesagt, nicht nur die Strömungswiderstände in der Lunge grösser werden, sondern auch, was bei geschlossenem Thorax viel wesentlicher ist, das Einströmen des Blutes in die Brusthöhle erschwert wird, so galt es zu untersuchen, ob etwa hierin die eigentliche Ursache

der veränderten Pulsfrequenz zu suchen sei. Man durfte daran denken, dass der verminderte arterielle, der erhöhte venöse Blutdruck oder die veränderte Geschwindigkeit des Blutstroms das Herz, sei es direct, sei es durch irgend welche Reflexe, sei es endlich durch veränderte Stimmung der Centralorgane des Nervensystems, zu veränderter Schlagfolge bestimme.

Die Beschleunigung des Herzschlags, wie sie so eben als Folge des Aussaugens von Luft aus dem Pneumothorax beschrieben wurde, spricht jedoch schon gegen die Annahme, dass die veränderten Circulationsbedingungen die wesentliche Ursache der Pulsbeschleunigung beim Aufblasen seien. Denn beim Aussaugen der Luft aus dem Pneumothorax wurden die in der Brusthöhle gelegenen grossen Gefässe sogar unter negativen Druck gesetzt, das Einströmen von Blut in den Thorax wurde begünstigt, und der Circulationswiderstand in der Lunge durch deren geringe Ausdehnung nicht wesentlich erhöht. Daher zeigte sich auch bei diesen Versuchen ein ganz entgegengesetztes Verhalten des arteriellen Blutdruckes. Während derselbe bei Aufblasung der Lunge im unverletzten Thorax unter gleichzeitiger Zunahme der Herzschläge stark absinkt, steigt er beim Aussaugen von Luft aus dem Pneumothorax sogleich etwas an. In beiden Versuchen sind also die Veränderungen der Circulation ziemlich genau entgegengesetzte, aber die Folgen der Lungenausdehnung für das Herz gleichwohl dieselben.

Trotzdem habe ich nicht unterlassen, noch besondere Versuche anzustellen, welche beweisen, dass die Stauung des Venenblutes bei unsern Aufblasungsversuchen nicht die Ursache der Beschleunigung der Herzschläge ist. Wiederholt nämlich habe ich bei Hunden und Katzen, deren Thorax ergiebig geöffnet war, eine oder beide Hohlvenen in der Nähe des rechten Herzens vorübergehend zugeklemmt, und dadurch zwar ein starkes Absinken des Blutdruckes, bei längerer Dauer des Versuches auch Verlangsamung der Herzschläge, nie aber eine irgend erhebliche Zunahme der Herzschläge gesehen. Die Zunahme der Pulsfrequenz war vielmehr, wenn sich eine solche überhaupt zeigte, äusserst unbedeutend und gar nicht in Betracht zu ziehen bei unsern Versuchen, bei welchen es sich um so gewaltige Änderungen in der Schlagfolge des Herzens handelt.

§. 4. Die Vermehrung der Herzschläge bei Aufblasung der Lunge ist nicht eine Folge der veränderten Bedingungen des Gasaustausches.

Bei Aufblasung der Lunge erleidet der Gasaustausch sowohl in der Lunge als auch in der Medulla oblongata eine wesentliche Änderung, sobald die Aufblasung nicht ganz unbedeutend und vorübergehend ist. In der Lunge nämlich wird die eingeschlossene Luft unter erhöhten Druck gebracht, was zunächst einen vermehrten Übertritt von Sauerstoff ins Blut begünstigen könnte, während dagegen die Kohlensäureabgabe wegen der viel geringeren Sonderspannung dieses Gases in der atmosphärischen Luft vorerst nicht wesentlich beeinträchtigt werden kann. Sind somit die Bedingungen für den Gaswechsel in der Lunge im ersten Stadium der Aufblasung eher günstiger als vorher, so werden sie doch, wenn die Aufblasung einige Dauer hat, sehr bald entschieden ungünstig. Die in der Lunge stagnirende Luft wird rasch sauerstoffarm und kohlensäurereich und das aus der Lunge abfliessende Blut mehr und mehr venös. Dass in der That das Thier sehr bald dyspnoisch wird, verräth sich deutlich durch das Dunklerwerden des Blutes in kleinen blossgelegten Arterien und durch die gewaltigen Athembewegungen, welche eintreten, wenn man die Lungen sich wieder contrahiren lässt. Denn dass während der Dauer der Aufblasung das Thier in der Regel keine Inspirationsbewegungen ausführt, ist, wie wir l. c. gezeigt haben, die Folge der hemmenden Wirkung, welche die Ausdehnung der Lunge auf die Inspirationsbewegung ausübt, während dagegen die Exspirationsmuskeln einen mit der Dauer des Versuchs wachsenden Tetanus zeigen.

Nachdem Thiry, Traube und A. gezeigt haben, dass die dyspnoische Beschaffenheit des Arterienblutes eine starke centrale Erregung der Hemmungsfasern des Herzens bedingt, sollte man erwarten, dass die durch Aufblasung der Lunge herbeigeführte Dyspnoe sich sehr bald durch eine Verzögerung der Herzschläge verrathen werde. Um so auffälliger ist es, dass das gerade Gegentheil eintritt, und dass sogar die Frequenz der Herzschläge oft mit der Dauer der Aufblasung zunimmt. Sobald jedoch die Inspirationshemmung durch die immer stärker werdende Athem-

noth des Thieres überwunden wird, und das Thier trotz der Aufblasung wieder Athembewegungen macht, oder sobald man die Trachealcanüle öffnet und die Lunge sich wieder zusammenziehen lässt, verräth sich sofort der Einfluss der Dyspnoe auf die Hemmungsnerven des Herzens durch eine auffallende Verzögerung der Herzschläge.

Somit könnte höchstens im ersten Stadium des Versuches durch etwas reichlichere Aufnahme von Sauerstoff ins Blut eine beschleunigende Wirkung auf die Herzschläge insofern ausgeübt werden, als das etwas arterieller gewordene Blut im verlängerten Marke den Tonus der Hemmungsfasern des Herzens herabsetzen könnte. Für die sehr häufigen Fälle, wo die Beschleunigung der Herzschläge fast gleichzeitig mit der Aufblasung eintritt, dürfte diese Annahme freilich kaum gemacht werden; indessen gibt es auch Fälle, wo die Wirkung der Aufblasung eine nicht so momentane ist.

Um also dem etwaigen Einwande zu begegnen, dass die reichlichere Sauerstoffaufnahme im Beginne des Versuches einen wesentlichen Factor bilde, habe ich die Aufblasung wiederholt mit Wasserstoffgas angestellt und zwar so, dass die Aufblasung mehrere Male rasch hintereinander ausgeführt, und nach der ersten und zweiten Aufblasung die Canüle an einem seitlich abzweigenden Ansatzrohre je eine kurze Weile geöffnet wurde, um die in der Lunge enthaltenen Gase wieder entweichen zu lassen. Dabei wurde selbstverständlich die Canüle jedesmal wieder geschlossen, noch ehe die Lunge alle überschüssige Luft ausgetrieben und das Thier wieder die Inspiration begonnen hatte. Auf diese Weise wurden Lungen und Canüle vollständig mit Wasserstoff ausgewaschen.

Wenn ich mir nun auch nicht verhehle, dass in dem Wasserstoffgase noch Spuren von Sauerstoff enthalten sein konnten, so würde dies doch bei unsern Versuchen nicht in Betracht kommen. Denn ein mit Spuren von Sauerstoff versetztes Wasserstoffgas ist sicher nicht eine Luft, welche das Blut sauerstoffreicher machen kann, als es während der unbeschränkten Athmung des Thieres war, und doch sind die Herzschläge während der Aufblasung mit Wasserstoff frequenter.

Dass ich auch bei eröffnetem Thorax Aufblasungen der Lunge mit Wasserstoff gemacht habe, um den Einfluss des Sauerstoffes auszuschliessen, wurde schon oben erwähnt. Hierbei, wie auch bei curarisirten Hunden, war die Anwendung des Wasserstoffes viel wesentlicher; denn öfters musste vor dem Aufblasen die künstliche Athmung erst einige Zeit ausgesetzt werden, weil das Thier apnoisch und die Herzschläge zu frequent geworden waren, um sich durch das Aufblasen noch weiter beschleunigen zu lassen. Eine mässige Dyspnoe verlangsamte dann die Herzschläge wieder und liess die Beschleunigung beim Aufblasen deutlicher hervortreten. Die Beschleunigung der Herzschläge tritt also beim Aufblasen der Lunge auch dann ein, wenn jede, im Vergleich zur vorherbestandenen, reichlichere Sauerstoffaufnahme unmöglich gemacht ist. Dass aber auch die Kohlensäureausscheidung aus dem Blute beim Aufblasen mit atmosphärischer Luft oder Wasserstoff nicht begünstigt ist, liegt auf der Hand.

Ich habe schliesslich, um jede Sauerstoffzufuhr zum Gehirn während der Aufblasung auszuschliessen, noch folgenden Versuch gemacht. Einem curarisirten Hunde wurde der Thorax in der Mittellinie geöffnet und die Aorta ascendens zugeklemmt. Die nächste Folge war ein sehr unregelmässiger Herzschlag. Nachdem aber die Abklemmung mehrere Male auf kurze Zeit wiederholt worden war, schlug das Herz auch unmittelbar nach Verschluss der Aorta zunächst ganz regelmässig, bis in Folge der Anämie des Hirns die Hemmungsfasern des Herzens stark erregt und die Herzschläge seltener wurden. Blies ich jetzt die Lungen auf, so zeigte sich sofort eine höchst auffallende Beschleunigung der Herzschläge. Der Versuch wurde öfters hintereinander mit schlagendem Erfolge wiederholt. Er beweist zugleich, dass die Vermehrung der Herzschläge beim Aufblasen nicht durch Änderungen der Circulation bedingt ist, denn die letztere war bei dem Versuche ganz aufgehoben.

§. 5. Die Vermehrung der Herzschläge bei Aufblasung der Lunge ist nicht eine Folge der Dislocation des Herzens.

So lange die Aufblasung eine nur mässige bleibt, ist es von vornherein unwahrscheinlich, dass durch abnorme Lagerung

des Herzens eine Zerrung seiner Nerven herbeigeführt werden könne. Wenn aber die Aufblasung stärker wird, so ist jenes denkbar. Denn der durch Aufblasen künstlich erweiterte Thoraxraum hat nicht ganz jene Form, welche er annimmt, wenn seine Erweiterung durch die Thätigkeit der Inspirationsmuskeln herbeigeführt wird, und insbesondere wird das Zwerchfell in beiden Fällen verschiedene Formen annehmen können. Demnach wird auch die künstlich aufgeblasene Lunge eine andere Gestalt haben, als die durch Inspiration erweiterte, und das Herz wird in beiden Fällen vielleicht wesentlich verschiedene Änderungen seiner Lage erleiden.

Dass nun aber die letztern nicht die Ursache der beschleunigten Herzthätigkeit sind, wird schon dadurch höchst wahrscheinlich, dass auch jene mässige Lungenausdehnung, wie sie durch Aussaugen der Luft aus dem Pneumothorax herbeigeführt wird, die Herzschläge ebenfalls beschleunigt, obwohl hiebei die Lageänderung des Herzens nicht in Betracht kommen kann, da eben die Lunge ihr Volumen nur mässig ändert, das Zwerchfell aber gerade die entgegengesetzte Verschiebung erleidet, als wie beim Aufblasen der Lunge im geschlossenen Thorax.

Ferner wird jene Annahme dadurch widerlegt, dass man durch Zug am Zwerchfell von der Bauchhöhle her eine Lageänderung des Herzens in der eröffneten Brusthöhle bewirken kann, welche der Verschiebung desselben beim Aufblasen sehr analog ist, ohne dass doch die entsprechende Beschleunigung der Herzschläge zu bemerken wäre.

§. 6. Die Beschleunigung der Herzschläge beim Aufblasen der Lunge kommt reflectorisch unter Vermittlung der Nervi vagi zu Stande.

Nach Durchschneidung beider Nervi vagi am Halse werden die Herzschläge durch die Aufblasung nicht mehr beschleunigt. Dies erscheint ziemlich selbstverständlich, weil das Herz des Hundes nach Durchschneidung jener Nerven ohnehin eine so hohe Frequenz der Schläge zeigt, dass eine weitere Steigerung derselben kaum erwartet werden kann.

Daher war es nothwendig, die Zahl der Herzschläge durch künstliche Reizung eines oder beider peripherischen Vagusstümpfe

wieder soweit herabzumindern, dass sie derjenigen etwa gleichkam, welche vor der Durchschneidung der Vagi beobachtet wurde.

Es gelingt, wenn auch nicht immer, so doch häufig, durch künstliche Vagusreizung das Herz ziemlich lange zu einer mässig verlangsamten und doch ganz regelmässigen Schlagfolge zu zwingen, immer vorausgesetzt, dass nicht blos ein, sondern beide Nervi vagi durchschnitten sind. Um ungestört durch die nach der Vagusdurchschneidung meist sehr heftigen Athembewegungen der Thiere die Nerven reizen zu können, muss man die Thiere mit mässigen Dosen von Curare vergiften.

Wenn man nun, während das Herz wieder in langsameren und ungefähr normalem Tempo schlägt, die Lunge aufbläst, so tritt keine Beschleunigung der Herzschläge ein, auch nicht bei den Thieren, welche diese Beschleunigung kurz vor der Durchschneidung der Vagi noch in der ausgesprochensten Weise zeigten, obwohl sie schon curarisirt waren.

Zwei Fehlerquellen sind bei diesem Versuche sorgfältig zu meiden. Erstens wird bei Aufblasung der Lunge die Trachea sammt den Nervis vagis nach unten gezogen, daher es leicht geschehen kann, dass der Nerv sich auf den Electroden verschiebt und dann wegen geminderter oder ganz aufhörender Reizung die Herzschläge sich wieder beschleunigen. Dieser Fehler ist leicht zu vermeiden, wenn man den Nerven auf eine grosse Strecke blosslegt, und dann das freie Ende so auf den Electroden anbringt, dass zwischen letzteren und dem Halse des Thieres der Nerv in einem tiefen Bogen herabhängt.

Zweitens ist zu bedenken, dass bei längerer Reizung des Nerven mit Inductionsströmen das Herz, trotz gleichbleibendem Reize, doch nicht eine gleichbleibende Hemmung seiner Thätigkeit erfährt, sondern seine Schläge allmälig wieder beschleunigt. Der geübte Beobachter wird sich jedoch hiedurch nicht täuschen lassen. Auch ist die Controle dadurch sehr erleichtert, dass eine solche, durch Ermüdung des Hemmungsapparates herbeigeführte Beschleunigung fortdauert oder noch mehr zunimmt, wenn man die aufgeblasene Lunge wieder collabiren lässt, während die Beschleunigung der Herzschläge, wenn sie Folge der Aufblasung wäre, verschwinden müsste, sobald die Lunge sich wieder verkleinert hat.

Die Vermehrung der Pulsfrequenz findet also bei unserm Versuche nur statt, wenn beide, oder wie ich auf Grund besonderer Versuche hinzufügen kann, wenigstens ein Nervus vagus unversehrt ist. Dies ist ein neuer und wichtiger Beweis dafür, dass es nicht eine directe Herzreizung durch Druck oder Zerrung, auch nicht die veränderte Blutcirculation im Herzen ist, welche die Beschleunigung seiner Schläge herbeiführt. Ferner wird hiermit bewiesen, dass das centrale Nervensystem bei jener Beschleunigung mitwirkt.

Diese Mitwirkung des centralen Nervensystems aber ist in doppelter Weise denkbar. Erstens nämlich könnte die veränderte Circulation oder die, durch die gestörte Athmung veränderte Blutmischung das in der Medulla oblongata angenommene Centrum der Herznerven in seiner Thätigkeit alteriren, eine Annahme, deren Unzulässigkeit wir schon oben nachgewiesen haben. Somit bleibt nur die zweite Möglichkeit bestehen, dass nämlich in Folge der Aufblasung der Lunge das cerebrale Centrum der Herznerven durch eine von der Peripherie kommende Nervenerregung in einen veränderten Zustand versetzt wird, und dass somit die Beschleunigung der Herzschläge auf reflectorischem Wege zu Stande kommt.

Welche Nervenfasern sind nun hierbei in centripetaler und welche in centrifugaler Richtung bei der Leitung der durch die Lungenaufblasung gesetzten Erregung betheiligt?

§. 7. Die Beschleunigung der Herzschläge kommt bei unserm Versuche so zu Stande, dass durch Reizung sensibler Nervenfasern der Lunge die schon bestehende Erregung des cerebralen Centrums der Hemmungsnerven des Herzens herabgesetzt und somit der Tonus der Hemmungsfasern bis zu einem gewissen Grade aufgehoben wird.

Die sensiblen Fasern, welche beim Aufblasen der Lunge in Erregung gebracht werden könnten, sind erstens und vor allem die der Lunge, ferner die der Brustwand und des Zwerchfells, endlich die des Herzens und seiner nächsten Umgebungen. Von den letztern können wir absehen, nachdem oben bewiesen wurde, dass weder der erhöhte Druck auf das Herz, noch die

veränderte Strömung und Spannung des Blutes im Herzen, noch die etwaige Zerrung seiner Nerven durch Lageveränderung das uns hier beschäftigende Phänomen wesentlich bedingt. Ebensowenig sind die sensiblen Nerven der Brustwand und des Zwerchfells für das Zustandekommen der Beschleunigung der Herzschläge unentbehrlich, weil wir diese Beschleunigung auch auftreten sahen, wenn die Lunge bei weit klaffendem Thorax in mässigem Grade aufgeblasen wurde, wobei weder das Zwerchfell verdrängt, noch die Brustwand verschoben werden konnte. Eine Mitbetheiligung dieser Nerven will ich nicht bestreiten, denn dazu wäre nöthig, alle sensiblen Fasern der Lunge zu zerstören, ohne die Herznerven irgendwie zu verletzen. Bliebe dann die Beschleunigung der Herzschläge beim Aufblasen der Lunge vollständig aus, so wäre allerdings der Beweis geliefert, dass die sensiblen Nerven der Brustwand und des Zwerchfells bei jener Reflexbeschleunigung auch nicht in untergeordneter Weise betheiligt sind.

Es bleiben uns daher nur die sensiblen Fasern der Lunge als die wesentlich betheiligten übrig. Auch liegt auf der Hand, dass diese durch das Aufblasen der Lunge bei weitem am stärksten erregt werden müssen. Somit sind als die centripetalen Bahnen jener Erregung, welche eine reflectorische Beschleunigung der Herzschläge herbeiführt, die sensiblen Nerven der Lunge nachgewiesen.

Es bleibt uns übrig, die Frage nach den centrifugalen Bahnen zu beantworten. Diese Bahnen können gegeben sein durch excitomotorische Herznervenfasern, welche entweder im Vago-sympathicus oder in den übrigen sympathischen Herznerven verlaufen könnten. Sie könnten aber auch gegeben sein in den bekannten Hemmungsfasern des Herzens, welche der Vagus enthält. Erstenfalls würde es sich also um eine wirkliche Erregung excitomotorischer, letztenfalls dagegen um eine Herabsetzung der schon bestehenden Erregung der Hemmungsfasern handeln.

Man wird mir beistimmen, wenn ich mich für letztere Alternative entscheide, ohne übrigens die erstere mit voller Bestimmtheit ausschliessen zu können. Folgendes sind meine Gründe.

Nachdem sicher ist, dass die Durchschneidung der Hemmungsfasern des Herzens beim Hunde meist ganz enorme Steigerung der Pulsfrequenz herbeiführt, ist es durchaus das Einfachere, alle geringeren Steigerungen, welche bei unversehrten Hemmungsnerven in Folge gewisser Eingriffe eintreten, auf eine Minderung des Tonus dieser Nerven zurückzuführen, statt eine der Wirkung der Hemmungsnerven entgegengesetzte Wirkung excitomotorischer Herznerven hierbei anzunehmen. Nur eine Steigerung der Pulsfrequenz über diejenige hinaus, welche nach der Lähmung der Hemmungsfasern eintritt, könnte uns zwingen, die Erregung excitomotorischer Fasern anzunehmen. Eine solche aber konnte ich bei der Aufblasung der Lunge nicht beobachten. Denn, wenn ich unmittelbar nach dem Versuche die Nervi vagi durchschnitt, trat immer eine, wenn auch in einzelnen Fällen nur wenig höhere Pulsfrequenz hervor, als während der Aufblasung. Die Betheiligung excitomotorischer Herznerven lässt sich freilich denen gegenüber, welche dieselbe trotz alledem annehmen wollen, nicht streng widerlegen, denn alle möglichen Controlversuche gestatten Einwendungen.

Wie von v. Bezold und von Keuchel unter Bidder's Leitung gezeigt worden ist, lähmt Atropin die Hemmungsfasern des Herzens, während es die sensiblen Fasern nicht wesentlich alterirt. Ich habe daher einen Hund, dessen Herzschläge sich beim Aufblasen der Lunge stark beschleunigten, mit Atropin vergiftet, und dann die Aufblasung wiederholt. Es erfolgte keine weitere Beschleunigung der Herzschläge. Hierbei konnte also die Erregung der unversehrten sensiblen Nervenfasern der Lunge noch auf die Medulla oblongata und reflectorisch auf excitomotorische Herznerven wirken, während die Hemmungsfasern des Herzens gelähmt waren. Aber zweierlei kann man trotzdem zu Gunsten der Erregung excitomotorischer Fasern einwenden, wenn auch beide Einwände wenig Wahrscheinlichkeit für sich haben.

Erstens nämlich kann man sagen: Bei der grossen, in Folge der Lähmung der Hemmungsfasern schon bestehenden Pulsfrequenz sei eine weitere Steigerung derselben überhaupt nicht möglich. Dies lässt sich nicht, wie oben ein ähnlicher Einwand, widerlegen, weil wir die Pulsfrequenz nach Atropin-Vergiftung

durch künstliche Reizung des Nervus vagus nicht wieder herabsetzen können. Zweitens könnte man einwenden, das Atropin lähme auch die excitomotorischen Nervenfasern des Herzens, welcher Einwand erst wieder durch eine in ihren Ergebnissen jedenfalls problematische Untersuchung über die bisher ganz unbekannten excitomotorischen Nerven des Hundeherzens widerlegt werden könnte.

Kurzum, die ohnedies sehr hohe Wahrscheinlichkeit, dass die Beschleunigung der Herzschläge beim Aufblasen der Lunge auf einer reflectorischen Herabsetzung des Tonus der Hemmungsfasern des Herzens beruht, lässt sich durch derartige Versuche im besten Falle nur noch etwas erhöhen, ohne dass die entgegengesetzte Annahme unbedingt widerlegt werden könnte.

Die durch die Aufblasung gereizten sensiblen Nervenfasern der Lunge stehen zum cerebralen Centrum der Hemmungsfasern des Herzens in ähnlicher Beziehung wie die Fasern des Nervus depressor zum cerebralen Centrum der vasomotorischen Nerven. Dieses wie jenes Centrum befindet sich in einer stetigen Erregung, welche durch Reizung der genannten Nervenfasern herabgesetzt wird. Es sind diese Fasern also als Hemmungsnerven für jene Centren anzusehen.

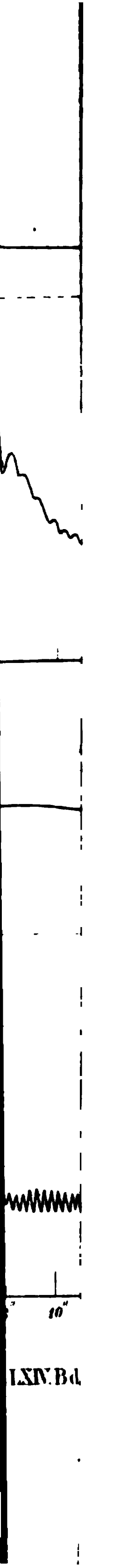
§. 8. Schlussbemerkungen.

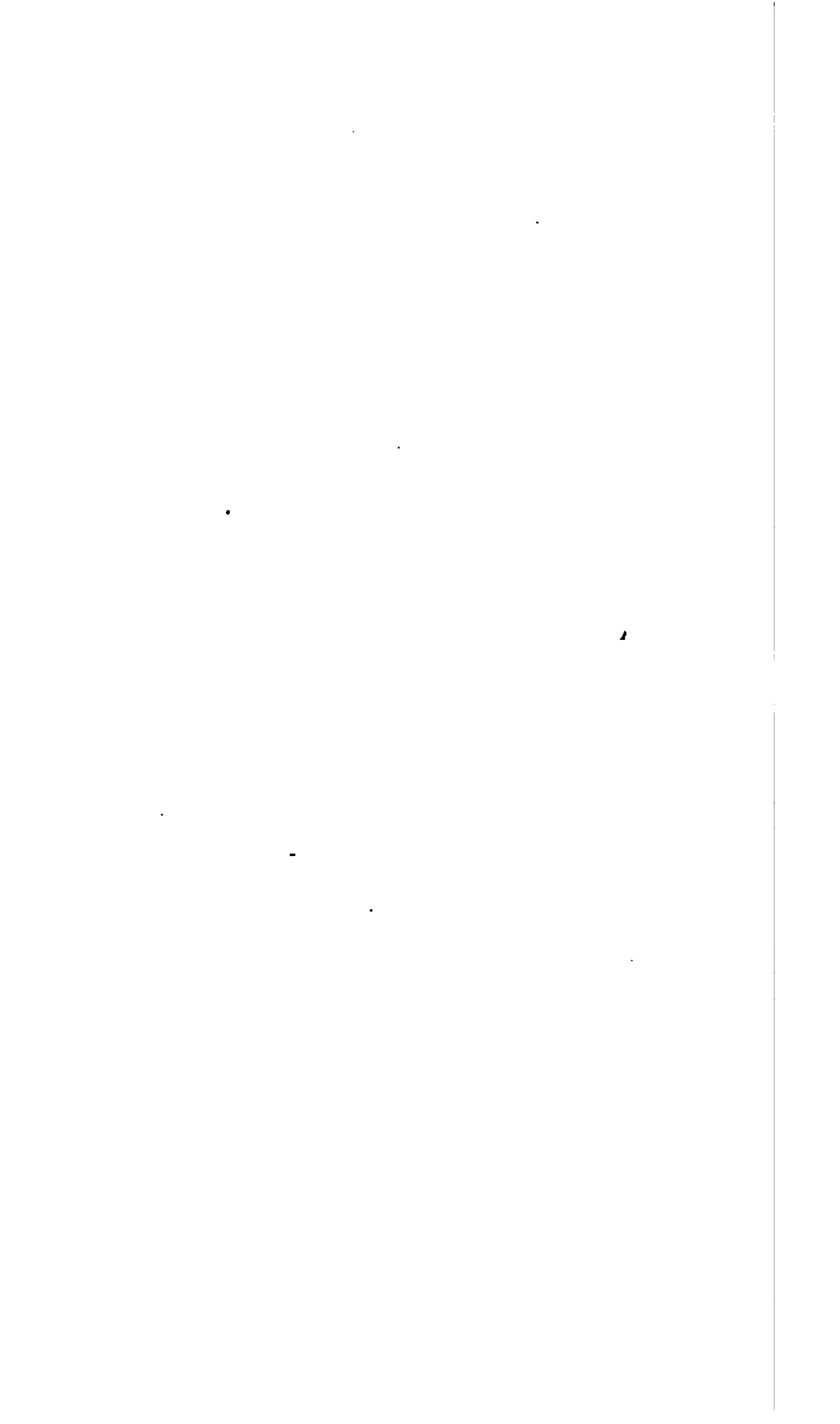
Die im Obigen mitgetheilten Ergebnisse sind durch Versuche an mehr als dreissig Hunden im Laufe mehrerer Jahre gewonnen. Fast an jedem Hunde, in dessen Trachea zum Zwecke irgend welchen andern Versuches eine Canüle eingeführt und dessen Arteria carotis oder cruralis zugleich mit einem Manometer in Verbindung war, habe ich beiläufig einige Aufblasungen der Lunge gemacht. Ich erwähne dies lediglich deshalb, weil es Hunde gibt, an denen das Experiment nicht gelingt. Sollte es der Zufall wollen, dass Einem gerade mehrere solche Fälle vorkämen, so könnte er leicht an der Richtigkeit meiner Angaben zweifeln. Es wird dann genügen, die Versuche zu häufen, um zu erfahren, dass das Misslingen des Versuches nur die Ausnahme ist. Worin ein solches Misslingen seinen Grund hat, kann ich

nur theilweise angeben. Es gibt Hunde, bei welchen d
blasung der Lunge keine Hemmung der Inspirationsbew
herbeigeführt wird; solche Thiere eignen sich auch
unsern Versuchen. Eine spätere Mittheilung wird dies
insofern dort erörtert werden soll, warum die refle
Beschleunigung der Herzschläge beim Aufblasen der L
eintreten kann, wenn zugleich die Inspirationsbewegung
ist. Aber ausserdem kommen in seltenen Fällen Thiere
zwar das Athmen sofort einstellen, wenn man ihre
aufbläst, aber doch dabei keinen häufigeren oder sog
selteneren Herzschlag zeigen. Letzteres ist zwar, wie sc
erwähnt wurde und bereits in Einbrodt's Versuch
zeigte, die Regel, wenn man übermässig stark aufbläst,
es aber bei manchen Thieren auch schon bei so mässig
blasungen eintritt, wie sie in unsern Versuchen gewählt
weiss ich bis jetzt nicht genügend zu erklären. Da d
eben selten und bis jetzt nicht willkürlich herbeizuführ
so war es nicht möglich, die Sache erschöpfend zu unte

Schliesslich sei noch kurz darauf hingewiesen, wa
überhaupt den ganzen Gegenstand so ausführlich erörte
Die periodischen Veränderungen, welche die Schlagfo
Herzens bei grössern Thieren und beim Menschen ze
welche den Perioden der Athmung entsprechen, haben b
keine vollständig genügende Erklärung gefunden. In ei
folgenden Mittheilungen wird eine Erklärung derselben v
und dabei auf die oben erörterten Thatsachen Bezug gen
werden. Die Ausdehnung der Lunge nämlich vermehrt di
schläge, gleichviel ob diese Ausdehnung durch Aufblas
durch die spontane Inspirationsbewegung herbeigeführt
Daher beschleunigt im Allgemeinen jede Inspiration, w
nicht zu seicht ist, in mehr oder minder deutlicher W
Herzschläge. Ehe diese Thatsache aber mit genügender
erörtert werden kann, ist zunächst ein weiteres Phäno
besprechen, welches den Gegenstand der nächsten Mitt
bilden soll, nämlich die rhythmische Innervatio
Hemmungsfasern des Herzens bei ungeänd
Volumen der Lunge.

LXIV. B


10''
LXIV. Bd.



Erklärung der Abbildungen.

In jeder der drei Doppelcurven zeigt die obere Curve die durch das Aufblasen der Lunge hervorgebrachte Spannung der Lungenluft, welche durch ein Quecksilbermanometer verzeichnet wurde; die Punkte a, a^1, a^2 ... entsprechen also dem Beginne der Aufblasung, die Punkte b, b^1, b^2 ... dem Momente, wo die eingeblasene Luft wieder aus der Lunge entweicht. Die untere Curve jeder Doppelcurve gibt den Blutdruck an, welcher auf Curve I und II ebenfalls durch ein Quecksilbermanometer, auf Curve III durch ein Federmanometer registrirt wurde. Auf der Abscisse ist die Zeit in Doppelsecunden markirt. Diese Abscisse ist in Curve I um 20 Mm., in Curve II um 50 Mm. über der eigentlichen, dem Nullpunkte entsprechenden Abscisse angebracht. Um den wirklichen, einem beliebigen Punkte der Curve entsprechenden Blutdruck zu finden, hat man an der Anfangsordinate die jenem Punkte (der Höhe nach) entsprechende Millimeterzahl abzulesen und diese Zahl zu verdoppeln; ebenso ist die jeweilige Spannung der Lungenluft zu finden.

Curve I. Von einem 5·5 Kgrm. schweren Hunde, welchem $^1/_5$ Gran *Morphi acet.* in die Vena crural. eingespritzt worden war. Es sind zwei kurze und eine länger dauernde Aufblasung verzeichnet, letztere nicht bis zu ihrem Ende.

Curve II. Von einem mittelgrossen, mit $^1/_7$ Gran *Morph. muriat.* vergifteten Hunde.

Curve III. Von einem ziemlich grossen Hunde, welcher mit *Tinct. Opii* vergiftet war. Das Thier machte, wie die Curve zeigt, während der Aufblasung abortive Athembewegungen.

Ein Beitrag zur Lehre von den Malpighi'schen Körperchen der menschlichen Niere.

Von Dr. **Victor Seng** aus Wien.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt von Dr. E. Klein in der Sitzung am 13. April 1871.)

Remak[1] hat die Ansicht ausgesprochen, dass das Malpighi'sche Körperchen dadurch entsteht, dass die gegen das blinde Ende eines gewundenen Harncanälchens vordringenden Gefässe dasselbe vor sich herdrängen und einstülpen.

Nach dieser Ansicht müsste somit der Gefässknäuel, der den Glomerulus eines Malpighi'schen Körperchens repräsentirt, ebenso wie die Kapsel des Malpighi'schen Körperchens mit einem Epithelium bedeckt sein. Es müsste ferner der Glomerulus mit einer das Epithel tragenden *Membrana propria* bedeckt sein, welche, eben als der eingestülpte Theil des blinden Endes des Harncanälchens, die directe Fortsetzung der *Membrana propria* der Kapsel vorstellt.

Die Angaben der Autoren sind nun in vieler Beziehung nicht darnach angethan, diese Ansichten zu bekräftigen. Der ganze Streit dreht sich hauptsächlich darum, ob der Glomerulus nackt in den von der Kapsel des Malpighi'schen Körperchens umschlossenen Raum hineinragt, oder ob er mit einer Epithellage bedeckt ist, die als directe Fortsetzung des Kapselepithels zu betrachten ist.

Bowman[2] machte die Entdeckung des Zusammenhanges zwischen der nach ihm benannten Kapsel, die den Glomerulus

---

[1] Froriep's Neue Notizen 1845, S. 308.
[2] Phil. Transact. for the year 1842, P. 1, p. 57.

umhüllt, und dem Harncanälchen, sprach sich jedoch dahin aus, dass der Glomerulus ganz nackt in dem Hohlraume der Kapsel gelegen sei.

C. Isaacs[1] hat behauptet, dass die Malpighi'schen Knäuel mit Epithel bedeckt seien. Ihm pflichtete Moleschott[2] bei, der am Gefässknäuel beim Menschen eine zusammenhängende Schichte dicht aneinander gedrängter Zellen beschrieb, während an der Innenfläche der Kapsel dieselben keine ganze continuirliche Schicht bilden sollten.

Roth[3] machte durch Silberimprägnation das Epithel auf der Innenfläche der Kapsel sichtbar, während er es dahingestellt sein lässt, ob eine Lage kleiner auf dem Glomerulus aufsitzender „Elemente“ einen epithelialen Charakter besitzen.

Steudener[4] sah den Glomerulus nur mit einer zarten Hülle bekleidet, an der kein Epithel zu erkennen sei. An der Innenfläche der Kapsel hingegen findet sich nach demselben ein zartes, helles Pflasterepithel, das im Halstheil in das körnige Epithel des gewundenen Harncanälchens übergeht.

Nach Henle[5] ragen die Gefässe des Glomerulus nackt in die Bowman'sche Kapsel herein. Die Kapsel trägt bis an den Stiel des Glomerulus ein einfaches, sehr flaches Pflasterepithel, in welches das körnige Pflasterepithel des betreffenden Harncanälchens plötzlich übergeht.

Chrzonczczewsky[6] wies an gefrorenen Nieren an der Innenfläche der Kapsel ein continuirliches, feines und helles Pflasterepithel nach; ebenso am Glomerulus, der mit einer aus

---

[1] Anatomie microscopique des reins. Arch. gén. 1858.

[2] Ein histochemischer und ein histologischer Beitrag zur Kenntniss der Nieren. In den Untersuchungen zur Naturlehre des Menschen 1861, Bd. 8, S. 213.

[3] Untersuchungen über die Drüsensubstanz der Niere. (Bern 1864.) S. 31.

[4] Nonnulla de penitiore renum structura et physiologica et pathologica. Halis Saxonum. 1864. Diss. inaug.

[5] Handbuch der systematischen Anatomie des Menschen. 2. Bd. II. Abthlg., S. 294. Braunschweig 1864.

[6] Zur Anatomie der Niere. Medicin. Centralblatt 1864, S. 113.

kubischen Zellen mit abgerundeten Ecken bestehenden Epithellage umgeben ist. Die Zellen dieser sind grösser als jene, besitzen ein körniges Aussehen und tragen bis zu einem gewissen Grade den allgemeinen Charakter des Epitheliums der gewundenen Harncanälchen an sich, sind jedoch durchaus verschieden vom Kapselepithel.

Schweigger-Seidel[1] beschreibt beim Fötus ganz bestimmt sowohl an der Innenfläche der Bowman'schen Kapsel als an der Oberfläche des fertigen Glomerulus eine epitheliale Zellenschicht.

Duncan[2] sah beim Frosche an der Innenfläche der Kapsel Epithel, während das Vorhandensein eines solchen am Glomerulus zweifelhaft blieb.

Kölliker[3] schliesst sich der Ansicht an, dass auch der Glomerulus einen vollständigen Überzug eines dickeren, einfachen Pflasterepithels besitze.

Ludwig[4] endlich spricht ebenfalls von dem Vorhandensein einer Lage nicht scharf abgegrenzter mit kugeligen Kernen versehener Zellen, welche den Glomerulus überzieht.

Ich habe mir vielfach Mühe gegeben, an den Malpighi'schen Körperchen der Niere vom Schwein, Kaninchen, Hund und erwachsenen Menschen, sowohl an nicht injicirten in Chromsäure erhärteten Nieren, als auch an mit Silber injicirten Nieren das Epithel der Kapsel, sowie ein mit diesem im Zusammenhange stehendes Epithel des Glomerulus und eine diesen deckende *Membrana propria* darzustellen; ich habe mich wohl von der Gegenwart eines platten Epitheliums der Kapsel überzeugt, sowie auch davon, dass der Glomerulus nicht nackt in den Kapselraum hineinsieht, und dass er mit rundlichen kernhältigen Zellen bedeckt ist. Ob aber diese letzteren ein Continuum unter einander und mit dem Epithel der Kapsel darstellen, vermochte ich an den Nieren erwachsener Individuen nicht zu entscheiden.

---

[1] Die Nieren des Menschen und der Säugethiere. Halle 1865, S. 8.

[2] Über die Malpighi'schen Knäuel in der Froschniere. Sitzgsber. d. Wiener Akad. Bd. LII, 2. Abthlg. S. 6. 1867.

[3] Handbuch der Gewebelehre des Menschen. Leipzig 1867. §. 182.

[4] Stricker's Gewebelehre 1870. 3. Lieferung, Capit. XXI, S. 494.

Ich wendete mich nun an Nieren von menschlichen Fötusen, die zwischen dem vierten und neunten Altersmonate standen, und da überzeugte ich mich mit voller Bestimmtheit von der Gegenwart sowohl einer den Glomerulus deckenden *Membrana propria*, als auch eines die Innenfläche der Kapsel und den Glomerulus bedeckenden continuirlichen Epitheliums.

Ich legte die möglichst frische Niere, nachdem sie der Länge nach in zwei Theile getheilt ward, in eine weingelbe Lösung von doppeltchromsaurem Kali ein, liess sie daselbst 3—6 Tage liegen und vervollkommte, wenn nöthig, die Härtung durch Einlegen in eine hellweingelbe Lösung von Chromsäure. Hierauf fertigte ich dünne Schnitte an, die entweder in Glycerin oder, nachdem sie entwässert, in Damarfirniss eingedeckt wurden.

An so präparirten Nieren ist das Epithel sowohl der Kapseln als auch der Glomeruli, der gewundenen Harncanälchen und der Sammelröhren ganz schön erhalten.

An Malpighi'schen Körperchen von der Niere eines 3- bis 5monatlichen Fötus sehe ich nun in sehr schöner Weise, dass sich die oblonge Kerne enthaltende *Propria* der Kapsel continuirlich über das Blutgefässconvolut des Glomerulus fortsetzt; ich kann selbst an 5monatlichen Fötusen Malpighi'sche Körperchen auffinden, an denen die den vorwuchernden Glomerulus überziehende *Propria* eben gegen die Kapsel eingestülpt wird.

In gleicher Weise zeigten mir Schnitte von der Niere eines 6monatlichen Fötus, selbst eines Neugebornen, Malpighi'sche Körperchen, an denen die Innenfläche der Kapsel, wie auch die *Propria* des Glomerulus ein ausgezeichnetes, continuirliches Epithelium besitzen, dessen Zellen kubisch sind, aus feingranulirtem Protoplasma bestehen und je einen rundlichen, scharf begrenzten Kern im Inneren bergen. An der Stelle, wo die Kapsel des Malpighi'schen Körperchens auf den Glomerulus übertritt, sind die Epithelzellen am höchsten.

Im Allgemeinen lässt sich aussagen, dass, je älter der Fötus, desto häufiger Malpighi'sche Körperchen anzutreffen sind, bei denen das Epithel der Kapsel schon abgeflacht ist; und zwar am meisten in der Gegend, wo das gewundene Harncanälchen abgeht, während das kubische Epithelium des Glomerulus noch lange Zeit hinaus als solches angetroffen wird.

Ich erlaube mir noch auf die in beiliegender Tafel gegebenen Abbildungen zu verweisen, da dieselben mehr veranschaulichen, als selbst die ausführlichste Beschreibung.

Schliesslich spreche ich Herrn Dr. E. Klein für seine freundliche Unterstützung meinen Dank aus.

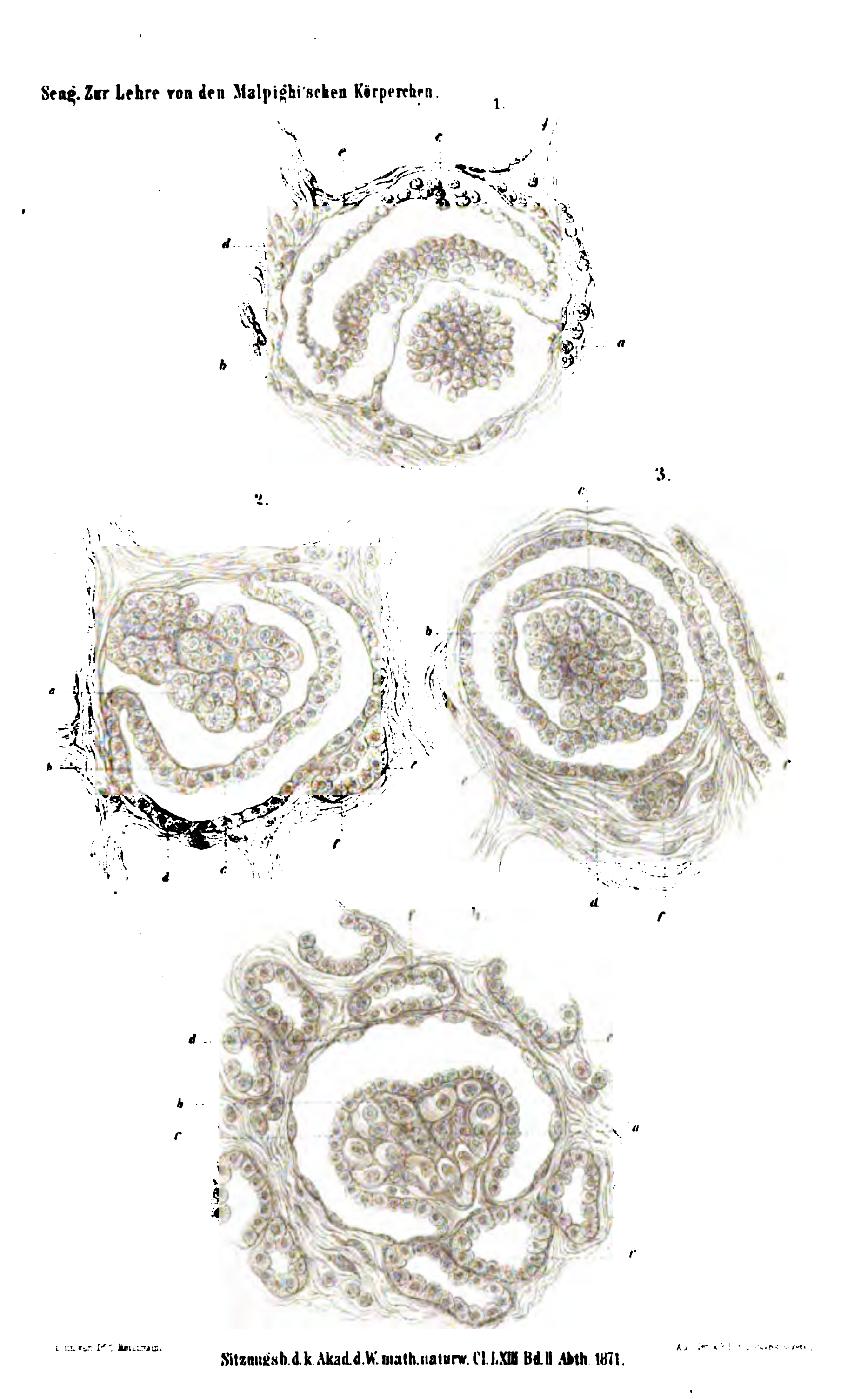
Erklärung der Abbildungen.

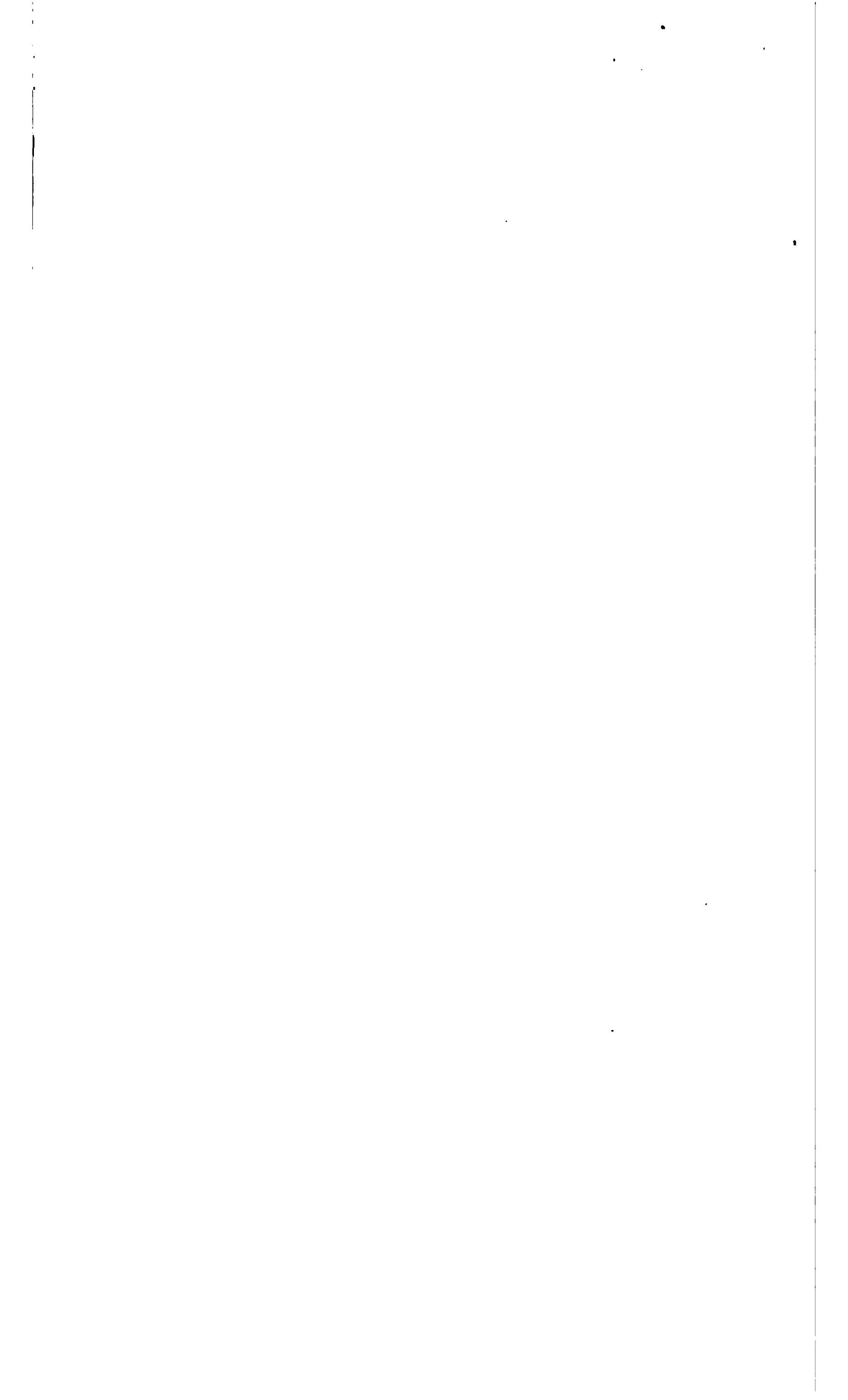
Fig. 1. Schnittpräparat von der Niere eines 3monatlichen Fötus. *a.* Glomerulus. *b. Membrana propria* (ihre Einstülpung durch den wuchernden Glomerulus). *c.* Zellen der *Propria* des Glomerulus. *d.* Zellen der Kapsel. *e. Membrana propria* der Kapsel.

Fig. 2. Schnittpräparat von der Niere eines 6monatlichen Fötus. Schnitt der Axe des Glomerulus entsprechend geführt. *a.* Glomerulus. *b. Membrana propria* desselben. *c.* Epithel desselben. *d.* Epithel der Kapsel. *e. Membrana propria* derselben. *f.* Querdurchschnitt des abgehenden Harncanälchens.

Fig. 3. Dieselbe Niere. Schnitt senkrecht auf die Axe des Glomerulus. *a.* Glomerulus. *b. Membrana propria* desselben. *c.* Epithel desselben. *d.* Epithel der Kapsel. *e. Membrana propria* derselben. *f.* gewundene Harncanälchen.

Fig. 4. Von der Niere eines Neugebornen. *a.* Glomerulus. *b. Membrana propria* desselben. *c.* Epithel desselben. *d.* abgeflachtes Epithel der Kapsel. *e. Membrana propria* derselben. *f.* querdurchschnittene Harncanälchen.


1.
c
e
f
d
a
b
2.
a
b
c
d
e
f
3.
c
b
a
e
f
d
f
4.
d
e
b
a
c
e



Über den Stickstoffgehalt des Fleisches.

Von Dr. **J. Nowak.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juli 1871.)

Die Forschungen auf dem Gebiete der Ernährungsphysiologie beschäftigen sich in lebhafter Weise mit Fragen, welche sich auf den Umsatz, auf die Verwerthung und Ausscheidung des vom thierischen Organismus als Nahrung eingenommenen Stickstoffes beziehen. Dies findet die Erklärung in der wohl begründeten Voraussicht, dass die Gesetze, welche aus der Lösung dieser Fragen hervorgehen werden, von überaus hoher Bedeutung sind. Je wichtiger aber ein Schluss ist, um so unumstösslicher und schwankungsfreier müssen zahlreich gesammelte Grundlagen beschaffen sein, auf welche das Gesetz sich stützt, um so sicherer und unantastbarer muss die Folgenrichtigkeit zwischen dem Ausgangspunkte und dem resultirenden Schlusse erprobt, und um so schlagender müssen alle widersprechenden Erfahrungen und alle dagegen erhobenen Einwände auf Beobachtungsfehler zurückgeführt werden.

Bei den Versuchen, welche die Forscher auf dem Gebiete des Stoffwechsels in Rücksicht auf die Frage des Stickstoffumsatzes im thierischen Organismus vornahmen, wurde eine ausschliessliche Fleischnahrung dem Versuchsthiere gereicht. Mit Zuhilfenahme einer Mittelzahl, zu deren Annahme man auf Grundlage mehrfach vorgenommener Fleischanalysen berechtigt zu sein glaubte, wurde die Stickstoffmenge des verabreichten Futterfleisches berechnet, es wurde weiter die Menge der Stickstoffausscheidung durch den Darm- und Nierentract bestimmt, es wurde das Versuchsthier täglich gewogen, die gefundenen Schwankungen, welche das Körpergewicht des Thieres zeigte, auf einen Fleischansatz oder Fleischverlust des Thieres umgerechnet, wobei der procentarische Stickstoffgehalt dieses erworbenen oder zugesetzten Fleisches des zum Versuch benützten

Thierindividuums gleichwerthig mit jener oben erwähnten Mittelzahl angenommen wurde, und es wurde aus diesen Untersuchungsergebnissen ein auf die vollständige oder nicht vollständige Ausscheidung des eingenommenen Stickstoffes durch Harn und Koth Bezug nehmender Schluss gezogen.

Fragt man nach den Analysen, aus denen jene den Fleischstickstoff bezeichnende Mittelzahl resultirt, fragt man, ob das Ziehen dieser Zahl, die Basis für diese Untersuchungen, in denselben seine Berechtigung findet, fragt man, ob der Stickstoffgehalt des Fleisches einer Thiergattung identificirt werden könne, mit dem einer anderen, fragt man, ob diese für die Physiologie so wichtige Analyse einer strengeren Controle unterzogen wurde, so ergibt sich folgende Antwort:

Stickstoffanalysen des Fleisches sind von mehrfacher Seite publicirt worden, so von W. Mayer, Playfair und Boeckmann, Grouven, Will, Voit, Schenk. Die Ziffern, welche aus diesen Bestimmungen resultiren, variiren sehr bedeutend. Während W. Mayer mit 12·05% die Stickstoffgrösse des trockenen Fleisches bezeichnet, geben Playfair und Boeckmann 15·03% im Mittel hiefür an.

Die sich hiedurch ergebende Differenz ist 3%, das ist ein Fünftel der Zahl Boeckmann's, und ein Viertel der Zahl W. Mayer's. Ist wohl bei solch grossen Schwankungen eine Mittelzahl von Werth?

Weiter hat die Mehrzahl der genannten Forscher sich nur mit dem Stickstoffgehalt einer Thiergattung beschäftigt, einen Vergleich der Stickstoffmengen in den verschiedenen Muskelpartien eines Individuums, dann im Fleische verschiedener Individuen einer Thiergattung, und endlich der verschiedenen Thiergattungen untereinander ausser Acht gelassen. Nur Schenk hat das Fleisch verschiedener Thiere auf Stickstoff analysirt, um zu sehen, ob denn eine Umrechnung in jenem oben erwähnten Sinne zulässig sei oder nicht. Auch Schenk's Analysen zeigen bedeutende Differenzen im Resultate, auch in dem Falle, wenn er Fleisch aus verschiedenen Stellen eines Muskelstückes zur Verbrennung nahm, denn selbst dann ergaben sich Schwankungen von 1·4% an Stickstoff im trockenen Fleisch des Hundes. Mit Recht findet Schenk diese erhebliche Differenz auffallend,

und sucht als deren wesentlichste Ursache die grössere oder geringere Quantität des Bindegewebes und der elastischen Fasern in den Muskeln nachzuweisen.

Das regelmässige Auftreten von bedeutenden Differenzen bei analytischen, fehlerfrei geführten Arbeiten berechtigt wohl stets den Zweifel, ob die benützte Bestimmungsmethode eine genaue sei. Die Frage aber, welche Bestimmungsmethode zur Ermittlung des Stickstoffgehaltes des Fleisches zulässig sei, hat man von allen Seiten unerörtert gelassen, man hat, wie man aus den betreffenden Originalarbeiten ersieht, nur nach der Will-Varrentrapp'schen Methode als der bequemsten gearbeitet, ohne deren Ausreichen für die Fleischanalyse geprüft oder auf anderem Wege controlirt zu haben. Ja, man hat sogar, ohne experimentelle Belege anzuführen, ausgesprochen, „dass für die Stickstoffbestimmung des Fleisches die Will-Varrentrap'sche Methode bezüglich ihrer Verlässlichkeit der Dumaischen nicht nachstehe". Ich entschloss mich daher, vorerst die Methode, nach welcher der Stickstoffgehalt des Fleisches ermittelt werden kann, auf ihre Genauigkeit und Richtigkeit zu prüfen, um hierauf nach der hiezu als am geeignetsten gefundenen Art eine grössere Zahl von Fleischsorten zu analysiren.

Vor Beginn der Stickstoffbestimmungen des Fleisches hielt ich es für zweckmässig, mich durch einige Vorversuche über eine Frage zu unterrichten, deren Ergebniss auf die Ausführung der eigentlichen Arbeit von Einfluss sein musste. Ich analysirte chemisch rein darstellbare Körper des Thierorganismus, um zu sehen, ob bei diesen die Wahl der Methode eine gleichgiltige sei, und wenn nicht, wie gross die Fehlergrenze der Analyse innerhalb derselben Methode und in Vergleich bei verschiedenen Methoden sei. Je nach dem Ausfall dieser Untersuchungen beschloss ich die eigentlichen Fleischanalysen durchzuführen.

Zu diesem Zwecke analysirte ich Harnsäure und Kynurensäure. Da ich bei diesen Bestimmungen in ganz derselben Weise vorging, wie bei den späteren, unten angeführten Fleischanalysen, so glaube ich, dass es hier am Platze sei, detaillirter die Ausführung meiner Verbrennungen und der hiezu nothwendigen Vorarbeiten zu beschreiben.

Die Stickstoffbestimmung durch Überführung in Ammoniak.

Ich begann damit, mir für die Will-Varrentrapp'sche Analyse genau nach dem Äquivalent gestellte Natron- und Schwefelsäuretitreflüssigkeiten darzustellen. Den Gehalt meiner Normalnatronflüssigkeit prüfte ich gewichtsanalytisch durch Bestimmung als schwefelsaures Natron und fand, dass jeder CC. meiner Natronlösung 0·03099 Grm. NaO enthalte, den Gehalt an Schwefelsäure in der zweiten Titreflüssigkeit stellte ich durch Bestimmung als schwefelsauren Kalk fest, und fand 0·03997 Grm. an SO_3 per CC. Einen Theil dieser meiner Titreflüssigkeiten, welche, wie man aus den erhaltenen Zahlen ersieht, genau nach dem Äquivalent gestellt waren, benützte ich zur Darstellung von $^1/_{10}$ Normallösungen. Je gleiche Masstheile sowohl der Normal- als der Zehntelnormallösungen des Säure- und Alkalititres neutralisirten sich haarscharf.

Bei jeder Natronkalkverbrennung beschickte ich den Varrentrapp-Will'schen Kugelapparat mit 10 CC. der Normalschwefelsäure, um nach stattgefundener Verbrennung den durch das sich hiebei entwickelte Ammoniak nicht neutralisirten Säurerest mit der Normalnatronlösung auf den neutralen Punkt zu bringen. Fand hiebei ein Überschreiten der Neutralisationsgrenze statt, so suchte ich durch Zurücktitriren mit der $^1/_{10}$ Normalnatronlösung dieselbe genau festzustellen. Weiter unterliess ich niemals mich durch Prüfung mittelst sehr empfindlicher rother und blauer Lackmuspapiere von der genauen Neutralisation zu überzeugen, da bei einer noch so langsam geleiteten Verbrennung von Fleisch mit Natronkalk die Will-Varrentrapp'sche Vorlage durch die entstandenen Destillationsproducte sich derart färbt, dass das Betupfen eines sehr empfindlichen Lackmuspapieres das Erkennen der Neutralisationsgrenze viel deutlicher anzeigt, als die Beobachtung der Endreaction in der missfärbigen Flüssigkeit. Auch will ich hier bemerken, dass zu allen Analysen dieselben Messapparate benützt wurden und dieselben unter einander sehr genau übereinstimmten.

Bei der Ausführung der Verbrennung mittelst Natronkalk sorgte ich für einen regelmässigen Gang der Gasentwicklung, liess die Röhre stets volle drei Stunden glühen, steigerte namentlich in der zweiten Hälfte der Verbrennungsdauer die Hitze so hoch als möglich, und endete nicht früher, bis der Natronkalk Spuren von Schmelzung zeigte, und an seiner Oberfläche keine schwärzlichen Kohlenpartikelchen mehr sondern nur eine graulich-weisse Farbe wahrnehmbar war.

Auf diese Weise erhielt ich durch die Natronkalkverbrennung für Harnsäure folgende Resultate:

1. Analyse.

0·232 Grm. zur Verbrennung genommener Substanz entwickelten 5·52 CC. Normalschwefelsäure neutralisirendes Ammoniak = 77·28 Mgr. N.

100 Theile Substanz enthalten also 33·31 N.

2. Analyse.

0·212 Grm. zur Verbrennung genommener Substanz entwickelten 5·04 CC. Normalsäure neutralisirendes Ammoniak = 70·56 Mgr. N.

100 Theile Substanz enthalten also 33·29 N.

Für kynurensauren Baryt:

1. Analyse.

0·477 zur Verbrennung genommener Substanz entwickelten 1·1 CC. Normalschwefelsäure neutralisirendes Ammoniak = 15·4 Mg. N.

100 Theile ergaben also 3·228 Theile N.

2. Analyse.

0·369 Grm. zur Verbrennung genommener Substanz entwickelten 1 CC. Normalschwefelsäure neutralisirendes Ammoniak = 14 Mgr. N.

100 Theile ergaben also 3·79 Theile N.

Die Bestimmung des Stickstoffes in elementarer Form.

Um den Stickstoff der Substanz in elementarer Form abzuscheiden, ging ich in nachfolgender, im Laboratorium des Herrn Prof. Schneider gebräuchlicher Weise vor.

Eine circa 100 Centimeter lange, gut gereinigte Verbrennungsröhre, deren rückwärtiges Ende in ein dünnes, 8 C. langes Röhrchen so ausgezogen wurde, dass es später mittelst des Gaslöthrohres leicht abzuschmelzen war, wurde zuerst mit einem lockeren, vorher ausgeglühten Asbestpfropf welcher an die sich rückwärts verengende, konische Stelle der Röhre zu liegen kam, beschickt. Darauf eine 20 C. lange Schichte trockenes doppelkohlensaures Natron, dann wieder ein frisch geglühter Asbestpfropf, welchem eine 5 C. betragende Lage von reinem Kupferoxyd und hierauf das höchst innige Gemenge der gewogenen Substanz mit Kupferoxyd, welches circa 45 C. der Röhre einnahm, folgte. Sodann kam das zum Nachspülen verwendete und eine kleine Schichte reines Kupferoxyd. Nun im Wasserstoffstrome frisch reducirte Kupferdrehspäne von ungefähr 15 C. Länge, hierauf neuerdings eine 6 C. lange Lage reines Kupferoxyd, sodann ein dritter Asbestpfropf.

Schliesslich wurde die Röhre mittelst eines feinporigen, ausgesuchten Korkstöpsels mit der Gasentbindungsröhre lufdicht verbunden. Das bei der Verbrennung sich bildende Gas liess ich in eine vorher kalibrirte, in Millimeter getheilte Eudiometerröhre treten, deren Lichtung 2 C. im Durchmesser betrug. Bevor ich diese zu ein Drittel mit sehr starker Kalilauge, zu zwei Drittel mit Quecksilber gefüllte Absorptionsröhre umstürzte, um sie in die Quecksilberwanne zu tauchen, habe ich stets angelegentlichst gesorgt, jede adhärirende Luftblase aus ihr zu entfernen.

Die Analyse führte ich in folgender Weise durch. Die auf obige Art beschickte Verbrennungsröhre fügte ich in den Gasofen so ein, dass das

rückwärtige, dünn ausgezogene Ende, ausserhalb des Ofens frei ragend, leicht mittelst eines vulkanisirten Kautschukröhrchens mit einem Apparat verbunden werden konnte, welcher zum Waschen und Trocknen von aus einem Gasometer zugeführter Kohlensäure hergerichtet war. Ich liess jedesmal (gewöhnlich im Verlaufe des Nachmittags) drei Stunden lang Kohlensäure in einem ziemlich raschen und continuirlichen Strome durch das Verbrennungsrohr streichen, liess sodann den ganzen Apparat über Nacht stehen, wobei selbstverständlich die vorn eingefügte Entbindungsröhre unter Quecksilber der pneumatischen Wanne tauchte, und leitete am nächsten Tage früh neuerdings Kohlensäure durch. Diese Massregel ist, wie aus den unten angegebenen Belegen ersichtlich wird, eine sehr nothwendige, um die atmosphärische Luft bis auf einen für die Stickstoffberechnung verschwindenden Rest zu verdrängen.

Durch dieses mehrstündige und wiederholte Kohlensäuredurchleiten wird aber auch zweitens der Vortheil erzielt, dass das rückwärts befindliche Natronsalz ein vollständig doppelt kohlensaures und daher zu seiner späteren Verwendung sehr ausgiebiges wird.

Darauf schmolz ich an der verengten Stelle die Verbrennungsröhre, möglichst nahe nach vorn, zu, erhitzte das rückwärtige Ende der Röhre (etwa 6 C.) zum Glühen, so dass beiläufig der dritte Theil des vorhandenen doppeltkohlensauren Natron zerlegt wurde und erhitzte, nachdem ich mich schliesslich zur weiteren Vorsicht durch einen mit Kalilauge gefüllten über die Gasentbindungsröhre gestürzten Probecylinder überzeugt hatte, dass alle kommenden, längere Zeit gesammelten Gasblasen vollständig absorbirt wurden, den vordersten Theil der Röhre zum Glühen, langsam mit der Verbrennung nach rückwärts schreitend.

Ich leitete die Analyse so, dass eine Gasblase regelmässig nach der andern folgte, und dass beiläufig nach $2^1/_2$—3 Stunden ich so weit war, um den Rest des doppeltkohlensauren Salzes zur Verdrängung des in der Röhre noch vorhandenen Gases erhitzen zu können. Hierauf zog ich die Absorptionsröhre über die Gasentwicklungsröhre weg und beliess sie mehrere Stunden im Quecksilber der pneumatischen Wanne. Nach mehreren Stunden brachte ich die Absorptionsröhre in ein grosses hohes, unten mit etwas Quecksilber, oben mit Wasser gefülltes Glasgefäss und liess den Eudiometer in diesem Gefäss, durch das Quecksilber abgesperrt, neuerdings stundenlang, gewöhnlich über Nacht stehen. Nachdem ich hierauf die Röhre in die Höhe des Wassers hob und nachdem die Diffusion zwischen der Röhren- und Cylinderflüssigkeit vollendet war, nahm ich mit der hiezu erforderlichen Vorsicht die Ablesung des Gasvolums des Barometer- und Thermometerstandes vor, und berechnete die so erhaltenen Resultate in der üblichen Weise mit Zugrundelegung der in den Bunsenschen Tabellen enthaltenen Zahlen.

Die auf diese Art analysirte Harnsäure ergab:

1. Analyse.

0·200 Grm. Substanz gaben 56·58 CC. N. bei 10·2° C. Temp. und 7493 Br. = 66·62078 Mg. N.

100 Theile der Substanz enthalten 33·31 N.

2. Analyse.

0·127 Grm. Substanz gaben 36·12 CC. N. bei 10·2° C. Temp. und 749·4 Br. = 42·53 Mg. N.

100 Theile der Substanz enthalten 33·332 N.

Für kynurensauren Baryt erhielt ich folgende Resultate:

1. Analyse.

0·453 Grm. Substanz gaben 20·6 CC. N. bei 9° C., 756·3 Br. gleich 24·61329 Mg. N.

100 Theile der Substanz enthalten 5·433 Theile N.

2. Analyse.

0·565·5 Substanz gaben 26 CC. N. bei 12·2° C. und 756·5 Br. = 30·6489 Mg. N.

100 Theile der Substanz enthalten 5419 Theile N.

Wie man aus dem Vergleich der durch die beiden Methoden gewonnenen Zahlen ersieht, liefert die Will-Varrentrappische Verbrennung für Harnsäure sehr übereinstimmende Resultate mit der Kupferoxydverbrennung.

Die Zahlen aller vier Analysen der Harnsäure stimmen auch mit den aus der auf Grundlage vielfacher Erfahrungen wohl bekannten chemischen Formel theoretisch berechneten Stickstoffmenge (33·333%) auf das wünschenswertheste genau, bis in die dritte Decimale der Procentzahl, überein. Ganz anders verhält es sich bei dem kynurensauren Baryt. Bei dieser Substanz erhalten wir durch die Natronkalkverbrennung weit geringere Zahlen als durch die Kupferoxydanalyse. Der Grund dieser erheblichen Differenz kann, da die zur Analyse verwendete Substanz vollkommen rein war, nur in der Will-Varrentrapp'schen Bestimmungsart gelegen sein. Denn die Zahlen zweier solcher Analysen gehen sehr weit auseinander, während die vollkommenste Übereinstimmung bei den durch die Kupferoxydverbrennung erhaltenen Ergebnissen wahrnehmbar ist. Es vermag demnach die Natronkalkverbrennung nicht allen Stickstoff der Kynurensäure als Ammoniak zur Ausscheidung zu bringen.

Diese Erfahrung, dass zur Analyse mancher stickstoffhältiger Körper, obwohl sie kein Oxyd des Stickstoffes enthalten, die Will-Varrentrapp'sche Bestimmungsweise nicht anwendbar ist, hat zuerst Strecker bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die chemischen Beziehungen zwischen Guanin, Xanthin, Theobromin, Caffeïn und Kreatinin gemacht. Über die Analyse des oxalsauren Guanidins und der Doppelverbindung des salzsauren Guanidins mit Chlorplatin sprechend, sagt Strecker: „Die Bestimmung des Stickstoffes in der Form von Ammoniak durch Verbrennen mit Natronkalk liess sich bei diesen Salzen nicht ausführen, da ich auf diese Weise 9·6%, 10·9% und 12·2% (statt 15·8%) fand. Es ist dies das erste mir bekannte Beispiel (abgesehen von jenen Körpern, welche Oxyde des Stickstoffes enthalten), wobei die sonst so treffliche Methode von Will und Varrentrapp nicht anwendbar ist."

Das Verhalten der Kynurensäure stimmt demnach ganz mit dem des Guanidins in dieser Beziehung überein.

Ermittlung der Fehlergrenze bei der nach obiger Art modificirten Kupferoxydverbrennung.

Nach diesen Ergebnissen wollte ich mich weiter überzeugen, ob durch die beschriebene Modification bei der Ausführung der Kupferoxydverbrennung das hiebei angestrebte Ziel, die atmosphärische Luft bis auf einen für die Stickstoffbestimmung werthlosen Rest zu reduciren und dadurch die der ursprünglichen Duma'schen Methode anhaftende hervorragendste Fehlerquelle zu eliminiren, erreicht wird.

Ich machte zu diesem Zwecke zwei Versuche. Ich beschickte einmal eine Verbrennungsröhre in ganz derselben Weise, wie ich das bei der Beschreibung der vorigen Kupferoxydanalysen mitgetheilt habe, ohne jedoch eine Substanz eingetragen zu haben, leitete drei Stunden Kohlensäure durch den Apparat, schmolz hierauf sogleich, ohne wie gewöhnlich den Apparat die Nacht hindurch in der Kohlensäureatmosphäre zu belassen, die Röhre ab, und schritt dann zum Glühen, nachdem ich zuvor über die Gasentwicklungsröhre ein eigens zu diesem Versuche angefertigtes Auffangsgefäss gesetzt hatte. Eine etwa 12 C. lange, nur 4 Mm. weite, am oberen Ende zugeschmolzene Glasröhre wurde an eine weitere und auch längere Röhre angeschmolzen; dieses Gefäss wurde wie gewöhnlich mit Kalilauge und Quecksilber gefüllt, um als Absorptionsgefäss zu dienen.

Nach dreistündigem Glühen wurde der Rest des doppeltkohlensauren Natrons zur Verdrängung des in der Röhre noch vorhandenen Gases erhitzt, bis das ganze Salz in einfach kohlensaures verwandelt war. Die während zweier solcher Verbrennungen in dem Absorptionsgefäss angesammelte Gasmenge liess sich wegen der geringen Lumenweite der oberen Röhre scharf markiren und das Volum dieses Gases durch das Gewicht, welches genau bis zur Marke gefülltes Quecksilber einnahm, bestimmen und dadurch auf CC. überführen. Das bei zwei derartigen Verbrennungen gefundene Gasvolum entsprach in Summe 0·69 CC.

Bei einem zweiten Versuche führte ich zwei derartige Verbrennungen ohne Substanz mit der Modification aus, dass ich nach dem dreistündigen Kohlensäuredurchleiten die Verbrennungsröhre über Nacht in der Kohlensäureatmosphäre stehen und am anderen Morgen neuerdings Kohlensäure durch den Apparat strömen liess, und dann die Verbrennung in gewohnter Weise zu Ende führte. Diesmal betrug das in der engen Röhre angesammelte Gasvolum nur 0·105 für zwei Verbrennungen. Diese zwei Versuche lehren deutlich, von welchem Vortheil es ist, wenn man durch langes Stehenlassen der mit Kohlensäure gefüllten Röhre die Möglichkeit schafft, dass die Kohlensäure in alle Zwischenräume der Füllungsmasse diffundirend, aller Orten die atmosphärische Luft bis auf den letzten Rest verdrängen kann. Bezieht man diese Zahl auf Stickstoff so erhält man 0·1314516 Mg. Stickstoff für zwei Analysen; 0·0657258 Mg. für eine.

Wenden wir diese Zahl auf eine der gemachten Analysen an. Bei der ersten Verbrennung der Harnsäure erhielt ich 66·62078 Mg. Stickstoff, was für 200 Mg. Substanz einem Procentgehalt von 33·31039 gleichkommt. Corrigiren wir, dem obigen Versuche zu Folge die Zahl 66·62078 durch Abzug von 0·0657258 (da ja diese Zahl das Gewicht der zurückgebliebenen, bei der Analyse aber als Stickstoff mitgerechneten atmosphärischen Luft anzeigt), so ergibt sich die wahre Stickstoffmenge von 66·5550542 und daraus eine Procentzahl von 33·2775. Es fällt also der durch die zurückgebliebene Luftmenge bedingte Fehler in die zweite Decimale der Procentzahl, welche er um weniger als 4 irritirt.

Nach diesen Vorversuchen schritt ich zu den Fleischanalysen.

Die Wasserbestimmung des Fleisches.

Das Trocknen des Fleisches nahm ich bei allen Fleischsorten in gleicher Weise vor und glaube, dass es zweckmässig ist, hier die Weise, wie ich dabei vorging, zu erwähnen.

Beim Pferde- und Rindfleisch liess ich möglichst magere, möglichst fett-bindegewebe- und sehnenfreie Muskelpartien eines frisch geschlachteten Thiers vom Metzger holen, schnitt sofort aus der Mitte einer solchen Fleischpartie ein Stück heraus, da der seit Tödtung des Thieres durch Verdunstung stattgefundene Wasserverlust der peripherischen Partien

möglicher Weise von erheblichem Eintrag bei der Bestimmung des Wassergehaltes im Fleische sein konnte, reinigte dieses Stückchen sehr rasch und so gut als möglich von Fett-, Sehnen- und Bindegewebe, zertheilte dasselbe in zwei Theile, gab je ein Stückchen in vorher genau gewogene Glasschalen und zerschnitt in den Glasschalen selbst das Fleisch zu kleinen Stückchen, um keinen Fleischwasserverlust zu erleiden. Hierauf wurden die so gefüllten Schalen rasch gewogen, in einem Wasserbade durch 48 Stunden getrocknet, und dann, wenn durch zwei auf einander gefolgte Wägungen bestätigt ward, dass kein weiterer Gewichtsverlust eintrete, fein gepulvert unter Schwefelsäure bis zur Verarbeitung aufbewahrt.

Die beiden Theile eines solchen Fleischstückchens stimmten jedesmal bezüglich ihres Gehaltes an trockener Substanz bis wenigstens auf die zweite Decimale der Procentzahl überein, und schon dadurch hatte ich die Zuversicht gewonnen, die Substanz vollkommen trocken erhalten zu haben. Bei diesen Arbeiten habe ich auch wiederholt die Bestimmung des Wassergehaltes in der Weise vorgenommen, dass ich die beim Trocknen des Fleisches sich verflüchtigenden Producte auf ihren Gehalt an stickstoffhältiger Substanz prüfen konnte. Wiewohl es möglich war, in der condensirten Flüssigkeit die Anwesenheit von Ammoniak nachzuweisen, so war doch die Menge desselben so gering, dass ein bis zwei Tropfen der $^1/_{10}$ Normalschwefelsäure hinreichend waren, um die Neutralisation herbeizuführen, so dass ich die Gewissheit hatte, dass beim Trocknen des Fleisches kein erheblicher Stickstoffverlust eingetreten ist.

Beim Hundefleisch ging ich bezüglich des Trocknens in gleicher Art vor, nur war es mir hier gegönnt, Fleisch zu verwenden, das aus dem so eben getödteten noch warmen Thiere stammte. Beim Menschenfleisch musste ich mich dagegen begnügen, die Fleischsubstanz 24stündigen Leichen zu entnehmen.

Das bei den nachfolgenden Analysen mit I bezeichnete Pferd war ein junges dreijähriges Thier, Pferd II und III waren schon älter, weniger kräftig. Die verschiedenen Portionen des Rindfleisches entstammten durchgehends gut genährten Ochsen. Der zu diesen Versuchen getödtete Hund war sehr kräftig, noch nicht ganz ein Jahr alt.

Die mit I bezeichnete menschliche Leiche gehörte einem jungen, wohlgenährten, die mit II bezeichnete dagegen einem alten, sehr stark abgemagerten Individuum an.

In nachfolgender Tabelle sind in übersichtlicher Weise die beim Trocknen des Fleisches erhaltenen Zahlen und der entsprechende Procentgehalt an trockener Fleischsubstanz zusammengestellt.

Thiergattung und Individuum	Muskelpartie	Gewicht des nativ. Fleisches in Grammen	Daraus erhaltene trockene Substanz in Grammen	Es enthalten 100 Theile feuchten Fleisches trock. Substanz
Pferd I	*a)*	15·318 12·112	3·9775 3·144·5	25·967 25·961
	b)	14·344 13·692	3·720·6 3·55	25·939 25·928
Pferd II	*a)*	15·318 14·124	4·054 3·736·5	26·465 26·455
	b)	20·557 14·0165	5·222 3·56	25·402 25·4
Pferd III	*a)*	13·123 13·022	3·4135 2·396	26·012 26·083
Hund I	*a)*	8·781 8·722	2·4981 2·4815	28·451 28·452
	b)	6·052 12·142	1·765 3·351	27·51 27·452
	c)	45·29 73·27	1·188 1·923	26·233 26·245
Rind I	*a)*	6·381 5·946	1·589 1·486·5	24·902 25·0
	b)	13·230 20·050	3·0723 4·6636	23·222 23·26
Rind II	*a)*	4·815 5·111	1·104 1·171	22·928 22·91
	b)	6·065 3·211	1·372 0·731	22·62 22·77
Rind III	*a)*	8·018 4·731	2·0133 1·1922	25·11 25·20

Thiergattung und Individuum	Muskelpartie	Gewicht des nativ. Fleisches in Grammen	Daraus erhaltene trockene Substanz in Grammen	Es enthalten 100 Theile feuchten Fleisches trock. Substanz
Mensch I	a)	5·066	1·206	25·806
		10·9	2·594	23·8
	b)	7·879	1·948	24·724
		5·24	1·294	24·701
	c)	5·496	1·289	23·471
		9·46	2·221	23·482
Mensch II	a)	6·472	1·3225	20·434
		5·3135	1·0863	20·444

Natronkalkverbrennungen des Fleisches.

Indem ich in nachfolgender Tabelle die Resultate meiner nach Will-Varrentrapp ausgeführten Fleischanalysen verzeichne, bemerke ich sogleich im vorhinein, dass ich eine grössere Zahl derartiger Verbrennungen auszuführen Anstand nahm, indem ich schon durch die ersten mit gleichen Fleischsorten vorgenommenen Kupferanalysen belehrt wurde, dass die Will-Varrentrapp'sche Bestimmungsart für die Stickstoffermittlung des Fleisches unzureichend ist. Dagegen glaube ich, dass die hier angeführten Analysen zahlreich genug sind, um in Vergleich mit den Kupferoxydverbrennungen des Fleisches gestellt werden zu können, um die Differenz in den Resultaten ersichtlich zu machen und die oben gestellte Behauptung zu begründen.

Nr.	Thiergattung und Thierindividuum	Muskelpartie	Gehalt an trock. Substanz in %	Zur Verbr. genommene Subst. in Grammen	Daraus erhalt. Stickstoffmenge in Milligr.	Es enthalten also an Stickst. 100 Th.	
						d. feucht. Substanz	d. trock. Substanz
1.	Pferd I	a)	25·967	0·325	41·82	12·87	3·33
2.				0·378	47·1	12·46	3·23
3.		b)	25·928	0·5085	57·35	11·28	2·92
4.				0·4112	49·01	11·92	3·09
5.	Pferd IV	a)	25·376	—	—	—	3·27
6.							3·16
7.	Pferd V	a)	24·584	—	—	—	3·34
8.							3·27
9.	Pferd VI	a)	24·630	—	—	—	3·34
10.							3·37
11.	Hund I	a)	28·451	0·4772	55·927	11·72	3·33
12.				0·413	47·3	11·38	3·23
13.		b)	27·510	0·430	50·847	11·82	3·25
14.				0·350	42·924	12·26	3·37
15.		c)	26·233	0·377	52·478	13·92	3·65
16.				0·357	47·989	13·44	3·52
17.	Rind I	a)	25·00	0·500	60·5	12·1	3·02
18.				0·500	62·00	12·4	3·10
19.	Mensch II	a)	20·444	0·401	52·53	13·1	2·68

Kupferoxydverbrennungen des Fleisches.

Nr.	Thiergattung u. Thierindividuum	Muskelpartie	Gehalt an trockener Substanz	Zur Verbr. genommene Substanz in Grammen	Daraus erhaltene Stickstoffmenge				Daraus ber. Stickstoffmenge in Milligrammen	Es enthalten also 100 Theile	
					in CC.	bei der beob. Temp.	und dem beob. Barometerstande	bei 0° u. 760 Mm. Barometerstand		der trock. Substanz an Stickstoff	der feucht. Subst. an Stickstoff
1.	Pferd I	a)	25·967	0·5195	63·7	10°2	750·4	59·89	75·14	14·46	3·755
2.				0·476	58·7	9·9	746·2	54·93	68·90	14·48	3·76
3.				0·2602	31·6	8·12	750·3	29·97	37·60	14·45	3·752
4.		b)	25·928	0·540	64·07	10·4	752·6	60·35	75·72	14·03	3·637
5.				0·269	31·9	10·6	752·9	30·04	37·68	14·00	3·631
6.				0·3805	44·97	9·7	754·1	42·47	53·28	14·01	3·635
7.	Pferd II	a)	26·465	0·4995	62·53	8·9	758·5	59·77	74·98	15·01	3·972
8.				0·3662	45·79	7·8	751·6	43·78	54·93	15·00	3·969
9.		b)	25·402	0·255	31·97	7·2	748·6	30·37	38·09	14·94	3·785
10.				0·503	63·82	10·1	747·9	59·74	74·94	14·92	3·780
11.	Pferd III	a)	26·012	0·449	51·66	11·6	750·2	48·25	60·53	13·51	3·514
12.				0·312	35·94	12·7	752·9	33·52	42·06	13·48	3·506
13.	Pferd IV	a)	25·376	—	—	—	—	—	—	—	3·74
14.	Pferd V	a)	24·584	—	—	—	—	—	—	—	4·02
15.	Pferd VI	a)	24·630			—	—	—	—	—	3·93

16.	Hund I	a)	28·451	0·500	53·16	12·2	748·7	49·42	62·00	12·40	3·528
17.				0·312	32·77	10	756·4	31·08	38·90	12·41	3·556
18.		b)	27·510	0·474	53·27	12·4	755·7	49·95	62·66	13·22	3·637
19.				0·3322	36·92	8·8	754·8	35·11	44·05	13·26	3·648
20.				0·3234	36·56	13·1	755·4	34·16	42·85	13·25	3·640
21.		c)	26·233	0·2625	36·73	11·4	751·1	34·38	43·13	16·43	4·310
22.				0·310	42·8	7·6	747·8	40·55	50·87	16·41	4·304
23.	Mensch I	a)	23·806	0·300	38·0	9·2	756·8	36·18	45·39	15·13	3·601
24.				0·3095	39·55	8·8	751·3	37·44	46·97	15·15	3·601
25.		b)	24·724	0·4738	59·84	12·9	745·1	55·19	69·23	14·61	3·612
26.				0·322	39·8	11·1	749·8	37·53	47·08	14·61	3·612
27.		c)	23·471	0·296	38·15	9·7	745·1	35·68	44·76	10·09	3·776
28.				0·273	37·41	8·6	746·4	35·22	44·19	16·02	3·802
29.	Mensch II	b)	20·444	0·348	47·87	14·2	746	43·94	55·12	15·84	3·238
30.				0·294	40·33	12	742·4	37·21	46·68	15·88	3·246
31.	Rind I	a)	25·00	0·2788	35·94	12	753·4	33·65	42·22	15·10	3·775
32.				0·3112	39·99	10·1	746·2	37·49	47·03	15·11	3·777
33.		b)	23·222	0·3619	47·79	9·8	745	44·72	56·10	15·50	3·599
34.				0·1516	20·00	12·2	756·5	18·75	23·52	15·52	3·604
35.	Rind II	a)	22·91	0·208	26·24	9·0	756·2	25·0	31·36	15·05	3·448
36.				0·1836	23·5	11·4	751·1	22·0	27·60	15·03	3·443
37.		b)	22·77	0·2413	32·2	8·8	754·8	30·62	38·41	15·92	3·628
38.	Rind III	a)	25·20	0·3345	42·06	8·0	752	40·0	50·18	15·00	6·780

Ergebnisse.

Mit Rücksicht auf die obigen Tabellen muss ich zuerst bemerken, dass die Natronkalkverbrennungen 5 und 6, 7 und 8, 9 und 10 sowie die ihnen bezüglich der gleichen Fleischsorte entsprechenden Kupferoxydanalysen 13, 14, 15 schon vor längerer Zeit von Herrn Dr. Toldt im Laboratorium des Herrn Prof. Schneider ausgeführt worden sind, und ich ermächtigt wurde, dieselben in die Publication meiner Analysen einzuschalten.

Vergleicht man nun die nach der Will-Varrentrapp'schen Methode erzielten Bestimmungsresultate, mit denen, welche die Verbrennung der gleichen Fleischproben mit Kupferoxyd ergibt, so ersieht man, dass in allen Fällen eine Differenz im Resultate zum Vorschein kommt, dass die Will-Varrentrapp'sche Methode stets weniger Stickstoff liefert als die Verbrennung mit Kupferoxyd. Der Grund dieser Differenz kann aber nur in der Natronkalkverbrennung liegen, welche nicht im Stande ist, allen Stickstoff des Fleisches in Ammoniak zu verwandeln. Dafür spricht das analoge Beispiel bei der Kynurensäure, bei welcher im Gegensatze zur Harnsäure die Natronkalkverbrennung stets weniger Stickstoff liefert; damit hängt es wohl zusammen, dass mehrere noch so sorgfältig ausgeführte Will-Varrentrapp'sche Analysen derselben Fleischprobe so erhebliche und so verschiedenartige Differenzen in der gefundenen Stickstoffmenge zeigen, wogegen die gleichen Betrachtungen auf die mit Kupferoxyd vorgenommenen Verbrennungen bezogen, für deren Tadellosigkeit sprechen. So variirt manche Fleischprobe durch Will-Varrentrapp bestimmt um 0·8% im Resultat, während bei der Kupferoxydbestimmung Schwankungen von höchstens 0·04% für getrocknetes Fleisch vorkommen.

Die Differenz, welche der Vergleich der durch die beiden Methoden gewonnenen Stickstoffgrössen gleicher Fleischsorten zeigt, ist eine sehr erhebliche. Am geringsten ist sie beim Hundefleisch *a)*, wo sie 0·7—0·8% für trockene und 0·2—0·21% für feuchte Substanz beträgt. Aber selbst diese geringste Differenz ist verhältnissmässig bedeutend, wenn man die Zahlen dieser Fleischanalyse auf einen concreten Fall anwendet. Wird z. B.

ein Versuchsthier täglich mit 2 Pfd. = 1000 Grammen Fleisch gefüttert, so muss man auf Grund der Will-Varrentrapp'schen Analyse des Hundefleisches *a)* annehmen, dass dem Thiere 33·3 Grammen Stickstoff mit der Nahrung zugeführt wurden, während in der That die Stickstoffmenge, wie die entsprechende Kupferoxydanalyse nachweist 35·28 Grammen beträgt. 2 Grammen Stickstoff, welche in diesem Falle 5·6 Grammen Fleisch repräsentiren, wären also auf diese Weise nicht mit in Rechnung gezogen worden.

In den meisten Fällen aber ist die Abweichung eine ungleich grössere. Sie beträgt fast durchgehends bei den analysirten Rindfleischsorten und bei vielen Pferdefleischpartien 2·7—3% für trockene Substanz. Wenden wir das obige Beispiel auf die Zahlen der Analyse des Pferdefleisches I. *b)* an. Nach der Natronkalkbestimmung müsste man in den als Futter verabreichten 1000 Grammen Fleisches 29·25 Gramm Stickstoff annehmen. Die Kupferoxydanalyse weist aber 36·37 Gramm Stickstoff darin nach. 7·11 Gramm, welche 196 Grammen Fleisch entsprechen, würden also bei der Berechnung nach den Resultaten der Natronkalkverbrennung unberücksichtigt bleiben.

Da nun bisher, so weit sich aus den betreffenden Originalabhandlungen ersehen lässt, die Stickstoffbestimmungen des Fleisches nur nach der Will-Varrentrapp'schen Methode vorgenommen wurden, und man auf Grund dieser Analysen eine Mittelzahl für den Stickstoffgehalt des Fleisches ziehen zu können glaubte, so ergibt sich, dass diese Zahl als viel zu klein angesehen werden muss.

Überhaupt berauben uns die den richtigen Ausdruck für die Stickstoffmenge im Fleisch gebenden Kupferoxydanalysen des Rechtes, eine Mittelzahl für die Stickstoffgrösse der Fleischsubstanz aufstellen zu können. Denn die Bestimmungen des Rindfleisches zeigen Schwankungen bis zu 1%, die des Pferde- und Menschenfleisches solche bis zu 1½%, und die Analysen des Hundefleisches lehren, dass sogar bei ein und demselben Thiere, je nach den verschiedenen Muskelpartien Abweichungen bis zu 1% auftreten können.

Die durch diese vergleichenden Analysen gewonnene Thatsache, dass die Natronkalkverbrennung zur Ermittlung des Stickstoffes im Fleisch und in der Kynurensäure ebenso wie im Guanidin unzureichend ist, dürfte wohl nicht blos für diese Körper constatirt bleiben, sondern auch bei der Stickstoffbestimmung noch mancher anderen organischen Substanzen zur Geltung gelangen.

Untersuchungen über die Winde der nördlichen Hemisphäre und ihre klimatologische Bedeutung. Zweiter Theil: Der Sommer.

Von Dr. **J. Hann.**

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juli 1871.)

Im ersten Theile dieser Abhandlung suchte ich die Aufgabe zu lösen, den Einfluss der vorherrschenden Windesrichtung über verschiedenen Theilen der Continente der nördlichen gemässigten Zone auf die klimatischen Verhältnisse während des Winters festzustellen. Durch die Berechnung der mittleren Werthe des Luftdruckes und der Temperatur für die Winde an den Ostseiten des alten und neuen Continentes konnte mit Evidenz der Nachweis geführt werden, welchen grossen Einfluss die relative Lage von Continent und Ocean auf die thermischen und barischen Windrosen hat, wie der Temperaturgegensatz von Festland und Meer sich in den verschiedenen Witterungssystemen der Ostküsten und Westküsten ausprägt. Die beiden grossen Festlandcomplexe der alten und neuen Welt stellten sich gewissermassen als klimatologische Individuen dar, welche ihr eigenes meteorologisches Regime haben.

Da nun der Wärmeunterschied von Land und Wasser beim Übergang vom Winter in den Sommer das Vorzeichen wechselt, d. h. in den entgegengesetzten umschlägt, so muss auch der klimatische Effect der Winde eine ausgeprägte jährliche Periode zeigen. Und hierin liegt die Nöthigung, die Berechnungen und Zusammenstellungen, welche für den Winter vorgenommen wurden, nun auch für den Sommer in gleicher Weise durchzuführen. Die nachfolgenden Tabellen und speciellen Nachweise enthalten in übersichtlicher und in detaillirter Weise das Resultat dieser Arbeit und zwar in einer Anordung ganz analog jener, welche im ersten Theile gewählt worden ist und die darum eine directe

Vergleichung ermöglicht. Man könnte noch eine Darlegung des Überganges von den Verhältnissen des Winters zu jenen des Sommers wünschen; es schien mir aber nicht nöthig, eine solche in der ausführlichen Weise zu geben, wie sie in den vorgelegten Tabellen dem fundamentalen Unterschiede der extremen Jahreszeiten gewidmet ist, da einerseits das Mittel dieser letzteren dem Mittel des Frühlings und Herbstes sehr nahe kommt, anderseits hierüber die schon für viele Stationen vorliegenden Mittelwerthe der einzelnen Monate vollkommen hinreichenden Aufschluss geben.

Als ich an die Bearbeitung des ersten Theiles dieser Untersuchung ging, galt es noch, Versuche zu machen, welche von den Stationen, für die mir Beobachtungsmateriale zur Berechnung vorlag, einer systematischen Darstellung sich einordnen lassen, welche von ihnen blos locale Typen repräsentiren, und darum dem Verständniss der Vorgänge im grossen Ganzen weniger förderlich sind. Es galt auch noch die Berechtigung darzulegen, mit welcher einzelne Stationen als Repräsentanten für grössere Territorien hingestellt werden dürfen.

In dem vorliegenden zweiten Theile konnten dagegen die Berechnungen vereinfacht und das Materiale reducirt werden, ohne dass man, wie ich hoffen darf, einen Abgang fühlen wird. An der einen Stelle aber, wo er wirklich fühlbar ist, waren es gewichtige Motive, welche mich veranlassten, eine Lücke zu lassen. Ich beziehe mich hier auf die Stationen an der ostasiatischen Küste, Peking und Hakodati, für welche man in den Tabellen die thermischen und barischen Windrosen vermissen wird. Ein hochgeschätzter Fachgenosse, dem ich für diesen zweiten Theil manchen Beitrag und manche Belehrung verdanke, Hr. Dr. A. v. Wojeikoff in St. Petersburg, hat die Berechnung der unpublicirten Beobachtungen von Nicolajewsk an der Mündung des Amur übernommen, und da die Resultate derselben von grösserer Wichtigkeit zu werden versprechen, als die von Peking, wo sich schon im Winter die barischen und thermischen Mittel der Windrosen als ziemlich geringfügig herausstellten, und von Hakodati, wo nur vier Jahrgänge, für den Sommer ungenügend, vorliegen, so glaubte ich am besten die Berechnung der Windrosen für Ost-Asien Herrn Wojeikoff ganz zu überlassen.

Tabelle I.

Einfluss der Winde auf den Luftdruck im Sommer.

Abweichungen vom wahren Mittel in Millimetern.

Ort	Mittel	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW
Nordseegruppe.									
Oxford	755·1	+3·7	+2·5	+1·6	—1·3	—1·8	—0·9	+0·8	+2·9
Paris	755·8	+3·1	+3·5	+1·0	—2·4	—3·4	—2·1	—0·5	+1·2
Utrecht	760·4	+2·7	+2·6	+0·6	—1·1	—2·6	—2·0	0·0	+1·5
Emden	759·9	+3·2	+2·3	+0·6	—1·8	—5·1	—3·6	—1·6	+2·3
Elsfleth	759·4	+3·4	+1·9	+0·3	—1·6	—1·1	—2·0	—0·1	+2·0
Mittel-Europa.									
Karlsruhe	753·5	+1·7	+1·7	+0·7	—1·0	—1·0	—1·1	—0·6	+1·0
Mühlhausen	743·2	+2·3	+2·7	+1·1	—0·9	—3·1	—2·9	—0·9	+1·1
Arnstadt	736·9	+1·7	+2·1	+2·0	0·0	—2·3	—3·2	—1·2	+1·2
Salzwedel	759·0	+1·6	+1·4	+0·8	—0·7	—2·2	—1·9	—0·1	+1·4
Bernburg	753·1	+2·3	+2·2	—0·3	—1·4	—1·5	—2·8	—0·3	+1·3
Zechen	751·6	+1·4	+2·0	+0·6	—0·5	—0·5	—2·1	—0·6	0·0
Prag	743·9	+1·9	+1·5	+0·9	—0·1	—0·8	—1·2	—0·4	+0·9
Wien	743·5	+2·4	+2·3	—0·3	—0·3	—0·9	—0·8	—1·0	+0·6
Gratz	729·1	+1·6	+2·7	+1·1	—0·7	—2·0	—1·9	—0·9	+0·4
Süd-Europa.									
Lesina	758·9	+0·2	+1·4	—0·8	—0·8	—1·6	—2·7	+0·1	+0·9
Madrid	707·2	+1·4	+1·1	+1·3	+0·5	—0·3	—1·2	—1·2	—0·1
Ostseeländer.									
Kopenhagen	758·5	+1·6	+2·3	+1·5	+1·1	—0·3	—1·2	—1·8	0·0
Upsala	755·6	+0·9	+1·1	+1·1	—0·1	+0·2	—0·8	—1·6	—0·6
Danzig	760·8	+1·4	+1·4	+0·9	+0·2	—1·0	—1·7	—1·1	+0·4
Arys	748·2	+1·1	+1·8	+1·3	—0·3	—0·9	—1·7	—1·4	+0·2
Dorpat	754·9	+1·4	+3·5	+2·2	+0·5	—3·8	—3·2	—1·3	—0·4
Petersburg	758·8	—0·2	+1·5	+0·9	—0·1	—1·4	—0·8	—0·1	+0·1
Nördliches Russland.									
Kostroma	747·9	+1·2	—0·1	+0·7	+0·7	—3·0	—1·3	—1·4	+0·1
Archangel	751·7	+0·6	+1·7	+0·3	0·0	—1·6	—1·3	—1·6	+0·4
Südost-Europa.									
Kursk	740·9	+1·1	+0·4	+0·1	—1·0	—0·5	—2·4	—0·9	—0·2
Samara	749·3	+0·4	+0·7	—0·6	—1·6	—0·7	—1·0	—0·5	—1·5
Orenburg	749·1	+0·6	+1·2	+1·2	+0·3	—0·9	—1·5	—1·4	—0·7
West-Sibirien.									
Tobolsk	749·7	+1·1	+0·3	+0·5	—0·1	0·0	—1·8	+0·5	+0·1
Östliches Nordamerika.									
Providence	756·2	+1·7	+1·2	+0·8	+0·2	+0·3	—0·5	—1·1	—0·1
Toronto	744·0	+0·8	+0·2	+0·4	+1·4	+0·7	—2·6	—2·9	—0·6
Island.									
Reykiavig	753·1	—0·6	—1·1	—0·5	—0·9	—0·7	—0·6	+2·4	+2·6

Tabelle II.

Temperatur der Winde im Sommer.

Abweichungen vom wahren Mittel, Grade Celsius.

Ort	Mittel	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW
West- und Mittel-Europa.									
Dublin......	14·0	+0·6	—0·2	+0·6	+0·4	+0·4	+0·3	—0·4	—1·4
London	16·4	—0·8	—0·6	+1·4	+1·9	+0·7	+0·3	+0·2	—0·7
Oxford......	15·2	—0·4	—0·1	+0·8	+1·4	+0·3	0·0	—0·5	—0·7
Paris	18·0	+0·8	+1·6	+1·8	+1·7	+0·9	—0·5	—1·3	—0·5
Utrecht	17·8	—0·6	+0·9	+2·4	+3·3	+1·5	—0·3	—0·7	—1·5
Emden......	16·1	—0·9	+0·6	+1·5	+1·9	+0·6	—0·9	—1·1	—1·6
Elsfleth	16·2	0·0	+1·2	+1·5	+2·9	+1·2	—0·8	—1·2	—1·7
Hamburg ...	18·1	—0·5	+0·1	+1·3	+2·3	+0·9	+0·2	—1·6	—1·7
Mühlhausen .	16·9	—0·2	+0·8	+1·2	+1·8	+1·7	—0·2	—2·5	—2·2
Arnstadt....	17·2	—0·3	+0·1	+1·5	+1·6	+0·8	+0·2	—0·2	—0·6
Bernburg ...	17·3	+0·9	+1·5	+2·2	+3·2	+1·5	+0·1	—0·9	—0·5
Zechen	17·8	+0·1	+0·9	+1·0	+1·6	+1·7	—0·3	—1·2	—1·0
Leipzig	17·2	—0·4	+1·0	+2·5	+2·6	+1·4	—0·4	—1·1	—1·1
Prag	19·4	—0·4	+1·4	+1·7	+2·2	+1·4	+0·5	—0·5	—0·9
Wien	19·1	—1·1	+0·9	+4·5	+2·7	+3·3	+1·3	—0·9	—0·8
Süd-Europa.									
Gratz.......	19·2	—1·8	—1·5	+1·2	+2·8	+2·4	+1·9	—1·2	—2·2
Hoch-Obir ..	8·8	—3·6	—2·5	0·0	—0·1	—0·5	+1·8	+3·1	—0·1
Lesina	24·2	—0·2	—0·5	—0·3	+0·4	+0·8	+0·3	—0·2	—0·2
Madrid	23·5	—0·9	—2·3	+0·4	+1·1	+2·1	+3·2	+0·5	—1·7
Ostseeländer.									
Kopenhagen.	16·5	+0·3	+1·0	+1·6	+1·7	+1·0	—0·6	—1·6	—1·0
Stockholm ..	16·9	—2·0	—0·9	+0·1	+0·2	+1·6	+0·3	+0·2	—2·4
Upsala	16·4	—1·4	—0·9	+0·7	+1·0	+1·6	+1·1	+0·6	+0·3
Konitz	16·5	—0·8	+0·8	+0·9	+2·0	+1·4	—1·1	—1·2	—1·4
Bromberg ...	17·3	—2·1	—1·0	0·0	+2·6	+1·3	+0·1	—1·6	—1·8
Arys	16·7	—0·6	—0·2	+0·8	+1·5	+1·1	+0·6	—0·4	—0·8
Mitau.......	16·7	—0·4	+0·6	+1·9	+2·4	+1·5	+0·1	—1·0	—1·1
Riga	17·2	—1·0	+0·7	+3·0	+1·5	+0·8	—0·8	—0·2	—1·0
Fellin	14·7	—1·1	0·0	+0·2	+1·7	+3·2	0·0	—1·2	—2·5
Dorpat	16·4	—1·1	0·0	+1·5	+2·4	+1·9	+0·3	—1·2	—1·6
Petersburg ..	16·3	—3·0	—0·6	+0·2	+1·3	+1·6	+0·9	—0·2	—2·1
Nord- und Südost-Europa.									
Hammerfest .	9·9	—4·0	—2·9	—0·7	+1·6	+2·8	—0·5	—1·5	—2·8
Archangel ..	14·2	—2·4	—2·0	+0·2	+3·0	+2·2	+2·0	+0·4	—0·7
Wologda....	17·5	—2·5	—2·1	+1·2	+1·5	+2·8	+1·6	+1·2	—2·4
Kostroma ...	17·3	—2·5	+0·5	+0·1	+3·4	+0·9	+0·5	0·0	—1·4

Ort	Mittel	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW
Moskau	17·9	—1·0	+0·1	+0·8	+2·1	+1·0	—0·1	—0·7	—0·7
Kursk	17·1	—1·2	+0·2	+2·4	+2·1	+2·1	—0·2	—1·4	—1·7
Katherinoslav	21·3	—1·8	—0·1	+0·9	+1·4	+0·8	—0·8	—2·1	—1·0
Taganrog ...	21·1	—2·1	+0·1	+1·1	+1·5	+1·2	+0·1	—0·1	—1·6
Samara	20·3	—2·3	—0·6	+1·3	+3·5	+1·8	+0·4	0·0	—1·3
Orenburg ...	20·4	—0·9	+0·2	+2·2	+3·0	+0·9	—2·1	—1·0	—1·2
Astrachan ..	24·2	—0·7	—0·3	+0·2	+1·0	+1·2	+0·4	—0·5	—1·6
West-Sibirien.									
Tobolsk	17·4	—2·7	—0·5	+0·4	+2·6	+2·3	+1·2	—0·1	—2·4
Tara	19·0	—4·8	—0·4	—0·1	+2·2	+2·4	+1·5	—0·1	—1·1
Ischim	16·8	—1·2	—0·3	—0·3	+1·4	+1·8	+0·2	—0·7	—1·5
Ost-Sibirien.									
Irkutsk	16·1	—0·1	+2·4	+2·5	+1·8	+2·3	+3·0	—0·4	—1·7
Jakutsk.....	14·6	—2·2	+0·5	+1·1	+1·8	+1·6	+0·3	—1·1	—2·1
Östliches Nord-Amerika.									
Brunswick ..	18·4	—2·5	—3·4	—	—1·2	—	+0·5	+1·0	—2·1
Providence .	21·3	—1·8	—2·5	—1·1	+0·3	+0·5	+1·7	+1·6	—0·7
Toronto	18·2	—0·2	—0·5	—1·1	—1·1	+0·1	+1·2	+0·9	—0·3
Marietta	21·9	—2·5	—2·4	—1·4	+0·2	+1·5	+1·2	—1·1	—3·2
Island.									
Reykiavig...	11·9	—1·2	+0·5	+0·3	+0·2	+0·4	—0·9	—0·2	+1·1

Nachträge zum ersten Theil.

Temperatur der Winde im Winter.

Ort	Mittel	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW
Oxford......	+4·7	—3·2	—3·6	—1·4	+0·8	+1·6	+1·6	—0·3	—2·2
Elsfleth	+1·3	—2·3	—4·3	—4·9	—2·4	+1·6	+2·1	+2·1	+0·4
Leipzig	—0·1	—2·4	—5·1	—4·3	—1·8	+1·4	+2·3	+1·8	—0·7
Gratz.......	—0·9	—1·8	—2·9	—2·2	—1·0	+0·5	+3·0	+1·5	—0·3
Madrid......	+5·3	—1·5	—0·4	—0·3	+0·3	+1·0	+1·8	+1·4	+0·4
Glasov......	—13·4	—6·7	—8·6	—3·2	—0·5	+3·2	+4·6	+1·3	—3·6
Wologda....	—10·4	—5·9	—4·2	—3·4	+0·7	+3·1	+3·1	+0·6	—2·9
Pensa	— 8·5	—3·6	—3·4	—2·5	—1·4	+0·9	+3·2	+2·9	—1·1
Samara	—11·6	—1·2	—2·7	—2·1	+0·6	+1·6	+3·0	+0·5	—1·1
Lugan	— 8·5	—2·4	—2·9	+0·7	+5·1	+7·9	+6·5	+0·8	—0·8
Astrachan...	— 5·2	—1·5	—4·6	—1·3	+1·7	+5·2	+3·4	+0·9	—1·3
Ischim	—15·9	—6·2	—3·3	—2·0	+2·1	+2·9	+2·1	—0·2	—3·8
Brunswick ..	— 5·2	—0·9	—1·3	+...	+...	+...	+2·9	—0·6	—3·1
Marietta	+ 0·6	—2·2	—2·8	+1·8	+1·8	+4·9	+1·3	—1·9	—3·6

Tabelle III.
Häufigkeit der Winde im Winter. (Procente.)

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW
Nord-West-Europa.								
Reykiavig	16	19	20	10	7	21	2	4
Sandwick	7	5	5	22	15	18	19	9
Schottland	7	5	7	11	11	26	22	11
Dublin	4	3	4	13	19	36	14	6
Cork	4	8	5	17	8	27	9	23
London	7	11	9	9	5	26	13	20
Oxford	8	8	6	10	22	21	16	9
Norwegen.								
Hammerfest	5	4	6	34	29	7	6	9
Vardö	8	12	3	6	7	28	13	13
Villa	6	3	6	34	19	14	14	4
Christianssund	3	4	10	29	12	19	17	7
Skudesnes	9	7	12	18	20	14	11	9
Lister	5	11	22	12	8	12	16	14
Lindesnes	12	29	11	6	9	12	19	13
Schweden.								
Umea	19	14	11	7	14	14	9	12
Örebro	16	13	8	6	12	34	7	4
Upsala	24	13	6	4	14	18	10	12
Wennersborg	12	24	8	9	20	18	3	6
Karlshamm	14	8	10	10	11	14	21	12
Kopenhagen	6	8	11	14	14	22	15	10
Ostseeländer.								
Nord-Finnland	11	7	13	17	22	13	11	6
Süd-Finnland	11	10	9	9	17	22	10	10
Petersburg	5	10	8	13	19	26	16	2
Dorpat	7	7	9	11	10	19	25	12
Fellin	8	1	15	14	14	29	15	3
Mitau	5	5	9	13	17	21	19	11
Arys	4	6	18	12	15	18	20	7
Danzig	6	2	5	8	31	11	28	9
Nordseeküste.								
Paris	8	12	6	10	16	23	17	8
Utrecht	5	10	8	9	17	26	16	9
Emden	4	7	21	10	12	24	15	7
Elsfleth	5	6	11	11	16	22	22	6
Hamburg	3	8	9	18	5	27	15	14
Mittleres Europa.								
Mühlhausen	5	9	11	7	4	27	19	17
Bernburg	6	5	9	7	19	19	23	12
Zechen	9	9	7	7	25	18	17	9
Leipzig	3	9	9	10	15	31	13	10
Prag	9	6	9	8	18	23	17	10
Wien	9	2	7	17	4	4	28	28
Peissenberg	6	13	4	10	4	25	28	9
Gratz	6	9	11	16	18	18	10	12
Westliches Süd-Europa.								
Südwest-Europa	7	11	10	12	6	11	21	22

Häufigkeit der Winde im Sommer. (Procente.)

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW
Nord-West-Europa.								
Reykiavig	20	7	15	12	10	12	6	17
Sandwick	6	6	6	22	6	15	20	19
Schottland	7	7	11	9	11	22	21	12
Dublin	5	6	7	10	13	31	17	11
Cork	3	4	3	13	10	24	16	28
London	7	12	6	6	4	25	12	28
Oxford	11	5	4	6	20	25	19	10
Norwegen.								
Hammerfest	5	5	16	15	21	7	15	16
Vardö	13	14	8	23	11	6	4	22
Villa	15	14	7	10	13	20	12	9
Christianssund	14	25	6	7	3	10	24	11
Skudesnes	28	3	5	5	17	14	11	17
Lister	2	3	11	11	7	10	22	35
Lindesnes	2	10	13	5	7	9	30	25
Schweden.								
Umea	8	12	13	12	29	10	7	9
Örebro	8	10	11	8	15	38	5	5
Upsala	24	17	11	6	11	12	9	10
Wennersborg	6	19	4	9	29	25	5	3
Karlshamm	7	2	7	14	22	14	22	12
Kopenhagen	7	6	7	11	13	18	20	18
Ostseeländer.								
Nord-Finnland	20	9	13	9	12	10	14	12
Süd-Finnland	13	7	5	8	17	22	12	16
Petersburg	6	18	10	10	9	18	25	4
Dorpat	15	11	11	8	8	11	20	16
Fellin	8	2	11	7	11	31	25	5
Mitau	17	9	6	7	9	12	19	22
Arys	16	7	11	7	10	12	19	17
Danzig	22	9	7	3	12	8	28	11
Nordseeküste.								
Paris	12	11	6	3	9	22	25	12
Utrecht	12	10	5	5	9	22	21	16
Emden	11	9	8	5	9	23	20	15
Elsfleth	9	6	6	7	9	22	24	17
Hamburg	3	8	5	11	3	24	22	25
Mittleres Europa.								
Mühlhausen	8	7	8	6	4	22	19	26
Bernburg	8	5	6	4	7	14	29	26
Zechen	15	5	4	5	16	14	25	16
Leipzig	6	8	6	8	8	25	18	21
Prag	14	7	7	5	9	17	25	17
Wien	6	3	2	8	6	7	33	34
Peissenberg	8	17	5	8	4	22	26	11
Gratz	12	12	10	8	13	16	10	19
Westliches Süd-Europa.								
Südwest-Europa	13	14	13	12	4	7	14	23

Kupferoxydverbrennungen des Fleisches.

Nr.	Thiergattung u. Thierindividuum	Muskelpartie	Gehalt an trockener Substanz	Zur Verbr. genommene Substanz in Grammen	Daraus erhaltene Stickstoffmenge				Daraus ber. Stickstoffmenge in Milligrammen	Es enthalten also 100 Theile	
					in CC.	bei der beob. Temp.	und dem beob. Barometerstande	bei 0° u. 760 Mm. Barometerstand		der trock. Substanz an Stickstoff	der feucht. Subst. an Stickstoff
1.	Pferd I	a)	25·967	0·5195	63·7	10°2	750·4	59·89	75·14	14·46	3·755
2.				0·476	58·7	9·9	746·2	54·93	68·90	14·48	3·76
3.				0·2602	31·6	8·12	750·3	29·97	37·60	14·45	3·752
4.		b)	25·928	0·540	64·07	10·4	752·6	60·35	75·72	14·03	3·637
5.				0·269	31·9	10·6	752·9	30·04	37·68	14·00	3·631
6.				0·3805	44·97	9·7	754·1	42·47	53·28	14·01	3·635
7.	Pferd II	a)	26·465	0·4995	62·53	8·9	758·5	59·77	74·98	15·01	3·972
8.				0·3662	45·79	7·8	751·6	43·78	54·93	15·00	3·969
9.		b)	25·402	0·255	31·97	7·2	748·6	30·37	38·09	14·94	3·785
10.				0·503	63·82	10·1	747·9	59·74	74·94	14·92	3·780
11.	Pferd III	a)	26·012	0·449	51·66	11·6	750·2	48·25	60·53	13·51	3·514
12.				0·312	35·94	12·7	752·9	33·52	42·06	13·48	3·506
13.	Pferd IV	a)	25·376	—	—	—	—	—	—	—	3·74
14.	Pferd V	a)	24·584	—	—	—	—	—	—	—	4·02
15.	Pferd VI	a)	24·630			—	—	—	—	—	3·93

16.	Hund I	a)	28·451	0·500	53·16	12·2	748·7	49·12	62·00	12·40	3·528
17.				0·312	32·77	10	756·4	31·08	38·90	12·41	3·556
18.		b)	27·510	0·474	53·27	12·4	755·7	49·95	62·66	13·22	3·637
19.				0·3322	36·92	8·8	754·8	35·11	44·05	13·26	3·648
20.				0·3234	36·56	13·1	755·4	34·16	42·85	13·25	3·640
21.		c)	26·233	0·2625	36·73	11·4	751·1	34·38	43·13	16·43	4·310
22.				0·310	42·8	7·6	747·8	40·55	50·87	16·41	4·304
23.	Mensch I	a)	23·806	0·300	38·0	9·2	756·8	36·18	45·39	15·13	3·601
24.				0·3095	39·55	8·8	751·3	37·44	46·97	15·15	3·601
25.		b)	24·724	0·4738	59·84	12·9	745·1	55·19	69·23	14·61	3·612
26.				0·322	39·8	11·1	749·8	37·53	47·08	14·61	3·612
27.		c)	23·471	0·296	38·15	9·7	745·1	35·68	44·76	10·09	3·776
28.				0·273	37·41	8·6	746·4	35·22	44·19	16·02	3·802
29.	Mensch II	b)	20·444	0·348	47·87	14·2	746	43·94	55·12	15·84	3·238
30.				0·294	40·33	12	742·4	37·21	46·68	15·88	3·246
31.	Rind I	a)	25·00	0·2788	35·94	12	753·4	33·65	42·22	15·10	3·775
32.				0·3112	39·99	10·1	746·2	37·49	47·03	15·11	3·777
33.		b)	23·222	0·3619	47·79	9·8	745	44·72	56·10	15·50	3·599
34.				0·1516	20·00	12·2	756·5	18·75	23·52	15·52	3·604
35.	Rind II	a)	22·91	0·208	26·24	9·0	756·2	25·0	31·36	15·05	3·448
36.				0·1836	23·5	11·4	751·1	22·0	27·60	15·03	3·443
37.		b)	22·77	0·2413	32·2	8·8	754·8	30·62	38·41	15·92	3·628
38.	Rind III	a)	25·20	0·3345	42·06	8·0	752	40·0	50·18	15·00	6·780

Da es gestattet ist, den für die Ostseite von Amerika erhaltenen Werthen mit einer gewissen Einschränkung auch für die Ostseite von Asien Geltung zu geben, so wird diese Lücke einer Totalauffassung der Witterungserscheinungen des Sommers, so weit sie von den vorherrschenden Winden abhängen, nicht hinderlich sein.

Nach einer anderen Richtung glaubte ich mich aber beim Abschlusse dieser Arbeit zu einer grösseren Vollständigkeit verpflichtet; es ist dies die Darstellung der vorherrschenden Luftbewegung selbst. Durch die inzwischen erschienene wichtige Arbeit von Herrn Buchan „The mean pressure and the prevailing winds, Transactions of the Royal Soc. of Edinburgh Vol. XXV." wurde dieselbe wesentlich erleichtert. Auf zwei grösseren Tabellen (III) ist die Änderung in den vorwiegenden Windrichtungen vom Winter zum Sommer in möglichst kurzer und deutlicher Weise zur Anschauung gebracht.

Wo viele Stationen von einem kleineren Territorium vorhanden waren, welche eine hinreichende Übereinstimmung zeigten. wurden Gruppen gebildet; wo die Stationen weiter auseinanderliegen, dieselben geringere Übereinstimmung zeigen, hielt ich es für besser, sie einzeln vorzuführen, was auch für jene Örtlichkeiten geschah, für welche die vorhergehenden Tabellen die thermischen oder barischen Mittelwerthe der einzelnen Windrichtungen enthalten.

Eine vollständige Mittheilung über die Quellen, auf denen die Zahlenwerthe der folgenden Tabellen beruhen, sowie über die Methode und die specielleren Resultate meiner eigenen Berechnungen gebe ich am Schlusse dieser Abhandlung.

Ich bemerke ausdrücklich, dass die in der Tabelle II als wahre Mittel bezeichneten Sommertemperaturen nur zur Unterscheidung von den Mitteln der thermischen Windrosen, wie sie sonst ohne Berücksichtigung der Häufigkeit der Winde gegeben werden, so bezeichnet sind — sie stellen entweder die Mittel aller Beobachtungen dar, aus denen die Windrosen abgeleitet worden sind, oder sind aus letzteren selbst mit Rücksicht auf die Häufigkeit der Winde berechnet worden [1]). Die Abweichungen beziehen sich auf diese „wahren Mittel", nur wenige Berechner (Kämtz. Schott, Holten, Bruhns) haben schon direct die thermischen Windrosen in Form der Abweichungen mitgetheilt.

---

[1] Dasselbe gilt für die analogen Tabellen des ersten Theiles.

Was sich bei einer Überschau der Tabellen des ersten Theiles dieser Abhandlung gezeigt hat, die grosse Übereinstimmung der Abweichungen von der mittleren Temperatur und dem mittleren Luftdruck, welche die gleiche Windrichtung an nicht sehr weit von einander entfernten Orten erzeugt, das findet man auch wieder auf den Tabellen I und II des vorliegenden zweiten Theiles. Diese Übereinstimmung spricht sich hier noch überzeugender aus, weil die Abweichungen diesmal nicht nach einer Interpolationsformel berechnet sind, sondern aus den rohen Mittelwerthen hergestellt sind; sie ist noch überraschender, weil im Sommer die Unterschiede der thermischen und barischen Werthe der Winde viel kleiner sind als im Winter, und dadurch zufällige oder locale Störungen einen grösseren Einfluss bekommen. Es konnten darum ebenfalls, wie für den Winter, aus den übereinstimmenden Zahlenreihen Mittelwerthe für geographisch begründete Gruppen abgeleitet werden, welche ich einer Berechnung nach Bessel's Formel unterzogen habe und für welche dann die Lage und die Werthe der Extreme mit grösserer Schärfe aufgesucht werden konnten. Die Gruppen umfassen folgende Stationen:

Thermische Windrosen:

Nordseeküste: Paris, Utrecht, Emden, Elsfleth, Hamburg.

Mitteldeutschland: Mühlhausen, Arnstadt, Bernburg, Zechen, Leipzig, Prag, Wien.

Ostseeländer: Konitz, Bromberg, Arys, Mitau, Riga, Fellin, Dorpat, Petersburg.

Nordrussland: Archangel, Wologda, Kostroma.

Mittel- und Süd-Russland: Moskau, Kursk, Katherinoslav, Taganrog.

Südost-Russland: Samara, Orenburg, Astrachan.

Westsibirien: Tobolsk, Tara, Ischim.

Östliches Nordamerika: Brunswick, Providence, Toronto, Marietta.

Barische Windrosen:

Nordseeküsten: Oxford, Paris, Utrecht, Emden, Elsfleth.

Mitteldeutschland: Karlsruhe, Mühlhausen, Arnstadt, Salzwedel, Bernburg, Zechen, Prag, Wien, Gratz.

Ostseeländer: Danzig, Arys, Dorpat, Petersburg.

Nord-Russland: Archangel, Kostroma.
Südost-Russland: Kursk, Samara, Orenburg.
West-Sibirien: Tobolsk.
Östliches Nordamerika: Providence, Toronto.

Wenn in den Gruppen, welche dieselbe Bezeichnung tragen, für die thermische und barische Windrose nicht ganz genau dieselben Stationen vereiniget erscheinen, so geschah dies, abgesehen von dem Umstande, dass die vorhandenen Berechnungen an sich dies unthunlich erscheinen liessen, aus Gründen der Übereinstimmung im Gange des Luftdruckes und der Temperatur. So zeigen die thermischen Windrosen von Dublin, London, Oxford eine bemerkenswerthe Abweichung von den entsprechenden Werthen diesseits des Canals, der Nordostwind trägt jenseits noch den Charakter eines Seewindes; die barometrische Windrose von Oxford stimmt aber überein mit der von Utrecht, Emden etc. Da nur übereinstimmende Werthe vereiniget sind, so leidet hiedurch die Vergleichbarkeit in keiner Weise.

Tabelle IV.

Thermische Windrosen für den Sommer.

a) Die Constanten der Bessel'schen Formel.

Ort	N. Br.	Ö. L.	Stationen	u_0	u_1	u_2	U^1	U^2
Nordseeküste	52·2	24·3	5	+0·342	1·797	0·164	335°14'	156°35'
Mittel-Deutschland	50·7	30·9	7	+0·560	1·663	0·214	326°47'	98° 3'
Ostseeländer	56·3	41·1	8	+0·119	1·718	0·093	309°51'	155°55'
Nord-Russland . . .	60·5	58·1	3	+0·230	2·308	0·451	276°40'	237°52'
Mittel- u. Süd- Russland	50·8	54·6	4	+0·044	1·671	0·210	315°13'	213°46'
S.Ost-Russland . . .	50·4	68·7	3	+0·154	1·750	0·490	311°24'	201°48'
West-Sibirien	57·1	88·4	3	—0·007	2·227	0·116	282°49'	291°15'
Öst. Nord-Amerika	42·2	302·2	4	—0·590	1·636	0·306	238°55'	37°51'

b) Abweichungen vom wahren Mittel (Celsius).

	Nordsee	Mittel-Deutschland	Ostseeländer	Nord-Russland	Mittel- u. Süd-Russland	Süd-Ost-Russland	West-Sibirien	Östliches Nord-Amerika
N	—0·34	—0·14	—1·16	—2·45	—1·25	—1·34	—2·28	—1·80
NNO	+0·21	+0·38	—0·71	—2·23	—0·80	—1·07	—1·87	—1·91
NO	+0·81	+0·87	—0·12	—1·44	—0·13	—0·41	—1·15	—1·94
ONO	+1·41	+1·36	+0·55	—0·30	+0·65	+0·53	—0·27	—1·87
O	+1·90	+1·74	+1·18	+0·88	+1·35	+1·49	+0·59	—1·63
OSO	+2·20	+2·07	+1·68	+1·80	+1·80	+2·18	+1·33	—1·13
SO	+2·18	+2·22	+1·92	+2·28	+1·89	+2·35	+1·84	—0·44
SSO	+1·81	+2·10	+1·85	+2·35	+1·63	+2·00	+2·08	+0·34
S	+1·16	+1·68	+1·48	+2·14	+1·10	+1·28	+2·06	+1·00
SSW	+0·35	+1·00	+0·89	+1·81	+0·47	+0·47	+1·76	+1·33
SW	—0·43	+0·19	+0·19	+1·42	—0·14	—0·19	+1·22	+1·24
WSW	—1·03	—0·58	—0·48	+0·96	—0·64	—0·61	+0·47	+0·77
W	—1·36	—1·04	—1·02	+0·34	—1·03	—0·82	—0·39	+0·06
WNW	—1·40	—1·20	—1·37	—0·46	—1·30	—0·97	—1·25	—0·65
NW	—1·20	—1·04	—1·51	—1·34	—1·45	—1·14	—1·93	—1·22
NNW	—0·84	—0·64	—1·43	—2·09	—1·46	—1·31	—2·31	—1·60

c) Lage und Werthe der Extreme (Abweichungen).

Ort	Minimum		Maximum		Differenz
	Lage	Betrag	Lage	Betrag	
Nordseeküste	W 20° N	—1·50	O 32° S	+2·23	3·73
Mittel-Deutschland	W 22° N	—1·20	O 45° S	+2·22	3·42
Ostseeländer	W 48° N	—1·51	O 51° S	+1·93	3·44
Nord-Russland	N 3° O	—2·45	O 61° S	+2·37	4·82
Mittel- u. Süd-Russland	W 53° N	—1·47	O 39° S	+1·90	3·37
Süd-Ost-Russland	W 73° N	—1·35	O 40° S	+2·36	3·71
West-Sibirien	W 77° N	—2·35	O 76° S	+2·11	4·46
Östl. Nord-Amerika	N 43° O	—1·94	S 29° W	+1·35	3·29

Tabelle V.

Barometrische Windrosen für den Sommer.

a) Die Constanten der Bessel'schen Formel.

Ort	N. Br.	Ö. L. Ferro	Stationen	u_0	u_1	u_2	U_1	U_2
Nordseeküsten....	51·9	23·5	5	+0·217	3·009	0·039	81°10'	309°48'
Mittel-Deutschland	50·5	30·9	9	+0·086	2·017	0·073	66°34'	127°48'
Ostseeländer	56·6	42·1	4	—0·019	1·859	0·302	47°13'	271°54'
Nord-Russland....	61·1	58·4	2	—0·300	1·454	0·269	52°16'	201°48'
S.Ost-Russland ...	52·2	64·8	3	—0·391	1·053	0·251	46°56'	44°11'
West-Sibirien	58·2	85·9	1	+0·075	0·758	0·376	63°46'	176°11'
Östl. Nord-Amerika	42·7	302·3	2	—0·006	1·302	0·851	16°58'	112°26'

b) Abweichungen vom Mittel. Mm.

	Nordseeküste	Deutschland	Ostseeländer	Nord-Russland	Süd-Ost-Russland	West-Sibirien	Östliches Nord-Amerika
N	+3·16	+1·99	+1·04	+0·75	+0·55	+0·78	+1·16
NNO	+3·14	+2·11	+1·52	+0·86	+0·85	+0·58	+1·15
NO	+2·67	+1·92	+1·85	+0·89	+0·84	+0·42	+0·82
ONO	+1·82	+1·46	+1·89	+0·86	+0·60	+0·36	+0·51
O	+0·71	+0·83	+1·55	+0·69	+0·15	+0·38	+0·46
OSO	—0·49	+0·11	+0·83	+0·33	—0·51	+0·37	+0·68
SO	—1·58	—0·61	—0·10	—0·23	—0·61	+0·21	+0·93
SSO	—2·39	—1·24	—1·02	—0·92	—0·83	—0·14	+0·90
S	—2·79	—1·71	—1·68	—1·55	—0·98	—0·58	+0·40
SSW	—2·71	—1·92	—1·97	—1·95	—1·13	—0·93	—0·51
SW	—2·19	—1·83	—1·87	—1·99	—1·26	—1·02	—1·49
WSW	—1·31	—1·44	—1·49	—1·97	—1·35	—0·78	—2·09
W	—0·22	—0·77	—0·98	—1·09	—1·29	—0·29	—2·04
WNW	+0·93	+0·04	—0·45	—0·44	—1·01	+0·27	—1·34
NW	+1·97	+0·87	+0·04	+0·13	—0·54	+0·69	—0·39
NNW	+2·75	+1·56	+0·54	+0·53	+0·04	+0·86	+0·65

c) Lage und Werthe der Extreme.

Ort	Minimum		Maximum		Differenz
	Lage	Betrag	Lage	Betrag	
Nordseeküste	S 8° W	—2·81	N 10° O	+3·21	6·02
Mittel-Deutschland	S 27° W	—1·95	N 19° O	+2·12	4·07
Ostseeländer	S 28° W	—1·98	N 58° O	+1·91	3·89
Nord-Russland	S 31° W	—2·00	N 45° O	+0·89	2·89
Südost-Russland	S 63° W	—1·35	N 34° O	+0·88	2·23
West-Sibirien	S 37° W	—1·03	W 70° N	+0·87	1·90
Östl. Nord-Amerika	S 77° W	—2·16	N 12° O	+1·20	3·36

Tabelle VI.

Änderung des Luftdruckes in Millimetern.

Ort	in Stunden	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW
Chiswick	(12)	+0·9	+0·2	—0·1	—1·3	—1·5	+0·1	+0·6	+2·0
Paris	(12)	+2·3	—0·5	—1·4	—1·1	—1·5	+0·2	+0·8	+0·7
Wien	(24)	+1·0	+1·6	—1·0	—1·6	—1·9	—1·3	+0·3	+0·8
Danzig	(12)	+0·3	+0·1	—0·7	—1·6	—1·7	—0·3	+0·7	+0·7
Arys	(8)	+0·3	—0·1	—0·4	—0·9	—0·9	—0·5	+0·5	+0·7
Königsberg	(14)	+0·6	—0·6	—1·4	—1·6	—1·5	—0·2	+0·5	+1·2
Dorpat	(24)	+0·6	+0·5	0·0	—1·2	—1·7	—0·7	+0·8	+0·9
Kursk	(24)	+0·9	+0·6	—0·1	—1·0	—1·3	—1·2	—0·4	+0·5
Orenburg	(24)	+0·6	+0·2	—0·3	—1·3	—1·0	—0·4	—0·2	+0·7
Tobolsk	(24)	+1·4	+0·2	0·0	—1·3	—0·9	—0·8	+0·6	+0·7
Providence	(24)	+0·8	+1·2	—1·1	—1·2	—1·2	—1·5	+0·1	+1·7
Toronto	(24)	+2·3	—1·1	—2·1	—3·1	—1·4	0·0	+2·2	+3·3

Im Sommer umfasst die kalte Seite der Windrose im mittleren Europa den Bogen SW über W bis NNO, die Abkühlung erfolgt von dem westlich liegenden Meere, die Landwinde sind warm; dieses Verhältniss bleibt fast constant dasselbe bis nach West-Sibirien hinein. Eine Änderung erfährt nur die Temperatur der Nordnordost- und Nordostwinde, welche weiter nach Norden und Osten der kalten Seite angehören, während der Charakter der Westwinde, obgleich sie immer mehr zu Landwinden werden, der gleiche bleibt. Erst in West-Sibirien gehören SW und WSW schon entschieden der warmen Seite der Windrose an [1].

Auf der östlichen Seite von Nordamerika tritt in gleicher Weise der abkühlende Einfluss des östlich liegenden Meeres hervor, die Windrichtungen von WNW über NW bis SO erniedrigen die Temperatur, warm sind die Südwinde und Westwinde. Die erwärmende Wirkung der Landwinde aus Westen würde wahrscheinlich noch stärker hervortreten, wenn für Marietta die Temperaturmittel der Winde statt auf das ganze Sommerhalbjahr, sich blos auf die drei Sommermonate beziehen würden. Bemerkenswerth bleibt aber, dass der Nordwestwind, der in seiner Beziehung zu der gegenseitigen Lage von Meer und Festland unserem Nordost entspricht, und gleich diesem im Winter das Temperaturminimum bringt, auch im Sommer entschieden ein kalter Wind bleibt, während sein Correlat, der Nordost, in West-Europa mit der höheren Wärme der Landwinde auftritt. Der Osten von Nord-Amerika hat aber in der Richtung nach NW die grossen Süsswasserseen, die Hudsonsbai und ein arktisches Inselmeer, den Ort der niedrigsten Sommerwärme; während wir nach NO hin die weiten Landflächen des europäischen Russland vor uns haben. Weiter nach Westen, im Mississippithal, wird aber eine Änderung in der Temperatur der Nordwestwinde eintreten, wie man aus den dort weit nach Norden vordringenden Scheiteln der Isothermen schliessen muss. Es liegen aber keine Beobachtungen vor, aus denen man durch Rechnung diese Änderung nachweisen könnte.

---

[1] Wir schliessen zunächst Nord-Russland von diesen Betrachtungen aus, weil es, wie man sieht, eine isolirte Stellung einnimmt.

Die Wärmeänderung in der Windrose vom Winter zum Sommer, welche der Umkehrung des Temperaturgegensatzes von Land und Meer entspricht, überblickt man in nachfolgender Zusammenstellung:

Kalte Seite der Windrose.

West-Europa.

Winter	NW, NNW, N, NNO, NO*, ONO, O, OSO, SO.
Sommer	SW, WSW, W, WNW*, NW, NNW, N.

Östliches Nord-Amerika.

Winter	WNW, NW, NNW*, N, NNO
Sommer	WNW, NW, NNW, N, NNO, NO*, ONO, O, OSO, SO.

Von der Wärmeänderung bleiben unberührt in Europa wie in Nord-Amerika: der SSO, S und SSW als warme Winde, und der NW, NNW und N (in Amerika auch der WNW) als kalte Winde. Die jährliche Wanderung der Wärmeminima und Maxima beträgt:

Lage des Minimums.

	Winter	Sommer	Zurückgelegter Weg in Bogengraden
West-Europa	N 54° O	W 21° N	123°
Östl. Nord-Amerika	W 65° N	N 43° O	68°

Lage des Maximums.

	Winter	Sommer	Zurückgelegter Weg im Bogen
West-Europa	S 50° W	O 39° S	101°
Östl. Nord-Amerika	O 81° S	S 29° W	38°

Sowohl die Lage des Minimums wie die des Maximums erfährt auf der Ostseite von Nord-Amerika noch nicht eine halb so grosse Verschiebung wie in West-Europa. Die Ursache liegt wohl hauptsächlich darin, dass in Europa die Küste nach SW ins Meer vordringt, in Nord-Amerika zurückweicht. Der Temperaturunterschied der extremen Windrichtungen beträgt im Mittel aller Gruppen im Winter 8°2 C, im Sommer 3°8, ist also auf weniger als die Hälfte herabgesunken. Dieser Wärmeunterschied der Winde zeigt sich im Sommer für verschiedene Orte ausserordentlich beständig, er erfährt kaum eine Änderung mit der Entfernung von der Meeresküste und dürfte höchstens mit der Breite eine Zunahme erfahren; im Winter hingegen nimmt er bedeutend zu gegen das Innere des Festlandes, denn die Differenzen betragen dann für die Gruppen:

	Nordsee	Mittel-Deutschland	Central-Russland	West-Sibirien
Östl. Länge v. F.	22°1	30°4	55°9	86°4
Temp. Differenz	5·6	7·1	10·6	11·1

Dies ist eine Erscheinung, welche man im vorhinein wohl nicht hätte voraussetzen mögen. Als Consequenz hievon nimmt die Veränderlichkeit der Temperatur im Winter nach Sibirien hinein zu, im Sommer scheint sie ziemlich unabhängig von der geographischen Länge zu sein.

Es wäre auch hier wieder interessant zu wissen, wie es sich damit im Innern Nord-Amerika's verhält.

Beim Fortschreiten von Westen nach Osten auf dem Continent Europa-Asien ändert sich die Achse der thermischen Windrose in folgender Weise:

Kältester Punkt der Windrose.

	Nordsee	Mittel-Deutschland	Mittel-Russland	S. Ost-Russland	West-Sibirien
Östl. Länge	24·3	30·9	54·6	68·7	88·4
Minimum	W 20° N	W 22° N	W 53° N	W 73° N	W 77° N

Auf der Ostseite von Nord-Amerika liegt es bei N 43°O., und ähnlich wohl auch in Ost-Asien. Es bewegt sich also der kälteste Punkt der Windrose von West nach Nord und Ost, so wie wir im Sommer vom Westrande eines Continentes dem Ostrande uns nähern; die Änderung beträgt 57° von der Nordseite bis Westsibirien und etwa 113° bis Ost-Asien. Im Winter beträgt diese Bewegung von O über N nach W 108°; bemerkenswerth ist die vollkommene Analogie mit der **jährlichen** Bewegung an einem und demselben Orte. Wieder erfolgt wie im Winter die Wanderung des wärmsten Punktes der Windrose langsamer und unregelmässiger:

Wärmster Punkt der Windrose.

Nordsee	Mittel-Deutschland	Mittel-Russland	S. Ost-Russland	West-Sibirien	Östliches Nord-Amerika
O 32° S	O 45° S	O 39° S	O 40° S	O 76° S	S 29° W

Die ganze Änderung beträgt hier 87°, im Winter im Sinne W über S nach O 61°.

Wie sich nun aus einer blossen Betrachtung der Lage der Maxima und Minima der einzelnen Gruppen in den extremen Jahreszeiten ergibt, ist die Drehung der Achsen der Windrosen kleiner im Inneren von Europa und Asien als in der Küsten-

nähe; der Gegensatz von Nord und Süd, von polarem und äquatorialem Einfluss tritt dort ungetrübter und unveränderlicher auf. An den Küsten stellen sich die Achsen der thermischen Windrosen gleichsam als die Resultirenden von zwei Kräften dar. Die Richtung der einen Componente der äquatorialen oder polaren ist der jährlichen Periode nicht unterworfen, die andere Componente, die oceanische oder continentale, schwingt innerhalb gewisser Grenzen um den Süd- und Nordpunkt; mit dem periodischen Wechsel des Temperaturgegensatzes von Land und Wasser bewegt sie sich von der Ostseite auf die Westseite und umgekehrt.

In viel geringerem Maasse wird die barische Windrose durch den Temperaturwechsel von Wasser und Land vom Winter zum Sommer afficirt. Den Bogen des Horizontes, aus dem die den Luftdruck erniedrigenden Winde wehen, überblickt man in folgender Zusammenstellung:

Winde mit niedrigem Luftdruck.

West-Europa.

Winter SO, SSO, S, SSW, SW*, WSW, W, WNW.
Sommer OSO, SO, SSO, S, SSW*, SW, WSW, W.

Östliches Nord-Amerika.

Winter O, OSO, SO, SSO, S, SSW, SW, WSW.
Sommer SSW, SW, WSW, W, WNW, NW.

Im Westen von Europa ist die Änderung sehr geringfügig, so dass sich kaum ein Einfluss des Meeres und der Wärmeänderung in der Windrose in den entsprechenden Werthen des Luftdruckes erkennen lässt. Auffallend ist aber die Änderung im östlichen Nord-Amerika, wo die Seewinde aus Osten im Winter tiefen Luftdruck, im Sommer hohen Luftdruck bringen. Es wäre wünschenswerth, mehr barische Windrosen aus Nord-Amerika zu besitzen, um versichert zu sein, ob man es nicht mit einem localen Einfluss zu thun habe, wie er bei Providence und bei Toronto nicht ganz unwahrscheinlich erscheinen darf. In Russland wie in West-Sibirien ist die Vertheilung des Luftdruckes in der Windrose im Sommer fast genau dieselbe wie im Winter.

Windrichtungen unter dem Mittel.

	Winter	Sommer
Ostsee und Nord-Russland	SSO bis WNW	SO bis WNW
Mittel-Russland	SO bis NW	OSO bis NW
West-Sibirien	SO bis W	SSO bis W

Die Änderung des Luftdruckes innerhalb der 24 Stunden, die der betreffenden Windrichtung vorausgehen, bleibt auch in Nord-Amerika ziemlich unverändert in der jährlichen Periode, nur das rasche Sinken des Barometers bei NO ist dem Winter eigenthümlich:

Änderung des Luftdruckes in Millimeter.

Östliches Nord-Amerika.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW
Winter	+3·2	—4·0	—6·8	—8·9	—7·8	—4·4	+0·5	+5·4
Sommer	+1·5	+0·1	—1·6	—2·1	—1·3	—1·2	+1·7	+2·5

Westliches Europa [1].

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW
Winter	+3·8	+2·2	+0·1	—1·9	—3·0	—1·9	+1·4	+3·9
Sommer	+0·9	+0·2	—0·6	—1·3	—1·5	—0·5	+0·5	+0·9

Nur die Ostseite der Windrose zeigt sich von dem Wechsel der Jahreszeiten beeinflusst; die Tendenz des Barometers zum Steigen schreitet gegen die Ostseite vor: in Nord-Amerika im Sommer, in Europa im Winter. Die Westseite der Windrose erfährt keinen Zeichenwechsel in der jährlichen Periode.

Sucht man in ähnlicher Weise, wie für die Temperatur, auch für den Luftdruck die Bewegung der Punkte des Maximums und Minimums vom Winter zum Sommer auf, so erhält man folgendes Bild:

Bewegung der Maxima.

	Winter	Sommer	Unterschied
West-Europa	N 53° O	N 15° O	—38°
Östl. Nord-Amerika.	W 80° N	N 12° O	+22°

Bewegung der Minima.

	Winter	Sommer	Unterschied
West-Europa	S 37° W	S 18° W	—19°
Östl. Nord-Amerika.	S 4° W	S 77° W	+73°

In Europa weicht das Maximum im Sommer von der Ostseite zurück gegen Nord, in Amerika schreitet es von der Westseite gegen die Ostseite vor. Das Minimum bewegt sich in Europa von West gegen Süd, in Amerika von Süd gegen West.

Russland und West-Sibirien zeigen folgendes Verhalten:

Lage des Maximums.

	Winter	Sommer	Unterschied
Nord-Russland..	O 12° S	N 45° O	—57°
Ostseeländer....	N 73° O	N 58° O	—15°
Süd-Russland...	N 57° O	N 34° O	—23°
West-Sibirien...	N 49° O	W 70° N	—69°

[1] Die Stationen der Tabelle VI von Chiswick bis Kursk.

Lage des Minimums.

	Winter	Sommer	Unterschied
Nord-Russland..	S 28° W	S 31° W	+ 3°
Ostseeländer....	S 37° W	S 28° W	— 9°
Süd-Russland...	S 48° W	S 63° W	+15°
West-Sibirien...	S 18° W	S 37° W	+19°

Das Zeichen — ist für die retrograde Bewegung von O über N gegen W, das Zeichen + für die directe von O über S nach W gewählt.

In der Richtung von Westen nach Osten, von Europa nach Inner-Asien hinein, zeigt sich keine analoge regelmässige Änderung der Achsen der barischen Windrosen, wie wir sie für die Temperatur vorhin nachgewiesen haben. Die Lage derselben ist im Sommer überall auf den in Rechnung gezogenen Gebieten ziemlich übereinstimmend. Bemerkenswerth ist für die Grösse des Einflusses der Winde auf den Luftdruck, die überraschende Regelmässigkeit, mit welcher dieselbe von Westen nach Osten, von den Küsten der Nordsee nach West-Sibirien hinein von 6 Mm. bis auf 2 Mm. abnimmt. Im Winter ist von einer solchen Verminderung nichts zu bemerken, eher scheint eine Zunahme stattzufinden wie sie für die Temperatur mit Evidenz hervortritt.

Differenz der Extreme, Millimeter.

	Nordsee	Deutschland	Ostsee	Mittel- und Süd-Russland	West-Sibirien
Winter	6·0	5·5	8·5	14·6	8·5
Sommer	6·0	4·1	3·9	2·2	1·9

Sind auch diese Zahlen unstreitig nicht frei von dem Einflusse, welchen die Güte der Windbeobachtungen und selbst die Art der Berechnung auf die Unterschiede der Abweichungen ausübt, so kann doch über die Richtigkeit der hier dargestellten Änderung von West nach Ost kein Zweifel bestehen, da sie selbst in den Stationsgruppen so deutlich hervortritt. Es bewirkt also im Sommer die Entfernung von der Küste eine fortschreitende Verminderung der Extreme der barischen Windrose, im Winter hingegen nicht. Im Sommer bildet das Innere der Continente den Anziehungspunkt für die kühleren Luftmassen der benachbarten Meere, und erinnert in seinem Verhalten einigermaassen, aber als Gegenstück, an die Winterkältepole, den Anziehungspunkt für die wärmeren Luftmassen.

Das Vorwiegen der Seewinde muss im Sommer die Mitteltemperatur erniedrigen, oder das Mittel aus der Temperatur aller Windrichtungen ohne Rücksicht auf ihre Häufigkeit muss grösser ausfallen, als das wahre Mittel. Dieser Unterschied (die Grösse u_s in Tabelle IV) hat in der That das positive Zeichen in ganz Europa, er ist nahezu Null im Herzen des Continentes in Sibirien. Gerade umgekehrt verhielt es sich im Winter [1].

In Europa überwiegen die Seewinde im Winter wie im Sommer, in jenem bedingt dies eine Temperaturerhöhung, in diesem eine Temperaturerniedrigung, aber der erstere Einfluss überwiegt doch bedeutend. Im östlichen Nord-Amerika ist im Winter wie im Sommer die vorwiegende Luftbewegung vom Land aufs Meer gerichtet, dieses Übergewicht ist freilich im Winter unvergleichlich grösser. Der Effect ist eine grosse Temperaturdepression im Winter, eine geringe Temperaturerhöhung im Sommer. Auf der Ostseite des grossen Continentes der alten Welt verhält es sich wiederum anders. Im Winter besteht dort ein noch viel grösseres Übergewicht der Landwinde wie im östlichen Nord-Amerika, Seewinde sind ungemein selten, die Folge ist eine starke Temperaturerniedrigung. Im Sommer gelangen dort umgekehrt die Seewinde zur Vorherrschaft, und der Effect ist wieder eine Abkühlung. Ein kaltes Continentalklima im Winter wechselt mit einem kühlen nassen Seeklima im Sommer.

Zur Charakterisirung der verschiedenen Windrichtungen und zur Beurtheilung ihres klimatischen Einflusses liefern nächst den thermischen Windrosen noch die Regenwindrosen und die mittleren Grade der Himmelsbedeckung bei verschiedenen Winden (die nephischen Windrosen) einen wesentlichen Beitrag. Leider sind diese Werthe nur für wenige Orte abgeleitet [2]. Die Form der Publication der russischen Beobachtungen über Bewölkung verhinderte früher die Berechnung nephischer Windrosen für

---

[1] S. pag. 17 der ersten Abhandlung.

[2] Für Regenwindrosen empfiehlt es sich viel mehr die Regenwahrscheinlichkeit der Winde abzuleiten, als die während ihres Wehens gefallene Regenmenge zu berechnen, wodurch man eine Zahlenreihe erhält, welche besonders durch die Gewitterregen des Sommers leicht grosse Störungen erleidet.

Russland und Sibirien. Die nachfolgende kleine Tabelle macht die wichtigeren Verhältnisse ersichtlich, so weit das Materiale es gestattet.

Tabelle VII.

Regenwahrscheinlichkeit bei verschiedenen Winden im Sommer.

Ort	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW
London	0·25*	0·29	0·31	0·36	0·62	**0·68**	0·48	0·43
Oxford	0·22*	0·23	0·36	0·57	**0·54**	0·46	0·36	0·26
Karlsruhe	0·17	0·06*	0·07	0·18	0·32	**0·33**	0·26	0·20
Dorpat	0·33	0·22	0·19*	0·38	0·67	**0·69**	0·52	0·28
Kursk	0·20	0·22	0·11*	0·23	0·24	**0·32**	0·21	0·24
Nijnegorodsk	0·09*	0·20	0·24	0·30	0·26	**0·38**	0·20	0·13
Tobolsk	**0·21**	0·27	0·16	0·20	0·15*	0·17	0·17	0·19
Providence	0·05	0·14	**0·22**	0·16	0·10	0·08	0·04	0·01*
Toronto	0·33*	0·47	**0·49**	0·37	0·35	**0·51**	0·49	0·38
Brunswick [1]	1·0	2·8	**4·4**	3·2	1·2	0·5	0·4	0·1*
Marietta [1]	0·5*	0·8	0·8	1·0	1·1	**1·5**	1·3	0·9

Tabelle VIII.

Bewölkung (0—10).

Sommer.

Ort	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW
Elsfleth	5·4	5·1	4·7*	4·9*	6·3	**7·7**	7·5	6·7
Prag	4·9	4·2	3·8	3·5*	4·4	5·0	**5·8**	5·3
Wien	4·5	2·6	2·5*	2·5*	2·7	4·3	**5·6**	5·5
Gratz	3·6	1·8*	2·0	3·1	4·0	**5·8**	4·9	5·2
Madrid	2·1	1·6*	2·2	2·9	**3·3**	3·1	3·0	2·2
Dorpat	4·1	2·9*	3·0	4·6	6·0	**6·2**	5·8	5·2
Providence	4·9	6·7	**7·1**	6·0	6·1	5·5	3·5	2·6*
Toronto	4·3	**7·0**	6·6	5·4	4·9	6·2	5·5	4·1*

[1] Quotient aus den Procenten der Häufigkeit der Regentage bei verschiedenen Windrichtungen und den Procenten der absoluten Häufigkeit der letzteren.

Im westlichen Europa sind die Süd-, Südwest- und Westwinde im Winter wie im Sommer die Regenwinde. In den innern und östlichen Theilen des europäischen Russland bringen im Winter die Südostwinde den meisten Niederschlag, wie ich im ersten Theile dieser Untersuchung nachgewiesen habe. Im Sommer kehrt das Regenmaximum wieder in normaler Weise auf SW zurück, wie die Regenwindrose von Kursk und Nijnegorodsk beweist. Herr A. v. Wojeikoff schreibt mir hierüber [1]: Das von Ihnen gewonnene Resultat für den Winter ist richtig, die Niederschläge des Winters gehören zu denen, die Dove Niederschläge des Überganges nennt, und gerade die Häufigkeit derselben bei SO weiset die Richtigkeit Ihrer Ansicht nach, der SO sei eine Deflexion des SW. Im Sommer verhält es sich anders, dann ist der SW entschieden regenbringend, sogar in die Volksmeinung ist dies eingedrungen. In den Gouvernements Simbirsk und Orenburg heisst der SW „fauler Winkel". Die Berechnung der Regenwindrosen aus gewöhnlichen Tagebüchern hat eine missliche Seite; je mehr man in Russland nach Süden geht, desto seltener werden langandauernde Regen, desto häufiger kurze Platzregen mit Gewittern. Dass aber die Gewitter von S, SW oder W kommen, davon sah ich sehr wenige Ausnahmen, und ich habe viele Sommer im Innern Russlands verlebt.

In Sibirien scheinen im Sommer die Süd-, Südwest- und Westwinde trockene Winde zu sein, und die meisten Niederschläge durch das Einbrechen der Nordwest-, Nord- und Nordostwinde veranlasst zu werden, welche Kälte und Trübung vom Eismeere herbeiführen.

Im östlichen Nord-Amerika tritt im Winter die Ostseite der Windrose entschieden als die Regenseite auf; im Sommer zeigt sich ein zweites Maximum der Regenwahrscheinlichkeit bei SW, sowie wir uns von der Küste selbst entfernen, und in Marietta, jenseits der Alleghanies ist nur mehr das einzige Maximum bei SW vorhanden. Im Winter aber ist auch dort noch der Ost und Südost der eigentliche Regenwind [2].

---

[1] Petersburg 9. November 1870.

[2] Regenwindrose von Marietta im Winterhalbjahr:

N	NO	O	SO	S	SW	W	NW
0·8*	0·7	1·4	1·5	1·0	0·8	1·0	1·0

Die Zahlen für die Bewölkung gehen parallel mit jenen, welche die Regenwahrscheinlichkeit ausdrücken. Im ganzen westlichen und inneren Europa bringen die Ostwinde Heiterkeit, die Westwinde Trübung, und umgekehrt verhält es sich im östlichen Nord-Amerika, wo das Maximum der Trübung auf O und NO, das Minimum auf NW fällt.

Die nephischen und Regenwindrosen lassen uns erkennen, dass die Temperatur der Winde im Sommer von zwei Ursachen abhängt. Die Seewinde sind kühl, weil sie vom kühleren Meere herkommen und weil sie trüb sind und die Insolation hemmen. Die Landwinde sind warm, weil sie von dem erwärmten festen Erdboden, über den sie hinwehen, Wärme borgen, und weil sie Heiterkeit bringen, und dadurch eine unbehinderte Einwirkung der Sonnenstrahlung ermöglichen.

Aus dem Studium der Eigenschaften der Winde in verschiedenen Theilen der nördlichen gemässigten Zone gewinnen wir eine Einsicht in den Causalzusammenhang der differirenden Witterungssysteme dieser letzteren. Die Winde erlangen aber nur dadurch einen Einfluss auf die Mittelwerthe der Temperatur, Feuchtigkeit, Bewölkung an verschiedenen Orten, dass einige Richtungen über alle andern vorwiegen. Wo die Winde aus allen Punkten des Horizontes gleich oft wehen, werden sie zwar eine grössere Variabilität des Klimas, häufigere Witterungswechsel veranlassen, auf die mittleren Werthe der meteorologischen Elemente aus längeren Perioden aber keinen Einfluss nehmen. Mit der grossen Beständigkeit der Herrschaft einer Classe von Luftströmungen hängt zusammen ein Klimagebiet von geringer Variabilität, wofür Ost-Asien im Winter als typisch angenommen werden darf; mit einer ziemlich gleichen Häufigkeit der Luftströmungen entgegengesetzten Charakters aber ein sehr variables Klima. Als Beispiel hiefür darf man vielleicht die vereinigten Staaten von Nord-Amerika anführen. Es ist klar, dass man hiebei die Häufigkeit des Wechsels und die Grösse desselben zu unterscheiden hat. Was letztere anbetrifft, gebührt dem Klima von West-Sibirien und dem östlichen Nord-Amerika der Vorrang, aber in Nord-Amerika scheinen die Wechsel häufiger zu sein als in Sibirien. Die mittlere Veränderlichkeit der Monattemperaturen ist in den östlichen Unionsstaaten und in Canada

bedeutend kleiner als in Deutschland, was allerdings im Einklang mit der südlicheren Breite steht, aber die mittlere Differenz der Monatsextreme ist dabei bedeutend grösser. Dies spricht, wenn ich nicht irre, dafür, dass die Wechsel in Amerika häufiger (und auch grösser) sind als in Deutschland.

Veränderlichkeit des Monatmittels.

Grade Celsius.

	December	Jänner	Februar	März	April	Mai
Toronto	1·7	2·1	1·8	1·7	1·0	1·2
Wien	2·3	2·5	2·2	1·7	1·7	1·5
	Juni	Juli	August	September	October	November
Toronto	1·3	0·8	0·8	1·0	1·0	1·2
Wien	1·2	1·3	1·3	1·2	1·4	1·4

Differenz der mittleren Monatsextreme. Celsius.

	December	Jänner	Februar	März	April	Mai
Toronto	27·6	28·9	30·6	28·8	26·6	24·9
Wien	20·4	20·7	20·6	22·8	24·8	25·7
	Juni	Juli	August	September	October	November
Toronto	26·3	24·2	28·6	25·5	25·0	23·8
Wien	22·2	21·5	22·9	23·5	22·8	20·9

Und doch liegt Toronto unter 43°6 NBr. am Ufer eines der grössten Binnenseen, Wien unter 48°2 NBr. am Rande einer schon ziemlich continentalen Ebene. Man würde noch grössere Unterschiede erhalten, wenn man einen Ort in Canada oder weiter im Innern hätte wählen können.

Aus den beiden grösseren Tabellen III habe ich die nachfolgende Übersicht zusammengestellt, welche die ungleiche Häufigkeit der Winde über verschiedenen Theilen von Europa, Asien und Nord-Amerika, das einseitige Vorwiegen der Land- oder der Seewinde, des Äquatorial- oder des Polarstromes sowie den jährlichen Wechsel dieser Verhältnisse bequem ersichtlich macht.

Die Luftströmungen in Norwegen und Schweden, so interessant sie für das Studium localer Störungen sind, wurden aus dieser Übersicht weggelassen, da sie eine isolirte Stellung einnehmen, und nur eine Analogie mit den Winden Grönlands zeigen.

Tabelle IX.

Häufigkeit der Winde im Winter.

Ort	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW
England	6	7	6	12	12	**27**	16	13
Nordsee	5	9	11	12	13	**24**	17	9
Deutschland	6	8	9	9	15	**23**	18	11
Ostsee	6	5	11	12	18	**21**	20	7
Nord-Russland	6	6	10	**20**	14	**20**	16	8
Mittel-Russland	10	8	10	**15**	14	**15**	15	13
Süd-Russland	8	12	17	13	12	**14**	13	10
NW-Sibirien	7	8	6	13	16	**31**	10	9
Turkestan	14	16	**18**	12	6	6	15	12
Ost-Asien	12	7	6	4	4	9	24	**34**
Nördl. Vereinigte Staaten	12	11	6	7	9	15	15	**25**
Südl. Vereinigte Staaten	12	**18**	6	12	9	17	9	17

Häufigkeit der Winde im Sommer.

Ort	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW
England	7	6	7	9	12	**25**	18	17
Nordsee	9	9	6	6	8	**23**	22	17
Deutschland	10	9	7	6	9	19	**22**	19
Ostsee	14	10	9	7	10	15	**23**	12
Nord-Russland	14	10	10	12	8	13	16	**17**
Mittel-Russland	14	9	8	10	10	15	16	**17**
Süd-Russland	11	10	15	9	9	12	**19**	15
NW-Sibirien	12	15	7	11	9	18	10	**18**
Turkestan	**21**	17	11	6	5	6	20	14
Ost-Asien	7	9	17	**22**	16	10	9	10
Nördl. Vereinigte Staaten	8	9	7	10	17	**23**	12	14
Südl. Vereinigte Staaten	7	12	7	17	16	**25**	7	8

Was zunächst den Winter betrifft, so habe ich ein Bild des Systems der Luftströmungen zu dieser Jahreszeit schon in der ersten Abhandlung gegeben. Die jetzt vorliegende Tabelle enthält ein viel reicheres Material und berichtigt in einigen Punkten die früher gegebene Darstellung. Über ganz Mittel- und

Nord-Europa herrschen S, SW, W (durchschnittlich 55 % aller Winde) der Äquatorialstrom; im mittleren und südlichen Russland auch als SO auftretend. Die Herrschaft des Südwest erstreckt sich aber über den Ural hinüber weit hinein nach dem nördlichen Sibirien bis über den Jenissei; S, SW, W erreichen dort 57 % aller Winde. Dies gilt aber nur für das nördliche Sibirien. Schon Wesselowsky hat darauf aufmerksam gemacht, dass die Luft-Strömungen im südlichen West-Sibirien umgekehrt nach SW und W gerichtet sind. In der That ergeben die Beobachtungen von Aralsk 46° N und am Syr-Daria 45° N ein entschiedenes Übergewicht der Nord-, Nordost- und Ostwinde, 48 % gegen die Süd-, Südwest- und West-Richtung (27 %). Wir haben hier einen Zweig des Polarstroms, dessen nur selten gestörte Vorherrschaft das Klima von Ost-Asien charakterisirt. W, NW und N erreichen dort 70 %, O, SO, S nur 14 %. Wie der Übergang von den vorwiegenden Nord-, Nordost- und Ostwinden Turkestans zu den Nordwestwinden des östlichen Asiens stattfindet, das könnten nur Beobachtungen aus dem Innern China's uns lehren. Ähnlich, nur weniger einseitig ausgeprägt und regelmässig ist das System der Luftströmungen über dem Continent von Nord-Amerika. Vorwiegende Süd- und Südwestwinde, an der Steilküste zu SO und O abgelenkt, im Westen; ein Übergewicht der nördlichen und continentalen Luftströmungen im Innern und an den östlichen Ufern. Im nördlichen Theile der östl. Vereinigten Staaten geben die West-, Nordwest- und Nordwinde 52 % die O, SO, S 22 % aller Winde: in den südlichen Staaten ist das Verhältniss 47 zu 27 %. Aber auch der Nordostwind spielt im Klima Nord-Amerika's eine wichtige Rolle. Im arktischen Nord-Amerika haben NW und N ein ausserordentliches Übergewicht, 64 %.

Im Sommer bietet die Luftcirculation über den Continenten ein anderes Bild dar. Wir sehen fast überall die Winde vom Meere aufs Land gerichtet, das Innere des Continentes bildet in Asien wie in Nord-Amerika den Anziehungspunkt für die Luftströmungen an der Erdoberfläche. Im Westen von Europa ist deshalb eine Änderung weniger bemerkbar, aber der NW, N und NO zeigen eine entschiedene Zunahme, welche in Russland und in Sibirien noch bedeutender wird. In Russland ist der Gegensatz zwischen den Südost-, Süd- und Südwestwinden des Winters

und den Nordwest-, Nord- und Nordostwinden des Sommers ein durchgreifender; dasselbe gilt in noch höherem Maasse von West-Sibirien. Die Windrichtungen im südlichen Sibirien sind im Sommer nahezu übereinstimmend mit jenen des nördlichen Sibirien. Der grösste Gegensatz zwischen Winter und Sommer kommt in den Windverhältnissen Ost-Asiens zur Entwicklung. Wie im Winter die Landwinde, so unbestritten herrschen im Sommer die Seewinde; ein echtes Monsungebiet erstreckt sich vom südlichen China und Hinterindien bis über Ajansk (56° N) hinauf. Im Sommer ist das Verhältniss O, SO, S zu W, NW, N (innerhalb der gemässigten Zone) 55 : 26, im Winter 14 : 70. Ein typisches Continentalklima ist dadurch in ein wahres Seeklima übergegangen.

In geringerem Maasse, aber in demselben Sinne, erfolgt die Änderung im östlichen und inneren Nord-Amerika. Ein Unterschied besteht hauptsächlich darin, dass nicht der SO sondern der SW die grösste Frequenz erreicht, und da schon im Winter SW und W häufig waren, ist die Änderung weniger einflussreich.

Im westl. Nord-Amerika sind im Sommer die West- und Nordwestwinde die vorherrschenden, aber die Küstengestaltung verhindert die genauere Erkenntniss der wahren Strömungsverhältnisse der Luft, die im allgemeinen denen Europa's analog sein dürften.

Wenn wir die für den Sommer erhaltenen Zahlenwerthe der Frequenz der Winde von jenen des Winters subtrahiren, so werden die Differenzen ein deutliches Bild der Veränderungen geben; das Zeichen + entspricht einer Zunahme, — einer Abnahme der Häufigkeit beim Übergang vom Winter zum Sommer.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Summe d. Änderung
SW-Europa	+6	+3	+3	0	—2	—4	—7	+1	26
NW-Europa [1]	+6	+2	—3	—7	—6	—4	+5	+8	41
Nord-Russland	+8	+4	0	—8	—6	—7	0	+9	42
Mittel-Russland	+4	+1	—2	—5	—4	0	+1	+4	21
Süd-Russland	+3	—2	—2	—4	—3	—2	+6	+5	27
NW-Sibirien	+5	+7	+1	—2	—7	—13	0	+9	44
Südl. Sibirien	+7	+1	—7	—6	—1	0	+5	+2	29
Ost-Asien	—5	+2	+11	+18	+12	+1	—15	—24	88
Nördl. Unions-Staaten	—4	—2	+1	+3	+8	+8	—3	—11	40
Südl. Unions-Staaten	—5	—6	+1	+5	+7	+8	—2	—9	43
Texas	—29	—1	+3	+25	+11	0	—3	—7	79

[1] England, Nordsee, Ostsee, Deutschland.

Die Columne Summe der Änderung repräsentirt einigermaassen die Grösse der jährlichen Änderung in der relativen Häufigkeit der Windrichtungen; ein genaues Maass kann sie allerdings nicht sein, weil beim Zusammenfassen einzelner Stationen in Gruppen, wenn dieselben locale Abweichungen zeigen, wie dies besonders in Russland der Fall ist (s. Tabelle III), die Änderungen sich theilweise neutralisiren. Immerhin kann man sich aber doch durch den Anblick dieser Zahlen sogleich überzeugen, um wie viel bedeutender die jahreszeitliche Änderung in Ost-Asien und in Nord-Amerika ist, als in Europa.

Den Schlüssel zum Verständniss dieser Änderungen in der Windrichtung geben die Isothermkarten von Dove und die Isobaren von Buchan. Im Winter bilden sich über den nördlichen Theilen der beiden Continente Kältecentren, und die trockene frostdichte Luft erzeugt barometrische Maxima, denen in den nebenliegenden Meeren Räume hoher Temperatur und einer barometrischen Depression entsprechen. Auf der Ostseite und theilweise im Inneren erfolgt das langsame Abfliessen der trockenen kalten Luft; auf den Westseiten, und wie einige Beobachtungen im Innern Sibiriens vermuthen lassen, auch in der Höhe über dem kalten Unterstrom findet der Zufluss warmer Luft statt. Die Luftbewegungen auf den Westseiten sind heftig und stürmisch, da die warmen feuchten Luftmassen beim Eindringen in den kalten Continent beständig Wasserdampf verlieren und erkalten, und dadurch eine beständige Einbusse an Volumen und Masse erleiden. Über die Ursache der zufolge das Zuströmen auf der Westseite, der Abfluss an der Ostseite erfolgt, habe ich mich im 1. Theile näher ausgesprochen.

Im Sommer verhält es sich umgekehrt. Das Innere der Continente wird nun wärmer als das angrenzende Meer, die über den weiten Landflächen erhitzte Luft dehnt sich aus und steigt empor, der Luftdruck sinkt im Innern und im Osten von Asien um 23 Mm. vom Jänner bis Juli, im Innern Nord-Amerika's um 13 Mm. von December bis August, die Luft erhält auf allen Seiten einen Impuls, gegen das Festland zu strömen; in der ungleichen Grösse der barometrischen Unterschiede zwischen Winter und Sommer liegt auch die Erklärung der ungleichen Grösse der Änderung in den Windrichtungen in Amerika und Asien. Wichtig

für Nord-Amerika ist es, dass im Süden der mexikanische Meerbusen dem Aspirationscentrum feuchte Seeluft zuführen kann. Daraus erklärt sich wohl auch zum grössten Theil das Überwiegen des Süd und Südwest vor dem Ost und Südost. Nur die Verhältnisse von Texas erinnern an die von Ost-Asien, mit dem es übrigens auch nach seiner Lage zur See etwas übereinkommt.

Klimatologisch spricht sich die viel radikalere Veränderung in den Windrichtungen vom Winter zum Sommer in Ost-Asien gegenüber dem Osten von Amerika, in dem jährlichen Gange der meteorologischen Elemente klar aus. Die Herrschaft des Polarstroms während des Winters ist charakterisirt durch Lufttrockenheit, wenig Niederschläge und Heiterkeit des Himmels; die Herrschaft des Seewindes im Sommer durch Trübung, massenhafte Niederschläge und grosse Luftfeuchtigkeit. Ich erlaube mir nachfolgende höchst bezeichnende Zahlenwerthe hiefür anzuführen:

Jährliche Periode der relativen Feuchtigkeit.

	December	Jänner	Februar	März	April	Mai
Nertschinsk [1]	67	66*	68	74	66	59*
Peking [2]	57*	57	58	53	50*	52
	Juni	**Juli**	**August**	**September**	**October**	**November**
Nertschinsk	66	75	**78**	73	69	69
Peking	62	**78**	**·78**	68	60	57

Jährliche Periode der Bewölkung (0—4).

	December	Jänner	Februar	März	April	Mai
Nertschinsk [3]	0·84	0·62	0·31*	0·85	1·08	1·79
	Juni	**Juli**	**August**	**September**	**October**	**November**
	1·52	1·86	**2·08**	1·87	1·33	1·20

Nicolajewsk am Amur [4] Winter 1·30*, Frühling 1·61, Sommer 1·57, Herbst **1·72**.

Jährliche Periode des Regenfalls in Procenten der Jahresmenge.

	December	Jänner	Februar	März	April	Mai
Nertschinsk	1·0	0·7	0·5*	1·6	3·6	8·1
Peking	0·9	0·6*	1·2	1·5	2·1	5·9
	Juni	**Juli**	**August**	**September**	**October**	**November**
Nertschinsk	19·3	11·8	**31·9**	15·9	3·6	2·3
Peking	13·6	**32·7**	25·5	13·1	1·8	1·2

[1] 24stündige Mittel.
[2] Mittel aus 5^h 1^h 9^h Ortszeit.
[3] 2 Jahre 1865 und 66.
[4] 1 Jahr 1866.

Der jährliche Gang der Feuchtigkeit und Bewölkung im Osten Asiens dürfte in der ganzen gemässigten Zone kein Analogon mehr haben; er erinnert wie durch die höchst einseitig entwickelten und streng periodischen Windverhältnisse an die Tropen. Nach den Beobachtungen in den Wosnessenskischen Goldwäschen 58° 46′ NBr. 113° O. v. Paris sind auch noch im Innern Ostasiens dieselben Charakterzüge zu erkennen: Vorwaltender NW, obgleich das Thal von SW nach NO gerichtet ist, grösste Heiterkeit und Trockenheit im Winter. Folgendes sind nach F. Müller [1], die Zahlen für die heiteren Stunden und Stunden mit Niederschlag, in Procenten aller Beobachtungen:

Heitere Stunden:

Winter 50, Frühling 40, Sommer 40, Herbst 39.

Trüb und Niederschläge:

Winter 46, Frühling 61, Sommer 59, Herbst 62.

Dasselbe zeigen die Zahlen für die Regenwahrscheinlichkeit der Jahreszeiten zu Irkutsk:

Winter 0·06, Frühling 0·18, Sommer 0·27, Herbst 0·12.

Über Urga in der Gobi verdanke ich Herrn Wojeikoff folgende briefliche Mittheilung: „Nach bis jetzt unpublicirten Beobachtungen ist im Winter der NW entschieden herrschend. Im Sommer auch, aber mit ziemlich häufigem Auftreten von Ostwinden, die zuweilen auch Regen bringen.“

Aus Middendorff's grossem Werke über Ost-Sibirien führe ich noch einige Bemerkungen über die Winde an.

„In Utskoj 54½° N herrschen durch sieben Monate vom September an, wo sie mit Stürmen einsetzen, die winterlichen Westwinde. Die Ostwinde herrschen im Mai, Juni, Juli. Diese Ostwinde bringen der Küste Kälte, dichte Nebel und Staubregen. Jeder Hauch, der ausnahmsweise von West her Luft schafft, bringt Wärme bis 30° C. Am ochotskischen Meere werden die Nordwestwinde des Winters noch durch das Stanowoj-Gebirge verstärkt. Mit der Kraft eines Wasserfalls stürzt der Luftzug über den Kamm des dem Meere parallel laufenden Theiles des Stanowoj-Gebirges meerwärts, so dass Menschen und Lastthiere tagelang fruchtlos dagegen anstreben.“

---

[1] Bull. de la Soc. Imp. des Natural. de Moscou. Année 1870 No. 3 et 4.

An der ganzen Küste des Eismeeres herrschen Nordwinde im Sommer, am Taimirflusse beginnt nach Middendorff der Nordwind in der zweiten Junihälfte und dauert bis in den September hinein.

Obgleich auch in Nord-Amerika der Polarstrom, oder die Landwinde aus NW und W entschieden die Vorherrschaft haben, ist der jährliche Gang der relativen Feuchtigkeit, wenigstens in den östlichen Theilen der Vereinigten Staaten derselbe wie in Europa. Wir bemerken nur eine etwas grössere Lufttrockenheit Nord-Amerika's gegenüber Europa, welche den vorwiegenden Landwinden zugeschrieben werden muss.

Nach den Windrosen der Feuchtigkeit und Bewölkung für Toronto erniedrigen W und NW im Winter wie im Sommer die Feuchtigkeit beträchtlich, NW und N bringen Winter wie Sommer die grösste Heiterkeit. Aber ihre Herrschaft ist zu wenig einseitig ausgeprägt, um durch die Monatmittel in der jährlichen Periode zum Ausdrucke zu gelangen.

Im jährlichen Gange der Bewölkung lässt sich einige Analogie mit der jährlichen Periode desselben Elementes in Ost-Asien entdecken. Folgendes sind die sechsjährigen Mittel aus den Stunden 7^h 2^h 9^h für Washington und New-York.

	Washington:		New-York:	
	Bewölkung	Feuchtigkeit	Bewölkung	Feuchtigkeit
Winter	4·7*	63	4·5*	68
Frühling	5·2	52*	5·0	57*
Sommer	5·5	57	5·1	58
Herbst	5·5	57	5·4	60

Vielleicht liessen sich in den Monatmitteln für Bewölkung und Feuchtigkeit aus dem Innern Nord-Amerika's, mehr entrückt dem Einflusse der canadischen Seen und der Hudsonsbay auf dem N und NW, grössere Analogien mit dem Innern Ost-Asiens nachweisen.

In Ermanglung solcher Mittelwerthe, will ich eine sehr bezeichnende kurze Charakteristik der Winde im grossen Mississippithal von Theodor Olshausen hier anführen [1]: Der SW Wind erhöht in der Regel die Lufttemperatur, der NW geht fast

[1] Die Vereinigten Staaten von Nord-Amerika. Theil 1, das Mississippithal. Kiel 1853.

jeder Abkühlung voraus oder begleitet sie. Die Nordwestwinde, am mexikanischen Meerbusen los Nortes oder the Northern genannt, sind ausserordentlich kalt und trocken. Der Südwestwind ist theils trocken, theils feucht. Der erste weht nur am Tage und vorzüglich in der wärmeren Jahreszeit und bei schönem Wetter, erhebt sich einige Stunden nach Sonnenaufgang und legt sich bei Sonnenuntergang. Der feuchte SW Wind weht dagegen oft anhaltend mehrere Tage, bringt einen bewölkten Himmel und wenn er aufhört Regen oder Schnee. Er ist an sich warm, bewirkt aber im Sommer durch den Regen etwas Kühlung. Je weiter man von Süden nach Norden geht, um so häufiger wird der Nordwestwind; auch er tritt in zweifacher Art auf, als vorübergehender oder als dauernder. Ersterer kommt in Begleitung von Gewittern oder folgt nach denselben, letzterer ist der heftigste Wind, den man im Mississippithale kennt. Wenn er aufhört und Windstille eintritt, steigt auch das Barometer am höchsten und fällt das Thermometer am tiefsten. Er ist so kalt und durchdringend, dass er auf den Prairien von Jowa, Missouri, Illinois und Wisconsin oft dem Vieh und selbst dem Menschen verderblich wird. Der Nordostwind hält gewöhnlich mehrere Tage an, ist ein feuchter Wind, der oft Regen bringt, er ist nicht so kalt und heftig wie der Nordwest und nicht so warm und elektrisch wie der Südwest oder Südost [1].

Die grossen Schneefälle des Winters sind in Toronto fast durchweg von NO und O begleitet.

Ich habe im ersten Theile dieser Abhandlung West-Sibirien schon der Übergangszone angehörig betrachtet, welche im Winter das Gebiet vorwiegender südlicher Windrichtung von dem Gebiet des Polarstroms im Osten Asiens trennt. In der That zeigen Tobolsk und besonders Tara eine solche Häufigkeit östlicher Winde, dass sie sich hierin unmittelbar an Aralsk anschliessen, das schon entschieden im Strombette polarer Luftströmungen liegt. Nur Barnaul schien eine locale Ausnahmsstellung einzunehmen. Middendorff gibt aber an, dass noch ganz West-Sibirien unter dem Einflusse der Südwestwinde Europa's

---

[1] S. auch die Charakteristik der Winde in Canada von Smallwood. Zeitschrift für Meteorol. VI. Bd. S. 146.

stehe. In der That hat mir jetzt die Berechnung der Windrosen von Ischim gezeigt, dass nicht Barnaul, sondern Tara gestörte Windrichtungen hat, und eine hierauf vorgenommene Zusammenstellung der Windrichtungen an mehreren Orten des nördlichen West-Sibiriens hat mir die Richtigkeit von Middendorff's Angaben nachgewiesen. Herr Wojeikoff hat mir ebenfalls bestätiget, dass das nördliche West-Sibirien vom 53° N. Br. an im Gebiet der Südwestströmung liegt. „Zwischen 50° und 53° N. Br.“, bemerkt er, „besteht eine Übergangszone, in welcher die Luftströmungen sehr schwankend sind, südlich davon aber ist der NO und O herrschend. Die Richtung des oberen Stromthals hat einen bedeutenden Einfluss auf die Richtung des vorherrschenden Windes. Zu Barnaul und Krasnojarsk, wo die Flüsse von SW kommen, also die locale Windrichtung mit der allgemeinen zusammenfällt, haben wir darum so ausschliesslich Südwestwinde im Winter. In Tobolsk ist das Irtyschthal von SSO nach NNW gerichtet, und die Südostwinde erreichen deshalb eine so grosse Häufigkeit. In einem Gebiet, wo die Winde im Winter im ganzen schwach sind, muss die Strahlung und die hiedurch verursachte Bewegung der erkalteten Luftmassen thalabwärts einen grossen Einfluss auf die Windfahne haben. Sie haben schon auf eine derartige Erscheinung gelegentlich der Windrose von Jakutsk aufmerksam gemacht“ [1].

Aus dem Gebiete des vorwiegenden Polarstroms, dem südlichen West-Sibirien, Turkestan, Chiwa und Buchara haben wir wenig regelmässige Aufzeichnungen über die Windrichtungen. Ich führe deshalb noch einige Zeugen für das dort bestehende Übergewicht der Nordwinde an.

Butakoff sagt vom unteren Syr-Daria: „Die Winde wehen fast unaufhörlich aus nördlichen Himmelsstrichen und sind fast immer ziemlich heftig [2]. Nach Chanikoff ist dasselbe der Fall im Chanat Buchara. „Nordwinde herrschen beständig, mit der allergrössten Gewalt weht der Nordost, und zwar so anhaltend, dass ich mich im Verlaufe von acht Monaten in Buchara nur zehn Winde aus Süd erinnere.“ Auf dieselbe Erscheinung weisen

[1] Briefliche Mittheil. von 8. Mai 1871 aus S. Petersburg.

[2] Schreiben an A. v. Humboldt. Z. f. allg. Erdk. März 1858.

Karelin's Beobachtungen in den turkmanischen Steppen, v. Tschihatscheff's auf dem Zuge nach Chiwa und Abbot's in Chiwa selbst hin [1]. Danilewsky, der im Jahre 1842 einige Monate (Herbst und Winter) hindurch meteorologische Beobachtungen in Chiwa anstellte, gibt unter 77 Winden 41 zwischen N und O an, nur 21 von S bis W; von den übrigen Winden ist der SO der häufigste, der zwölfmal beobachtet wurde. Der Regen fiel fast ausschliesslich bei Südostwinden. Die Süd- und Südwestwinde sind trocken, wie Lenz in Herat durch psychrometrische Beobachtungen direct nachgewiesen. Die Trockenheit des SW, wenigstens für den Sommer, wird uns auch noch für Barnaul angegeben. Wenn selbst schon im Innern Nord-Amerika's der SW öfter als trockener Wind auftritt, dürfen wir uns freilich nicht darüber verwundern im Herzen Asiens. „Die Wirkung der Südwestwinde", sagt Teplouchoff, „macht sich im Altai sehr bemerkbar. Sie sind in der Regel so trocken, dass sie in kurzer Zeit die ganze Vegetation, die ihnen ausgesetzt ist, zum Absterben bringen. Wenn man im südwestlichen Altai einen Berg besteigt und sich gegen NO wendet, so sieht man eine öde Landschaft vor sich, die nur mit Artemisia-Arten und anderen dürftigen Steppenpflanzen bedeckt ist, und daher von weitem gelbgrau erscheint. Stellt man sich aber so, dass man SW vor sich hat, so sieht man eine mit frischem Grün, ja sogar oft noch mit einigen Waldüberresten bedeckte Gegend" [2].

Ich bedauere jetzt, keine atmische Windrose für Barnaul abgeleitet zu haben. Das Mitgetheilte stimmt übrigens trefflich mit der von mir berechneten Regenwindrose des Sommers für Tobolsk, nach welcher der NO die grösste Regenwahrscheinlichkeit bringt, S und SW die kleinste. Zu Samara und Orenburg sind die trockensten Windrichtungen, die aus SO und S, am feuchtesten W, NW, N. Es wäre wünschenswerth, für einen Ort in Sibirien, an dem die Windrichtungen am wenigstens local beeinflusst sind, Regenwindrosen zu besitzen, wie sie Köppen

[1] Mahlmann über die klimatischen Verhältnisse von Buchara. Monatsb. der Berliner Gesellschaft für Erdkunde 1844.

[2] Ein Blick auf das Klima und die Vegetation des westlichen Altai. Das Ausland. 1869.

für Sympheropol abgeleitet hat [1], denn gerade das Phänomen der Übergänge den Windrichtungen in einander ist es, welches bei den Niederschlägen die wichtigste Rolle spielt.

Specieller Theil und Literaturnachweise.

Ich lasse nun das Detail der von mir neu berechneten Windrosen folgen und die Angabe der Quellen, aus denen ich die Resultate fremder Berechnungen geschöpft habe. Ich kann mich aber in diesem zweiten Theile auf die Angabe des neu hinzugekommenen Materiales beschränken, da für jene Stationen, welche in beiden Abhandlungen gemeinsam vorkommen, schon früher alle nöthigen Nachweise gegeben worden sind.

Thermische und barische Windrosen enthält diese zweite Abhandlung als neu folgende:

Elsfleth 10 J. T. und L. berechnet von W. v. Freeden in: Nordwestdeutscher Wetterkalender.

Leipzig 30 J. blos T. Bruhns: Resultate aus den meteorologischen Beobachtungen in Sachsen. II. Jahrgang 1867.

Gratz J? T. und L. berechnet von J. Chavanne in: Das Klima von Gratz. 1871.

Riga 8 J. blos T. aus dem russ. Werke von Wesselovsky über das Klima von Russland.

Wologda. Unter Wologda habe ich die in demselben Werke von Wesselovsky gegebenen thermischen Windrosen der benachbarten Orte: Totma $2^1/_2$ J., Griasovetz 2 J. und Wologda $3^1/_2$ J. vereiniget.

Astrachan 3 J. nach Wesselovsky.

Marietta $6^1/_2$ J. T. 22 Jahre, Regenwindrose 27 J. Häufigkeit der Winde 40 J., berechnet von Ch. Schott: Results of Meteorol. Observ. made at Marietta. Washington 1868.

Brunswick T. 3 J. berechnet von Ch. Schott: Results of Meteorol. Observ. made at Brunswick Maine. Washington 1867. Das Mittel entspricht dem Sommerhalbjahr, gebildet aus

$$\frac{\text{Frühling} + 2 \times \text{Sommer} + \text{Herbst}}{4}$$

---

[1] W. Köppen: Die Wind- und Regenverhältnisse Tauriens. Repertorium für Meteorol. I. Bd.

Die thermischen Windrosen von Glasov, Pensa, Lugan für den Winter sind von Herrn A. v. Wojeikoff berechnet und mir freundlichst mitgetheilt worden. Die Windrosen von Oxford, Madrid, Samara, Toronto und die von mir berechneten für Hammerfest, Kursk, Orenburg, Tobolsk, Ischim, Providence werden ausführlicher mitgetheilt.

Für den Winter hatte ich die Berechnung der Windrosen blos aus einer täglichen Beobachtung für genügend erachtet; für den Sommer schien mir dasselbe Verfahren, wenigstens im vorhinein, ungenügend; weniger wegen des täglichen Ganges der Wärme und der ungleichen Wärmeunterschiede heiterer und trüber Winde an den Morgen und Nachmittagsstunden, als wegen der täglichen Periode der Winde, welche an verschiedenen Orten sehr ungleich auftreten, und die Mittel in verschiedener Weise stören kann. Es wäre schwierig, ja ohne genaue Localkenntnisse unmöglich gewesen, zu entscheiden, ob eventuell auftretende Anomalien im Gange der Temperatur und des Luftdruckes in der Windrose wirklich einem Orte eigenthümlich seien oder blos auf einer ausgeprägten täglichen Periode der Winde beruhten. Die vorliegenden Resultate der Berechnung der Windrosen aus zwei differenten Tageszeiten hat freilich gezeigt, dass diese Vorsicht, wenigstens für die in Rechnung gezogenen Orte, nicht nöthig gewesen wäre, aber die Berechnung ist darum nicht unfruchtbar geblieben. Ich habe die Häufigkeit der Winde, die Abweichungen der Temperatur und die Änderungen des Luftdruckes im Sommermittel für beide Tageszeiten gesondert mitgetheilt, und man wird aus diesen Zahlenwerthen manche charakteristische Eigenthümlichkeiten der Winde ableiten können. Auch für die regelmässige Drehung des Windes im Sinne Dove's wird man in diesen Zahlen weitere Belege finden.

Die Grundlage für die Tabellen der Häufigkeit der Winde im Winter und im Sommer waren vorzüglich Buchan's früher citirte Abhandlung, Wesselovsky's Klima von Russland, Coffin's Winds of the Northern Hemisphere, Mohns Norsk meteorologisk Aarbook, Kämtz Repertorium der Meteorologie und die von mir selbst vorgenommenen Rechnungen. Für Schweden verdanke ich Herrn Dr. Hildebrandsson in Upsala die Mittheilung der Häufigkeit von 16 Windrichtungen in jedem Monat von

mehreren Stationen für die Periode 1859—1863 [1]. Die Winde von Upsala weichen besonders durch die ausserordentliche Häufigkeit des Nordwindes von den Verhältnissen der andern Stationen auffallend ab.

Unter Schottland sind 55 Stationen vereiniget von Buchan selbst.

Nordfinnland 7 Stationen zwischen 65 und 62° NBr.

Südfinnland 6 Stationen unter 60° NBr.

Südwest-Europa 6 St. Corfù, Bologna, Malta, Toulouse, Oviedo, Gibraltar.

Westliche Steppen 6 St. Katherinoslav, Charkow, Odessa, Poltawa, Lugan, Taganrog.

Östliche Steppen 6 St. Samara, Krutez, Astrachan, Orenburg, Uralsk (Stadt), Nijne-Tschirsk.

Östlicher Ural 4 St. Katherinburg, Kourgan, Bogoslovsk, Nijne-Taguilsk.

Am Sir Daria 3 St. F. Peroffsky 44° 51′ N 65° 27′ O. v. Gr.; Fort. Nr. 1 45° 45′ N 62° 6′ W. v. Gr.

West-Grönland 2 St. Uppernivik, Godthaab.

Baffinbay nach Clintock.

Nördliche Uferstaaten 10 St. S. Johns, Brunswick, Eastport, F. Wollcott, Providence, Trenton, New-Bedford, New-York, Nantuket, Washington.

Südliche Uferstaaten 3 St. Beaufort, Augusta, Charleston.

Florida 3 St. Jacksonville, Warrington, Tampa Bay.

Arctisches Nord-Amerika 5 St. P. Kennedy, Melville J. Igloolik, Winter-Insel, Felixhafen.

Canada 3 St. Montreal, Kingston, Toronto.

Nördliches Mississippithal 8 St. F. Brady, Leavenworth, Prairie du Chien, F. Atkinson, F. Snelling, S. Louis, Councill Bluff, Rock Island.

Südliches Mississippithal 5 St. Glenwood, Towson, N. Orleans, Natchez, F. Jessup.

Texas 2 St. Austin, Goliad.

---

[1] Über die Winde der extremen Monate Jänner und Juli auf der skandinavischen Halbinsel hat Hildebrandsson eine eigene Schrift publicirt: Vindarnes frequens in Sverige under Jannuari och Juli.

Neu berechnete Windrosen für Temperatur, Luftdruck etc.

Für die nördliche gemässigte Zone.

Madrid 5 Jahre.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Absolut
				Temperatur Celsius.					
Winter	3·8*	4·9	5·0	5·6	6·3	**7·1**	6·7	5·7	5·3
Frühling	12·3	11·6*	13·7	15·9	**14·4**	14·2	13·3	12·0	12·8
Sommer	22·6	21·2*	23·9	24·6	25·6	**26·7**	24·0	21·8	23·5
Herbst	12·6*	12·7	12·8	14·3	15·1	**15·9**	14·3	12·8	13·5
				Luftdruck 700 Mm. +					
Winter	9·9	**11·8**	10·9	11·1	8·1	6·3*	9·2	9·1	709·8
Frühling	**7·9**	7·7	6·6	5·1	3·0*	3·0*	3·6	5·1	705·0
Sommer	**8·6**	8·3	8·5	7·7	6·9	6·0*	6·0	7·1	707·2
Herbst	8·2	9·0	**10·5**	7·4	5·8	5·1	4·4*	7·0	707·1
				Feuchtigkeit in Procenten.					
Winter	79	75	77	81	83	83	79	74	–
Frühling	59	62	63	62	69	66	68	60	–
Sommer	51	53	50	53	50	43	48	52	–
Herbst	68	70	69	73	73	68	68	68	–
				Bewölkung.					
Winter	3·3	2·7*	3·8	5·1	5·8	**6·6**	5·4	3·4	–
Frühling	2·8*	3·4	4·2	5·2	**6·8**	6·0	5·4	4·0	–
Sommer	2·1	1·6*	2·2	2·9	**3·3**	3·1	3·0	2·2	–
Herbst	3·2	3·0*	3·5	5·3	**5·7**	4·9	5·0	4·0	–
Jahr	2·8	2·7*	3·4	4·6	**5·8**	5·1	4·7	3·4	–
				Häufigkeit der Winde. Procente.					
Winter	11·2	28·8	11·6	9·8	10·6	12·7	6·8	8·5	–
Frühling	9·7	17·3	6·9	9·2	12·9	22·1	9·8	12·1	–
Sommer	8·6	13·9	9·3	9·1	10·1	23·1	12·4	13·4	–
Herbst	7·6	19·7	10·0	10·7	12·6	19·7	7·8	11·8	–
Jahr	9·3	19·9	9·4	9·9	11·5	19·4	9·2	11·4	–

Die „Observaciones meteor. efectuadas en el Real Observ. de Madrid 1864—68" herausgegeben vom Director der Sternwarte A. Aquilar enthalten für jeden einzelnen Monat Windrosen abgeleitet, aus denen obige Mittelwerthe berechnet worden sind. Es ist nicht angegeben, ob und wie die tägliche Periode der Temperatur bei der Ableitung der Wärmemittel für die einzelnen Windrichtungen berücksichtiget worden ist.

Oxford 10 Jahre.

Herr Robert Main theilt in den „Results of meteorol. Observations made at the Radcliffe Observatory Oxford“ jährlich barische und thermische Windrosen und die Zahl der Tage mit Niederschlägen bei den verschiedenen Windrichtungen für die einzelnen Monate mit. Diese Resultate der einzelnen Jahre habe ich zu zehnjährigen Mittelwerthen mit Rücksicht auf die ungleiche Häufigkeit der Winde in verschiedenen Jahren vereiniget. Die benutzten Jahrgänge sind 1854 und 56, dann 1860 — 67. Es muss bemerkt werden, dass Herr Main die 16 Windrichtungen nicht in der gewöhnlichen Weise auf 8 Richtungen reducirt, sondern jede Zwischenrichtung voll zu den beiden Hauptrichtungen hinzuschlägt.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Absolut
				Luftdruck 700 Millimeter +.					
December	59·7	63·9	55·7	52·8	53·9	55·1	55·8	56·9	56·1
Jänner	56·9	56·5	51·6	50·7	52·0	51·9	51·9	52·3	52·0
Februar	60·9	59·6	60·3	51·0	52·2	54·9	58·2	59·4	57·0
Winter	59·2	60·0	55·9	51·5	52·7	54·0	55·3	56·2	55·0
Abweich.	+4·2	+5·0	+0·9	—3·5	—2·3	—1·0	+0·3	+1·2	—
				Temperatur Celsius.					
December	2·1	1·4	4·8	6·7	7·1	5·9	4·2	1·8	5·1
Jänner	1·0	0·2	1·3	4·0	5·3	6·7	4·0	3·0	4·1
Februar	1·3	1·7	3·8	5·7	6·6	6·4	4·9	2·7	4·9
Winter	1·5	1·1	3·3	5·5	6·3	6·3	4·4	2·5	4·7
Abweich.	—3·2	—3·6	—1·4	+0·8	+1·6	+1·6	—0·3	—2·2	—
				Zahl der Winde.					
December	38	24	19	48	82	81	83	31	—
Jänner	27	25	24	42	105	94	57	29	—
Februar	38	45	27	28	74	82	53	46	—
Winter	103	94	70	118	261	257	193	106	—
Procente	8·6	7·8	5·8	9·8	21·7	21·4	16·0	9·0	—
				Regentage.					
December	11	4	8	25	47	34	26	3	—
Jänner	7	7	13	26	66	56	24	8	—
Februar	12	14	8	13	47	36	16	5	—
Winter	30	25	29	64	160	126	66	16	—
				Regenwahrscheinlichkeit.					
Winter	0·29	0·26	0·40	0·54	0·61	0·49	0·39	0·15	—
				Luftdruck 700 Millimeter +.					
Juni	58·6	56·1	56·3	54·5	55·3	54·5	56·6	58·2	55·4
Juli	59·8	59·5	58·4	54·6	52·0	53·6	55·6	58·0	55·3
August	57·9	57·3	55·4	52·3	52·7	54·5	55·4	57·8	54·5
Sommer	58 8	57·6	56·7	53·8	53·3	54·2	55·9	58·0	55·1
Abweich.	+3·7	+2·5	+1·6	—1·3	—1·8	—0·9	+0·8	+2·9	—

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Absolut
				Temperatur Celsius.					
Juni	13·7	14·3	15·7	15·9	14·7	14·1	14·0	14·2	—
Juli	16·1	15·6	15·6	17·4	16·1	15·9	14·9	14·8	—
August	14·6	15·3	16·7	16·5	15·7	15·7	15·3	14·5	—
Sommer	14·8	15·1	16·0	16·6	15·5	15·2	14·7	14·5	15·2
Abweich.	—0·4	—0·1	+0·8	+1·4	+0·3	0·0	—0·5	—0·7	—
				Zahl der Winde.					
Juni	49	22	12	23	79	92	71	49	—
Juli	45	17	12	24	72	105	75	48	—
August	33	26	20	25	91	112	80	28	—
Sommer	127	65	44	72	242	309	226	125	—
Procent	10·5	5·4	3·6	5·9	20·0	25·5	18·7	10·3	—
				Zahl der Regentage.					
Juni	11	6	5	15	44	51	24	16	—
Juli	6	4	3	11	44	47	27	10	—
August	11	5	8	15	42	45	30	7	—
Sommer	28	15	16	41	130	143	81	33	—
				Regenwahrscheinlichkeit.					
Sommer	0·22	0·23	0·36	0·57	0·54	0·46	0·36	0·26	—

Hammerfest 12 Jahre 1848—59 8h *a. m.*

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
				Temperatur Cels.					
Juni	3·6	4·6	6·4	9·2	10·9	6·9	6·7	5·1	9·4
Juli	6·2	6·7	11·1	13·0	13·5	10·9	8·5	8·0	12·6
August	7·4	9·1	9·6	11·7	13·0	9·9	9·5	7·7	11·1
Sommer	5·7	6·8	9·0	11·3	12·5	9·2	8·2	6·9	11·0
Abweich.	—4·0	—2·9	—0·7	+1·6	+2·8	—0·5	—1·5	—2·8	+1·3
				Häufigkeit der Winde.					
Juni	21·5	27·0	44·5	37·5	64·0	17·0	44·5	44·0	60
Juli	8·0	10·0	45·5	42·5	55·0	22·0	34·5	48·5	106
August	13·0	7·0	39·5	41·0	58·5	22·5	48·0	40·5	102
Sommer	42·5	44·0	129·5	121·0	177·5	61·5	127·0	133·0	268
Procente	5·1	5·3	15·5	14·5	21·2	7·3	15·2	15·9	—
				Tage mit Regen (oder Schnee im Juni).					
Juni	10·0	5	11	2	8	4·5	22·5	17·5	5
Juli	6	3	4·5	2·5	3·5	5·5	21·0	21·0	16
August	6	3	8	4	8	13	26·0	26·0	18
Sommer	22	11	23·5	8·5	19·5	23	69·5	64·5	39
				Regenwahrscheinlichkeit.					
Sommer	0·52	0·25	0·18	0·07	0·11	0·37	0·55	0·49	0·15

Glasof 1854—63.

Berechnet von A. v. Wojeikoff. Für den Winter (Allgemeine Mittel — 13·4).

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
				Temperatur Celsius.					
7h a. m.	—22·2	—25·1	—18·9	—16·0	—10·8	—9·9	—13·6	—18·9	—36·7
2h p. m.	—18·0	—18·9	—14·2	—11·9	—9·5	—7·8	—10·6	—15·2	—25·0
Mittel	—20·1	—22·0	—16·6	—13·9	—10·2	—8·8	—12·1	—17·0	—30·8
				Häufigkeit.					
7h	37	89	103	134	90	188	138	118	5
2h	24	60	100	136	104	200	165	106	5
				Procente.					
Mittel	3·4	8·4	11·3	15·1	10·8	21·6	16·8	12·6	

Lugan 1854—1864.

Berechnet von A. v. Wojeikoff aus der Stunde 8h Abends. Es sind aber nicht alle Beobachtungen benutzt, sondern nur jene, wo die Windrichtung der vier vorausgehenden Stunden dieselbe war, ausgenommen starke Winde.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
				Temperatur Celsius Wintermittel.					
Allg.[1]	—10·9	—11·4	—7·8	—3·4	—0·6	—2·0	—7·7	—9·3	—11·7
Heiter	—13·8	—16·4	—10·5	—	—2·7	—0·7	—12·2	—12·3	—17·2
Trüb	—8·1	—8·8	—6·7	—4·1	—0·8	—2·0	—5·1	—6·2	—5·1
				Häufigkeit.					
Heiter	11	41	25	0	5	22	40	17	130
Trüb	15	76	61	20	30	72	55	14	101
				Procente.					
Allgem.	5·3	23·7	17·4	4·1	7·1	19·0	19·2	4·2	—

Kursk 10 Jahre 1850—59; 7h und 9h.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.	Mittl. Absol.
				Temperatur Celsius.						
Juni	15·2	16·6	17·6	17·9	18·4	17·0	15·7	14·6	17·0	16·5
Juli	17·2	18·6	20·8	20·3	20·8	17·2	16·3	16·3	18·8	18·1
August	15·2	16·8	20·0	19·3	18·5	16·5	15·0	15·2	17·1	16·6
Sommer	15·9	17·3	19·5	19·2	19·2	16·9	15·7	15·4	17·6	17·1
Abweich.	—1·2	+0·2	+2·4	+2·1	+2·1	—0·2	—1·4	—1·7	+0·5	—
				7h Morgens.						
Abweich.	—1·2	—0·3	+2·5	+1·8	+2·3	—0·2	—1·5	—2·1	+0·4	16·7
				9h Abends.						
Abweich.	—1·3	+0·5	+2·3	+2·4	+1·6	0·0	—1·4	—1·4	+0·8	17·4
				Luftdruck 700 Millimeter +.						
Juni	42·3	42·7	43·3	40·7	40·9	38·5	40·4	39·7	41·6	41·0
Juli	39·9	39·3	38·1	38·2	37·9	37·5	38·6	40·1	40·3	39·5
August	43·7	42·0	41·7	40·8	42·3	39·4	41·1	42·3	42·5	42·2
Sommer	42·0	41·3	41·0	39·9	40·4	38·5	40·0	40·7	41·5	40·9
Abweich.	+1·1	+0·4	+0·1	—1·0	—0·5	—2·4	—0·9	—0·2	+0·6	—

[1] Mit Rücksicht auf die ungleiche Zahl der Fälle in den einzelnen Monaten.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
Änderung des Luftdruckes in 24 Stunden. Mm.									
Sommer	+**0·94**	+0·56	—0·05	—0·99	—1·27*	—1·22	—0·43	+0·51	—0·03
7ʰ a. m.	+0·81	+0·66	+0·05	—1·29*	—1·27	—1·12	—0·61	+**0·86**	—0·03
9ʰ p. m.	+**1·07**	+0·41	—0·18	—0·56	—1·27	—1·32*	—0·23	+0·15	—0·04

Steigen und Fallen des Barometers in Procenten der Häufigkeit jeder Windesrichtung.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calmen
Steigen	62	47	44	30	14	26	37	44	48
Fallen	34	33	35	54	63	51	43	34	49
Häufigkeit der Winde.									
Juni	84	57	27	65	27	54	46	71	169
Juli	76	47	21	31	25	56	53	124	187
August	98	46	24	44	21	45	35	109	198
Sommer	258	150	72	140	73	155	134	304	554
Procente.									
Sommer	20·1	11·7	5·6	10·9	5·7	12·0	10·4	23·6	30·1
Häufigkeit um 7ʰ a. m.									
Sommer	110	90	42	82	44	77	70	147	258
um 9ʰ Abends.									
Sommer	148	60	30	58	29	78	64	157	296
Häufigkeit in Procenten. Jahresübersicht.									
Winter	7·7	8·3	6·3*	**19·6**	10·0	20·0	11·1	17·0	—
Frühling	8·5*	9·0	10·8	**25·1**	9·5	16·2	10·3	10·2	—
Sommer	20·1	11·7	5·6*	10·9	5·7*	12·0	10·4	**23·6**	—
Herbst	7·5	6·5*	7·6	**28·7**	10·8	17·4	10·9	10·4	—
Jahr	10·9	8·9	7·6	21·1	9·0	16·4	10·7	15·3	—
Windstärke.									
Juni	2·29	1·82	2·25	2·23	2·44	2·50	2·44	2·24	—
Juli	2·22	2·11	2·33	1·84	2·28	2·52	2·40	2·38	—
August	2·23	2·06	1·92	2·25	2·14	2·56	2·60	2·31	—
Sommer	2·25	2·00*	2·17	2·11	2·29	**2·53**	2·48	2·31	—
Zahl der Tage mit Niederschlägen.									
Sommer	26	17	4	16	9	25	14	36	36
Regenwahrscheinlichkeit [1].									
Sommer	0·20	0·22	0·11*	0·23	0·24	**0·32**	0·21	0·24	0·13

[1] Es sind nur jene Niederschläge in Rechnung gezogen, welche in den Rubriken der Beobachtungszeiten mit Pl (Pluie) angemerkt sind, da für die gemessenen Niederschläge die zugehörige Windrichtung nicht zu entnehmen ist.

Samara.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.	Mitte
	Temperatur Celsius. Abweichung vom Mittel.									
December	—0·4	—2·6	—2·5	+0·1	+1·3	+4·4	—0·3	—0·1	—	—10·3
Jänner	—1·8	—2·7	—2·2	+1·7	+1·8	+1·8	+1·4	—1·0	—	—12·1
Februar	—1·4	—2·8	—1·7	—0·1	+1·8	+2·9	+0·4	—2·1	—	—12·4
Winter	—1·2	—2·7	—2·1	+0·6	+1·6	+3·0	+0·5	—1·1	—	—11·6
	Luftdruck Millimeter. Abweichung vom Mittel.									
December	—0·7	+4·6	+3·3	+0·7	—5·0	—4·0	+1·6	+7·0	+5·4	759·1
Jänner	—1·3	+1·8	+5·5	+6·2	+0·9	—2·1	—1·8	+1·5	+1·8	56·1
Februar	+3·0	+3·1	+4·7	—2·1	—4·7	—4·1	—1·7	—10·2	—0·6	60·6
Winter	+0·3	+3·2	+4·5	+1·6	—2·9	—3·4	—0·6	—0·6	+2·2	758·6
	Mittl. Häufigkeit der Winde in Tagen.									
December	2·2	4·2	3·6	1·6	4·2	7·7	3·6	0·5	3·4	—
Jänner	1·4	4·7	4·5	3·1	5·3	7·4	2·0	0·5	2·1	—
Februar	3·4	3·9	3·9	1·4	3·8	7·0	3·4	0·4	2·1	—
Winter	7·0	12·8	12·0	6·1	13·3	22·1	9·0	1·4	7·6	—
	In Procenten.									
Winter	8·3	15·2	14·3	7·2	15·8	26·3	10·7	1·6	—	—
	Temperatur Celsius. Abweichung vom Mittel.									
Juni	—2·3	—0·7	+2·8	+2·7	+2·1	+0·1	+0·3	—1·1	19·3	—
Juli	—2·0	—0·0	+0·3	+4·8	+1·1	+0·1	—0·3	—2·8	22·5	—
August	—2·5	—1·0	+0·9	+2·9	+2·1	+1·0	—0·0	0·0	19·1	—
Sommer	—2·3	—0·6	+1·3	+3·5	+1·8	+0·4	0·0	—1·3	—	—
	Luftdruck in Millimeter. Abweichung vom Mittel.									
Juni	+0·1	+0·8	+0·6	—4·8	—0·6	—1·2	—0·5	+0·5	+1·9	749·1
Juli	+0·6	+0·4	—0·6	+1·0	—2·1	—1·1	+0·4	—3·5	+0·2	48·9
August	+0·6	+1·0	—1·7	—1·1	+0·6	—0·7	—1·3	—1·5	+2·7	49·8
Sommer	+0·4	+0·7	—0·6	—1·6	—0·7	—1·0	—0·5	—1·5	+1·6	749·3
	Feuchtigkeit in Procenten.									
Juni	60·9	60·5	59·2	47·1	57·2	63·4	59·9	61·7	60·7	—
Juli	67·0	58·2	56·4	36·1	62·2	62·1	61·8	68·4	52·1	—
August	64·6	65·6	61·8	58·9	59·0	60·5	65·0	58·5	59·9	—
Sommer	64·2	61·4	59·1	47·4	59·5	62·0	62·2	62·9	57·6	—
	Häufigkeit der Winde (Tage).									
Juni	5·7	5·3	2·0	0·5	1 7	3·3	8·5	1·2	1·8	—
Juli	4·3	6·7	2·8	0·3	1·6	2·9	9·5	0·3	2·1	—
August	5·3	5·4	2·6	0·7	1·3	3·7	9·5	0·3	2·2	—
Sommer	15·3	17·4	7·4	1·5	4·6	9·9	27·5	1·8	6·1	—
	Procente.									
Sommer	17·9	20·4	8·6	1·7	5·4	11·5	32·3	2·1	—	—

Berechnet von Dr. Ucke, russisch publicirt, mir mitgetheilt von Dr. A. v. Wojeikoff in St. Petersburg. Über die Art der Berechnung

ist nichts gesagt, wahrscheinlich sind alle drei Beobachtungsstunden in Rechnung gezogen; diese waren in den ersten 5 Jahren 7h 2h 10h, dann 7h 3h 11h. Die Lage ist frei, die Wohnung von Dr. Ucke liegt circa 100 Fuss über der Wolga in demselben Niveau, wie der grösste Theil der Stadt.

Thermische Windrosen 11 Jahre: Juni 1854 bis Mai 1865. Barische Windrosen 8 Jahre: Juni 1857 bis Mai 1865.

Orenburg 12 Jahre 1849—64 [1].

10h Morgens und 10h Abends.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.	Absol.
				Temperatur Celsius.						
Juni	17·9	19·6	21·7	21·0	18·7	17·5	17·9	17·5	23·7	19·0
Juli	21·5	22·7	24·2	25·9	23·5	19·2	21·7	22·4	24·2	22·4
August	19·0	19·6	22·0	23·2	21·6	18·2	18·7	17·6	21·7	19·[illegible]
Sommer	19·5	20·6	22·6	23·4	21·3	18·3	19·4	19·2	23·2	20·4
				Abweichungen.						
Mittel	—0·9	+0·2	+2·2	+3·0	+0·9	—2·1	—1·0	—1·2	+2·8	—
10h a. m.	—0·8	+0·3	+1·7	+2·5	+0·8	—2·0	—0·7	—1·0	+0·7	22·[illegible]
10h p. m.	—1·1	+0·1	+2·8	+3·3	+1·0	—2·3	—1·2	—1·6	+4·3	1[illegible]·[illegible]
				Luftdruck 700 Millimeter +.						
Juni	49·6	50·9	50·6	49·8	48·5	48·2	47·6	49·3	51·1	49·4
Juli	48·2	48·5	48·9	47·8	47·6	45·1	46·5	47·3	47·5	47·[illegible]
August	51·4	51·6	51·5	50·5	48·5	49·4	49·0	48·7	51·7	50·[illegible]
Sommer	49·7	50·3	50·3	49·4	48·2	47·6	47·7	48·4	50·1	49·[illegible]
Abweich.	+0·6	+1·2	+1·2	+0·3	—0·9	—1·5	—1·4	—0·7	+1·0	—

Luftdruck-Änderung in Millimeter.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
Sommer	+0·63	+0·16	—0·31	—1·31	—1·03	—0·43	—0·16	+0·72	—0·4[illegible]
10h a. m.	+0·55	+0·05	—0·37	—0·65	—0·98	—0·63	—0·04	+1·10	—0·4[illegible]
10h p. m.	+0·71	+0·27	—0·24	—2·34	—1·08	—0·01	—0·31	+0·53	—0·44

Steigen und Fallen des Barometers in Procenten der Häufigkeit jeder Windrichtung.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
Steigen	57	50	43	32	31	39	46	56	41
Fallen	40	48	54	67	66	58	51	40	[illegible]

Häufigkeit der Winde.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
Juni	176	59	146	13	57	39	147	60	[illegible]
Juli	192	85	133	14	68	31	135	49	[illegible]
August	165	65	138	11	68	46	165	41	[illegible]
Sommer	533	209	417	38	193	116	447	150	[illegible]
10h a. m.	265	104	208	23	107	71	249	50	[illegible]
10h p. m.	268	105	209	15	86	45	198	100	[illegible]

[1] Monate mit unvollständigen Beobachtungen weggelassen.

Häufigkeit in Procenten.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.	Abs.
Sommer	25·4	10·0	19·8	1·8	9·2	5·5	21·2	7·1	—	—

Windstärke Summen.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.	Abs.
Sommer	1290	485	993	84	462	303	1092	356	—	—

Procente.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.	Abs.
Sommer	25·5	9·6	19·6	1·6	9·1	6·0	21·6	7·0	—	—

Mittel.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.	Abs.
Sommer	2·42	2·32	2·38	2·21	2·40	2·61	2·44	2·37	—	—

Häufigkeit der Winde (in Procenten) nach den Jahreszeiten.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.	Abs.
Winter	12·5	15·0	26·0	6·0	14·5	12·0	11·0	3·0	—	—
Frühling	14·9	12·9	27·5	5·1	7·7	10·8	16·9	4·2	—	—
Sommer	25·4	10·0	19·8	1·8	9·2	5·5	21·2	7·1	—	—
Herbst	14·8	10·6	17·2	4·1	11·2	15·4	21·5	5·2	—	—

Feuchtigkeit in Procenten.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.	Abs.
Juni	57·3	57·7	57·0	57·5	59·5	57·8	60·6	57·3	49·2	—
Juli	53·3	55·1	51·2	40·3	49·8	56·8	54·9	50·8	51·4	—
August	54·3	55·2	55·0	52·3	51·6	55·8	57·9	57·6	55·7	—
Sommer	55·0	56·0	54·4	50·0	53·6	56·8	57·8	55·2	52·1	—

Tobolsk 10 Jahre 1852—61 (7h, 3h).

Temperatur Celsius.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.	Abs.
Juni	12·8	15·8	16·7	18·0	16·7	16·9	15·2	12·8	18·9	15·4
Juli	17·1	18·9	20·5	22·1	23·2	20·9	20·3	17·0	20·6	19·9
August	14·2	16·0	16·2	19·8	19·1	18·0	16·3	15·3	19·0	17·0
Sommer	14·7	16·9	17·8	20·0	19·7	18·6	17·3	15·0	19·5	17·4
Abweich.	—2·7	—0·5	+0·4	+2·6	+2·3	+1·2	—0·1	—2·4	+2·1	—
7h	—2·5	—0·1	+0·4	+2·7	+1·8	+0·9	—1·0	—2·0	+0·7	15·1
3h	—3·0	—0·9	+0·2	+2·6	+2·8	+1·5	+0·6	—2·9	+3·7	19·8

Luftdruck 700 Millimeter +.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.	Abs.
Juni	51·2	49·1	51·6	50·3	48·3	47·9	49·3	50·0	49·6	49·8
Juli	49·8	49·4	48·7	49·2	50·0	47·2	49·9	48·2	48·6	49·1
August	51·3	51·5	50·2	49·2	50·8	48·5	51·5	51·1	48·3	50·3
Sommer	50·8	50·0	50·2	49·6	49·7	47·9	50·2	49·8	48·8	49·7
Abweich.	+1·1	+0·3	+0·5	—0·1	0·0	—1·8	+0·5	+0·1	—0·9	—

Luftdruck-Änderung Millimeter.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
Sommer	+1·37	+0·17	+0·03	—1·28	—0·90	—0·84	+0·61	+0·74	+0·50
7h	+1·41	+0·38	+0·09	—1·46	—0·84	—0·72	+0·90	+0·51	+0·56
3h	+1·33	—0·04	—0·03	—1·10	—0·95	—0·97	+0·36	+0·91	+0·33

Steigen und Fallen des Barometers in Procenten der Häufigkeit jeder Windrichtung.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
Steigen	65	50	50	32	37	39	52	53	56
Fallen	35	43	46	67	61	59	45	46	40

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
				Häufigkeit der Winde.					
Juni	77	43	42	100	43	86	60	133	9
Juli	64	67	42	83	84	61	54	129	36
August	80	42	28	82	94	91	67	108	28
Sommer	221	152	112	265	221	238	181	370	73
Procente	12·5	8·6	6·3	15·1	12·5	13·5	10·3	21·0	
7ʰ	114	73	58	132	103	121	85	174	53
3ʰ	107	79	54	133	118	117	96	196	20
				Zahl der Niederschläge.					
Juni	17	12	7	22	8	15	11	24	1
Juli	11	21	5	18	10	12	8	20	1
August	18	8	6	14	17	13	12	29	1
Sommer	46	41	18	54	35	40	31	73	3
Procente	14	12	5	16	10	11	10	21	1
				Regenwahrscheinlichkeit.					
Sommer	0·21	0·27	0·16	0·20	0·15	0·17	0·17	0·19	0·04
				Übersicht der jährlichen Periode der Winde.					
Winter	4·5	4·0*	7·0	**30·0**	21·0	12·0	9·0	12·5	—
Frühling	5·8	4·7*	7·0	**22·8**	18·8	14·0	9·2	17·5	—
Sommer	12·5	8·6	6·3*	15·1	12·5	13·5	10·3	**21·0**	—
Herbst	4·7	3·5*	4·7	15·3	16·4	**23·5**	17·6	14·0	—

Ischim 10 Jahre 1852 — 1861.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.	Abs.
				Temperatur Celsius. 6ʰ und 2ʰ.						
Juni	14·3	14·7	14·1	17·1	17·8	16·6	15·0	13·1	17·8	15·6
Juli	17·5	18·8	20·8	20·4	20·6	19·4	17·8	17·3	21·1	19·0
August	15·1	16·1	14·6	17·1	17·5	15·1	15·6	15·4	18·0	15·9
Sommer	15·6	16·5	16·5	18·2	18·6	17·0	16·1	15·3	19·0	16·8
				Abweichungen vom Mittel.						
Sommer	—1·2	—0·3	—0·3	+1·4	+1·8	+0·2	—0·7	—1·5	+2·2	16·8
6ʰ a. m.	—1·2	0·0	0·0	+1·6	+1·2	+0·2	—1·1	—1·6	+1·3	14·0
2ʰ p. m.	—1·2	—0·7	—0·8	+1·1	+2·3	+0·2	—0·3	—1·5	+2·9	19·7
				Häufigkeit der Winde.						
Juni	76	64	22	73	60	135	50	86	—	—
Juli	107	86	41	53	46	91	50	84	—	—
August	71	88	35	52	52	108	67	111	—	—
Sommer	254	238	98	178	158	334	167	281	132	—
6ʰ a. m.	127	119	52	82	73	176	77	125	89	—
2ʰ p. m.	127	119	46	96	85	158	90	156	43	—
				Häufigkeit in Procenten.						
Sommer	14·9	13·9	5·8	10·4	9·2	19·6	9·8	16·4	—	—
				Windstärke.						
Sommer	2·40	2·31*	2·31*	2·38	2·36	2·46	**2·49**	**3·34**	—	—

Winter 2ʰ NM.

Temperatur Celsius.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.	Abs.
Dec.	—21·6	—17·3	—16·9	—18·9	—13·2	—13·0	—15·5	—22·5	—11·2	—15·3
Jänn.	—21·6	—22·1	—19·9	—15·9	—14·6	—15·8	—19·5	—20·2	—18·4	—17·7
Febr.	—23·1	—18·1	—16·8	—11·7	—11·2	—12·6	—13·4	—16·4	—18·2	—14·8
Wint.	—22·1	—19·2	—17·9	—13·8	—13·0	—13·8	—16·1	—19·7	—15·9	—15·9
Abw.	—6·2	—3·3	—2·0	+2·1	+2·9	+2·1	—0·2	—3·8	0·0	—

Häufigkeit der Winde.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.	Abs.
Decemb.	16	17	5	24	45	135	30	31	7	—
Jänner	22	16	19	20	34	118	35	34	12	—
Februar	28	13	25	25	25	100	26	24	17	—
Winter	66	46	49	69	104	353	91	89	36	—
Proc.	7·6	5·3*	5·6	8·0	12·0	40·7	10·5	10·3	—	—

Providence 10 Jahre 1850—1859 [1].

6ʰ a. m. und 1ʰ p. m.

Temperatur Celsius.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Abs.
Juni	17·9	17·3	19·7	20·2	19·9	21·4	22·4	19·7	20·0
Juli	20·8	19·5	20·4	22·8	23·3	24·8	25·3	22·2	22·9
August	19·8	19·7	20·6	21·7	22·2	22·9	21·1	19·9	21·0
Sommer	19·5	18·8	20·2	21·6	21·8	23·0	22·9	20·6	21·3

Abweichungen vom Mittel.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Abs.
Sommer	—1·8	—2·5	—1·1	+0·3	+0·5	+1·7	+1·6	—0·7	—
6ʰ a. m.	—1·9	—1·9	—1·1	+0·9	+1·2	+1·9	+0.7	—1·2	17·6
1ʰ p. m.	—1·6	—3·1	—1·0	—0·3	—0·2	+1·6	+2·2	—0·2	25·0

Luftdruck 700 Millimeter +.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Abs.
Juni	58·3	56·5	56·8	55·4	55·5	54·5	53·2	55·3	55·3
Juli	59·0	57·6	56·7	57·8	56·3	56·0	56·4	56·4	56·5
August	56·4	58·0	57·6	56·0	57·6	56·5	55·8	56·7	56·8
Sommer	57·9	57·4	57·0	56·4	56·5	55·7	55·1	56·1	56·2
Abw.	+1·7	+1·2	+0·8	+0·2	+0·3	—0·5	—1·1	—0·1	—

Barometer-Änderung Millimeter.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW
Juni	+1·07	+1·25	—2·49	—1·34	—1·17	—1·85	+0·23	+1·34
Juli	+1·65	+1·47	—0·20	—0·30	—1·32	—1·37	—0·49	+1·93
August	—0·38	+0·89	—0·53	—1·96	—1·02	—1·12	+0·56	+1·70
Sommer	+0·78	+1·20	—1·07	—1·20	—1·17	—1·45	+0·10	+1·66
6ʰ a. m.	+0·51	+1·07	—1·32	—1·59	—1·57	—1·52	—0·27	+1·47
1ʰ p. m.	+0·78	+1·29	—0·51	—1·07	—0·86	—1·32	+0·40	+1·93

---

[1] Juli lückenhaft, in noch höherem Grade der August, daher für letzteren Monat 12 Jahrgänge in Rechnung gezogen.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW
Steigen oder Fallen des Barometers in Procenten der Häufigkeit jeder Windrichtung.								
Steigen	48	62	33	28	25	23*	43	59
Fallen	35	27*	55	61	51	62	39	28*
Änderung des Luftdruckes nach Wojeikoff (5 Jahre) Millimeter [1].								
Winter	—1·6	—3·4	—5·2	—11·6	—5·0	—2·7	+1·9	+3·3
Frühling	+1·7	—0·4	—3·9	—3·6	—1·8	—1·7	+2·1	+1·4
Sommer	+1·6	+1·1	—1·5	—1·5	—1·4	—0·7	+0·6	+1·9
Herbst	+0·3	—0·8	—3·0	—4·1	—3·5	—1·7	+1·6	+2·4
Häufigkeit der Winde.								
Juni	24	102	11	41	71	177	38	130
Juli	24	95	12	40	53	193	49	132
August	39	105	22	48	41	182	55	159
Sommer	87	302	45	129	165	552	142	421
6h a. m.	63	144	24	44	71	263	63	258
1h p. m.	24	158	21	85	94	289	79	163
Procente der Gesammtzahl.								
Sommer	4·7	16·4	2·4	7·0	9·0	30·0	7·7	22·8
Jahresübersicht der Häufigkeit der Winde. Procente.								
Winter	7·0	14·0	3·0	4·0	5·0	15·0	12·0	40.0
Frühling	4·4	15·5	2·6	9·8	11·3	18·3	6·9	31·2
Sommer	4·7	16·4	2·4	7·0	9·0	30·0	7·7	22·8
Herbst	3·7	16·6	2·3	3·7	4·8	28·3	6·7	33·9
Windstärke Mittel.								
Sommer	1·54	1·69	1·38	1·90	1·75	1·93	1·75	1·74
Windstärke Summen.								
Sommer	134	510	62	247	289	1066	249	733
Zahl der Tage mit Niederschlag.								
Sommer	2	22	5	10·5	8·5	22	3	2·5
Regenwahrscheinlichkeit.								
Sommer	0·05	0·14	0·22	0·16	0·10	0·08	0·04	0·01*
Bewölkung.								
Juni	4·2	6·3	7·6	5·8	6·1	5·8	3·2	2·6*
Juli	3·8	7·8	6·7	4·9	6·6	5·8	4·1	2·7*
August	6·7	6·6	7·0	7·2	5·7	4·9	3·3	2·5*
Sommer	4·9	6·7	7·1	6·0	6·1	5·5	3·5	2·6*

---

[1] Monatsberichte der Berliner Akademie 1865. Wie man sieht, stimmen diese aus einer kürzeren Beachtungsweise abgeleiteten Änderungen des Barometers trefflich mit den von mir aus einer längeren Reihe berechneten überein.

Toronto.

Temperatur Celsius.

Thermische Windrose 3 Jahre. Abweichungen vom Mittel.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
Winter	—5·4	+0·4	+2·0	+2·0	+2·3	+3·2	—0·5	—2·9	—0·9
Sommer	—0·2	—0·5	—1·1	—1·1	+0·1	+1·2	+0·9	—0·3	+0·2

Häufigkeit einer Abweichung von +8°2 C. (15° F.) vom Mittel der betreffenden Stunde (1853—62). Zahl der Fälle

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
Winter	6·5	17·5	27·5	11·5	21·0	54·5	19·0	6·5	12
Sommer	4·5	1·5	1·0	2·5	18·5	16·0	12·5	8·5	3
Jahr	22·5*	39	63	24	64	**121**	65·5	38	28

Häufigkeit einer Abweichung von —8°2 C. (1853—62).

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
Winter	200	71·5	3·5	2	0	43	143·5	147·5	33
Sommer	4	5	4·5	0	2	0·5	2·5	9·1	1
Jahr	**252·5**	94	22	3*	4	55·5	190·5	245·5	42

Änderung der Temperatur von 6h a. m. — 6h a. m. (1854—59).

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
Winter	—2·1	+1·7	+4·5	+3·2	**+5·8**	+1·9	—1·7	—3·8*	—
Frühling	—1·0	+0·5	+1·9	**+2·7**	+2·2	+1·0	—1·5	—2·0*	—
Sommer	—1·5	+0·6	+0·7	**+1·6**	+1·1	+0·9	—1·1	—2·1*	—
Herbst	—2·5*	0·0	+2·1	+2·8	**+3·5**	+1·0	—1·9	—2·2	—

Häufigkeit einer Temperatur-Erhöhung in Procenten aller Beobachtungen jeder Windesrichtung 1854—59.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
Winter	42	64	86	**100**	75	66	36	27*	—
Sommer	21*	52	62	71	**74**	72	39	27	—
Jahr	34	57	75	**77**	74	63	37	31*	—

Barische Windrose. Abweichung vom Mittel in Millimetern. 1860—62.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
Winterhalbj.	+2·9	+0·9	+0·5	+0·2	—0·9	—3·0	—1·4	+0·4	+0·7
Sommerhalbj.	+0·8	+0·2	+0·4	+1·4	+0·7	—2·6	—2·9	—0·6	+0·8

Änderung des Luftdruckes von 6h a. m. bis 6h a. m. 6 Jahre (1854—59)

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
Winter	+1·6	—5·8	—8·7	—10·8*	—6·1	—1·7	+4·1	**+5·5**	—
Frühling	+2·1	—2·0	—5·4*	—4·8	—3·2	—0·2	+4·0	**+4·8**	—
Sommer	+2·3	—1·1	—2·1	—3·1*	—1·4	—0·0	+2·2	**+3·3**	—
Herbst	+3·6	—1·1	—4·4	—6·6*	—3·1	—1·4	+3·6	**+4·3**	—

Häufigkeit eines steigenden Luftdruckes in Procenten aller Beobachtungen jeder Windesrichtung 6 Jahre.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
Winter	65	21	12	7	6*	40	76	**85**	—
Sommer	64	38	31	20*	32	47	76	**85**	—
Jahr	72	34	20	15*	23	44	77	**84**	—

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
Relative Feuchtigkeit in Procenten. Abweichung vom Mittel 6 Jahre (1854—59).									
Winter	+0·5	+4·2	**+6·2**	+4·2	+1·6	0·0	—2·8	—3·3*	—
Sommer	—5·8	+1·1	**+1·8**	—1·4	—1·5	+0·8	—4·0	—6·8*	—

Bewölkung 0—10 (1853—1859).

Winterhalbj.	6·5	8·3	**8·8**	8·3	7·3	7·0	6·7	5·8*	6·6
Sommerhalbj.	4·3	**7·0**	6·6	5·4	4·9	**6·2**	5·5	4·1*	4·6
	N	NNO	NO	ONO	O	OSO	SO	SSO	
Jahr	5·0	6·5	7·4	**8·0**	7·0	6·4	5·7	4·9	—
	S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW	
	4·8*	5·8	**6·7**	6·4	5·7	5·3	5·3	4·8*	5·5

Regenwindrosen 1853—62.

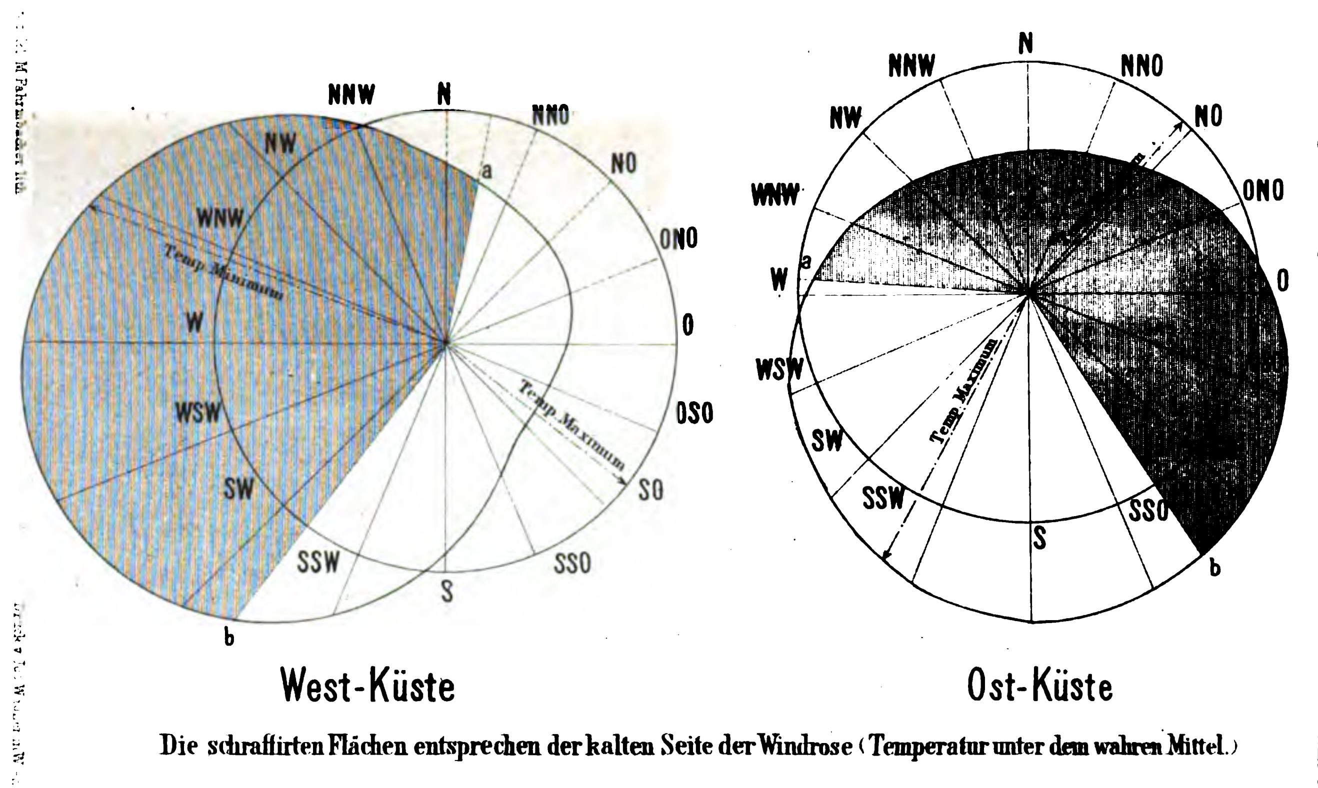
	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	Calm.
1. Winterhalbjahr. (Regenwahrscheinlichkeit.)									
Allgemein	0·18	0·31	**0·52**	0·44	0·38	0·27	0·19	0·16*	0·28
bis 2·5 Mm.	0·11*	0·14	0·18	**0·20**	0·19	0·16	0·14	0·12	0·17
über 12·7 M.	0·02	0·05	**0·10**	0·05	0·02	0·02	0·01	0·01*	0·01
2. Sommerhalbjahr. (Regenwahrscheinlichkeit.)									
Allgemein	0·33*	0·47	0·49	0·37	0·35	**0·51**	0·49	0·38	0·34
bis 2·5 Mm.	0·17*	0·20	0·21	0·17*	0·18	0·28	**0·31**	0·23	0·21
über 12·7 M.	0·05	0·10	**0·11**	0·07	0·05	0·07	0·04	0·04*	0·03
Häufigkeit des Schneefalls. October bis April incl.									
Procente	15·2	11·4	8·7	3·7	4·3	13·8	23·5	19·4	—
Wahrscheinl.	0·41	0·38	0·25	0·27	0·24	0·31	0·41	0·39	—
Grosser Schneefall 5 Zoll (inches) und darüber.									
Procente	18	25	29	3	1	7	8	9	—

Allgemeine Regenwindrose des Jahres (Schnee und Regen). Wahrscheinlichkeit eines Niederschlages 1853—59.

N	NNO	NO	ONO	O	OSO	SO	SSO	
0·45	0·50	0·59	**0·64**	0·58	0·52	0·45	0·43	
S	SSW	SW	WSW	W	WNW	NW	NNW	Calm.
0·41*	0·46	0·53	0·55	**0·56**	0·48	0·45	0·46*	0·43

Häufigkeit der Winde in Procenten.

	N	NO	O	SO	S	SW	W	NW	
Winter	14·5	10·5	8·9	3·4*	4·4	18·5	**23·5**	16·2	—
Frühling	12·9	11·1	17·5	6·4*	8·5	11·0	13·9	**18·7**	—
Sommer	13·5	9·1	13·9	8·3*	15·3	12·6	10·1	**17·2**	—
Herbst	13·4	10·8	12·4	6·0*	9·9	15·0	**16·4**	16·1	—



Die schraffirten Flächen entsprechen der kalten Seite der Windrose (Temperatur unter dem wahren Mittel.)

M. Fahrmbacher lith.

Druck v. Jos. Wagner in Wien



Kingston: Results of Meteorological Observations made at the Magn. Observatory Toronto. 1853—62. Ich habe die von Prof. Kingston berechneten Windrosen auf 8 Richtungen reducirt und vielfach, besonders bei den Regenwindrosen, die Form der Darstellung völlig geändert, um die Resultate allgemeiner vergleichbar zu machen. Die barischen und thermischen Windrosen beruhen noch auf zu wenig Jahrgängen, aber es scheint dass Hr. Kingston auch für die folgenden Jahresreihen welche berechnet hat, daher ich davon abstand, selbständig neue Mittel für den Sommer abzuleiten.

Zur Histologie der Synovialhäute.

Von Dr. **Ed. Albert** in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Juli 1871.)

Übereinstimmend mit dem Systeme von Bichat wurden die Synovialmembranen der Gelenke, der Sehnenscheiden und Schleimbeutel bis auf die neuere Zeit den serösen Membranen zunächst gestellt. Nach den gangbaren Vorstellungen wären es seröse Säcke, welche allenthalben geschlossen, in den Gelenken nicht nur die Innenfläche der Kapsel auskleiden, sondern auch den Knorpel überziehen; in den Sehnenscheiden wiederum nicht nur die fibröse Scheide von innen, sondern auch die Sehne von aussen bedecken und mitunter eine mesenteriumartige Duplicatur — das Mesotendon — zur Sehne abgeben. Die innerste Lage derselben wurde demgemäss als Epithel aufgefasst. (Henle, allg. Anat. S. 369). Im J. 1848 hat aber Birkett auf die platte Anordnung der Knorpelzellen an den Gelenkflächen aufmerksam gemacht und nachgewiesen, dass dieselbe zu einer Verwechslung mit Epithel geführt hat. Durch diese seither oft bestätigte Erfahrung war für die Synovialis der Gelenke die Vorstellung eines geschlossenen Sackes beseitigt. Im J. 1849 hat Reichert gefunden (Archiv für Anat. 1849, Jahresber. S. 16), dass beim Erwachsenen nur an jenen Stellen der Synovialis Epithel vorhanden sei, welche sich der Reibung entziehen. Es ist jedoch aus Reichert's kurzer Angabe nicht zu ersehen, ob er blos die Knorpel und ihre nächste Umgebung, oder auch andere Stellen meint. Als Recklinghausen im J. 1862 seine Methode der Versilberung thierischer Gewebe bekannt machte, wendete er bezüglich der Sehnen gegen die Henle'sche Vorstellung ein, dass die dichte Anordnung der Zellen an der Oberfläche der Sehnen noch nicht zu dem Spruche berechtige, dass diese Schichte als epitheliale aufzufassen sei, da die Silberpräparate die Blutgefässe als nackt

erkennen lassen, und die epithelähnlichen Zeichnungen nur zwischen den Capillarmaschen auftreten. Dadurch war das gebräuchliche Schema auch für die Sehnenscheiden in Frage gestellt. Einer selbständigen und umfassenderen Untersuchung unterzog die Gelenksmembranen erst Hüter (Virch. Archiv Bd. 36, S. 25) und kam auf Grund der Versilberungsmethode zum Schlusse, dass die Gelenkssynovialis keine Epithellage besitze, sondern dass sie von einem besonders modificirten Bindegewebe ausgekleidet sei, dessen dicht an einander liegende Zellen bald epithelähnliche (epithelioide), bald den Hornhautkörperchen ähnliche (keratoide) Gestaltung besitzen, dass die Gefässe überall nackt sind, und dass man die Intima der Gelenkskapseln aus der Reihe der serösen Häute zu streichen habe. Den Anschauungen Hüter's sich anschliessend hat R. Böhm (Beiträge zur normalen und pathologischen Anatomie der Gelenke, Inaug.-Diss. Würzb. 1868) nach Untersuchung frischer Objecte in Salzwasser die innerste Lage der Synovialis als eine Schicht kernloser Zellen beschrieben. Hingegen hat Schweigger-Seidel in seiner kritischen Arbeit über die Versilberungsmethode (Arbeiten aus der physiologischen Anstalt zu Leipzig aus dem J. 1866) die Existenz eines Epithels auf der Intima der Synovialis aufrecht gehalten. Noch entschiedener hat Landzert, auf Grund einer modificirten Versilberungsmethode, die Existenz eines Endothels auf der Oberfläche vertheidigt.

Da einerseits die angeführten Untersuchungen bezüglich der Gelenksmembranen nicht übereinstimmen, andererseits die Synovialscheiden der Sehnen und die Schleimbeutel noch von keinem Untersucher mit den modernen Hilfsmitteln geprüft worden sind, habe ich die Arbeit neuerdings aufgenommen. Es standen mir zur Verfügung frisch amputirte Glieder von Menschen, auch ganze Leichen von Kindern, die erst einige Stunden zuvor gestorben waren, frische Gelenke von Pferden, Hunden, Schweinen, Kaninchen, Meerschweinchen; ferner Synovialscheiden der Sehnen von frischen Extremitäten des Menschen, typische Schleimbeutel an denselben und einmal auch ein durch Druck erworbener Schleimbeutel über dem Köpfchen des ersten Metatarsus. Was die Methoden anbelangt, so behandelte ich die genannten Objecte mit Silber nach Hüter und auch nach Land-

zert mit Goldchlorid, mit Jodjodkaliumlösung, mit sehr verdünnter Chromsäure (1:5000—1:10.000), in welcher die Objecte einige Tage liegen sollen und nachher mit Karmin schwach gefärbt werden können; endlich legte ich versilberte Präparate in Gold und andere in die verdünnte Chromsäurelösung.

Allen diesen Methoden steht in einer Beziehung die Silbermethode weit voraus. Sie lässt die Beschaffenheit der Intercellularsubstanz und die Niveauverhältnisse am leichtesten erkennen. Für sie spricht ferner, dass die von Landois angegebene Methode der Färbung mit Blei analoge Bilder bietet. Die Methode von Landzert, ausgespannte Synovialisstücke nach vorausgegangener Abspülung mit Wasser mittelst sehr schwacher Silberlösung zu färben, hat gewisse Vortheile. Die Bilder sind viel reiner und selbst ein stärkerer Wasserstrahl schadet dem Präparate nicht.

A. Gelenke. Wenn man nach dieser Methode ein grösseres Stück der Synovialis vom Kniegelenke, etwa jenen Theil, der den Seitenflächen der Condylen anliegt, behandelt, so kann man bei gelungenen Präparaten für den ersten Anblick geneigt sein, die Behauptung Hüter's anzuzweifeln. Man sieht nämlich an der Oberfläche eine continuirliche Schichte von einem Netzwerk brauner Linien, deren Analoga an den serösen Membranen als Endothelzeichnung gedeutet werden, und darunter, in einem Niveau mit den Blutgefässen, ein schönes System von weissen Räumen sternförmiger Gestalt, die man, der gebräuchlichen Nomenclatur folgend, als Saftcanälchen deuten muss; endlich grosse, gefässartige, helle Räume, welche die grösste Aehnlichkeit mit Lymphcapillaren haben. Je weiter man aber in der Untersuchung vorschreitet, je mehr Präparate von verschiedenen Stellen der Gelenke man prüft, desto zurückhaltender wird man in der Deutung. Man findet nämlich Stellen von anderer Structur. Zunächst zeigt sich, dass die Synovialmembran nicht nur, wie bekannt, die Knorpel frei lässt, sondern auch die Bänder, sowohl die Verstärkungsbänder als auch die intraarticulären Bänder. Wenn man also beispielsweise die Kreuzbänder im Kniegelenk, das runde Band im Hüftgelenk, das *ligam. tibio-calcaneo-naviculare* untersucht, kurz alle Bänder und fibrösen Massen, an deren Oberfläche schon makroskopisch keine verschiebbare und mit dem Messer darstellbare Membran zu er-

kennen ist, so sieht man nicht jenen Gegensatz zweier Schichten, einer oberflächlichen, und einer darunter liegenden (Saftcanälchenschicht), sondern nur jene Zeichnungen, die v. Recklinghausen von der Oberfläche der Sehnen abbildet. Es sind helle Inseln, die zwar stellenweise durch schmale Gitter der braungefärbten Substanz abgetheilt sind und immerhin für Epithel imponiren, die aber bald sternförmig, verzweigt, bald mit einander communicirend und oft durch breitere Streifen der braunen Substanz getrennt erscheinen, kurz Bilder, die auch Hüter abbildet und als keratoides Gewebe beschreibt. Wenn man früher jene obenerwähnten entwickelteren Partien, wo eine oberflächliche und eine tiefere Schichte in einem so prägnanten Gegensatze sich finden, studirt hat, so wird man begreiflicherweise versucht, die Bilder dieser Partien für misslungen und die Zeichnung gleichwohl für eine epithelähnliche Lage zu halten. Man überzeugt sich jedoch leicht, dass eine solche Deutung nicht zulässig ist. An den besagten Partien treten die keratoiden Zeichnungen Hüter's mit einer solchen ausnahmslosen Constanz auf, und das Gesammtbild des Gewebes ist ein so deutlich abweichendes, dass man für die besagten Partien die Vorstellung einer epithelialen Bedeckung aufgeben muss. Wieder anders verhält sich die Sache an jenen Strecken, wo Fettgewebe die Unterlage der Synovialis bildet. Während bei einer fibrösen Unterlage die epithelähnlichen Formen verschwinden, finden sich über dem Fettgewebe wieder die keratoiden Formen Hüter's nicht. Über dem Fette zieht eine continuirliche Lage von einem Netze feiner Linien, die der Endothelzeichnung sehr ähnlich sehen, und der ganze Überzug des Fettes ist eben nur auf diese zarte Lage beschränkt. Ein drittes Gebiet bilden die Ansatzzonen der Synovialis. Wenn man nämlich von dem Pole eines Gelenkkopfes, z. B. des Oberarmkopfes, gegen den Äquator der Kugel hin, die er annäherungsweise vorstellt, die Untersuchung der Knorpeloberfläche vornimmt, so findet man an dem grössten Theile derselben gewöhnliche runde Knorpelzellen, die beim Embryo und Neugeborenen dicht an einander liegen, beim Erwachsenen aber durch ansehnliche Strecken von Intercellularsubstanz getrennt sind. Gegen den Äquator hin werden die Knorpelzellen allmälig eckig, hie und da mit einem kurzen Fortsatz versehen. Weiter-

hin stösst man auf eine Zone, wo die Knorpelzellen vielstrahlig, sternförmig, oder an einem Ende keulenförmig, am anderen vielfach verästigt, unter einander anastomosirend werden, so dass stellenweise ein ganzes Netz von ihren Anastomosen zu bemerken ist. Noch weiter gegen den Ansatz der Synovialis hin folgt eine Zone, wo statt des Knorpelgewebes jene Gewebsform auftritt, die Hüter als keratoid bezeichnet hat, die man nach den Gepflogenheiten der Histologen für Bindegewebszellen halten muss. Diese Zone ist gefässlos und schmal. Noch weiter hinaus treten in ihr Gefässe auf, die von der Synovialis her gegen den Knorpel zu Arcaden bilden oder in die Tiefe tauchen; zwischen den Gefässen ist dieselbe keratoide Bildung, d. h. dieselbe Bindegewebsform wie in der gefässlosen Zone. Erst weiter, wo die Synovialis frei darstellbar ist, tritt auch die oberflächliche Gewebslage hinzu. Ich muss hier mit Hinsicht auf ähnliche Angaben R. Böhm's eines bemerken. Ich fand nämlich, dass dort, wo sich ein Band unter Hinzutreten einer darstellbaren membranösen Ausbreitung an einem Gelenkskopfe inserirt, z. B. das runde Band am Schenkelkopfe, sich in der Nähe dieser Insertion der Knorpel an der Oberfläche ebenso verhält, wie in der Nähe der Insertion der Synovialis an dem Äquator der Gelenkskugel, d. h. wieder eine Zone von eckigen und verästigten Zellen besitzt, die den Übergang zu der keratoiden Bindegewebsform Hüter's bildet. Mit anderen Worten scheint mir das Auftreten dieser Übergangszone eher an einen histologischen Grund, an die Nähe des Bindegewebes gebunden zu sein, als an mechanische Verhältnisse, die Böhm anführt. — Man kommt also, das Frühere zusammenfassend, zu dem Resultate, dass die innere Auskleidung der Gelenkshöhle an verschiedenen Stellen eine verschiedene Structur besitzt. Die höchste Gliederung erscheint dort, wo eine Synovialis als freie Membran schon makroskopisch bemerkbar und mittels Präparirens darstellbar ist, und daselbst besteht sie, wie ich gegen Hüter betone, aus einer oberflächlichen und einer tieferen Lage. Es entsteht zunächst die Frage, was die braunen Linien der oberflächlichen Lage einschliessen. Schon Silberbilder lassen oft einen Kern in der bekannten Weise bald als schwächer, bald als stärker gefärbte Stelle erkennen. Einen genaueren Aufschluss gibt die

Behandlung der Silberpräparate mit Gold, oder mit der erwähnten Chromsäurelösung. Letztere Behandlung ist viel bequemer. Das Goldchlorid liefert ungemein selten reine Bilder. Man findet nach der einen oder der anderen Methode Kerne, oft von jener Dimension und Gestaltung, wie sie Schweigger-Seidel mittels Maceration in Jodserum dargestellt hat. Wenn man noch unversilberte Präparate durch mehrere Tage in der verdünnten Chromsäurelösung aufbewahrt und dann in Karmin schwach färbt, so bekommt man Bilder (Fig. 4), die über die Zellennatur dieser Gebilde keinen Zweifel lassen. Die weitere Frage, welcher Natur diese Zellen sind, ist allerdings viel schwieriger zu beantworten. Wenn man sich an die Bilder selbst hält, so könnte man es wohl angehen lassen, von einem Endothel zu sprechen, da sie in der That mit Endothelien die meiste Ähnlichkeit besitzen; man müsste nur hinzufügen, dass die fraglichen Endothelzellen klein und unregelmässig sind. Ich muss zwar den Gründen, welche Hüter veranlasst haben, sie als ein besonderes epithelioides Bindegewebe zu bezeichnen, insofern beipflichten, als seine Beschreibung und Abbildung der sonderbaren Gewebsform (vergl. meine Fig. 1*a*, 2, 3) den Thatsachen wirklich entsprechen. Es ist aber die Frage, ob die Hüter'schen Gründe ausreichend sind, die fraglichen Zellen zum Bindegewebe zu zählen, ob die Kleinheit und Unregelmässigkeit der Zellen, die breiteren Streifen von Kittsubstanz zwischen ihnen zwingend zu einer Trennung von den Endothelien nöthigen. Auch die Entwickelungsgeschichte, die Hüter für seine Ansicht anruft, liefert noch keine vollgiltigen Beweise. Für Hüter's Ansicht muss ich gleichwohl noch einen Grund anführen. Ich konnte bei Fröschen und Vögeln ein Endothel auf der Synovialis nicht constatiren. Für die Frösche ist das besonders hervorzuheben, da hier die Endothelien so charakteristische Formen haben.

Über die Lymphgefässe der Synovialis kann ich keinen befriedigenden Aufschluss geben. Hüter leugnet das Vorkommen subepithelialer Lymphgefässe, während Landzert dieselben aufrechthält. Wie oben erwähnt, trifft man an Silberpräparaten sehr oft Gebilde an, die man auf den ersten Anblick für Lymphgefässe halten würde. Ihre Dimensionen, ihre scharfe Begrenzung, ihre Anordnung lässt eine solche Auffassung zu. In der That gibt

es unter diesen Räumen solche, die mit Gefässendothel versehen sind, die also jeden Zweifel ausschliessen. (Fig. 5 *a*, *b*.) Aber so überzeugende Bilder sind äusserst selten. Die fraglichen Räume lassen in der grössten Zahl der Fälle keine Entscheidung zu, ob man Lymphräume vor sich hat, oder Falten, in welche die färbende Substanz nicht eingedrungen ist. Derlei Falten sind an den Synovialhäuten der Gelenke und der Sehnenscheiden ein normales Vorkommniss, ja geradezu ein Merkmal derselben. Denn die Bewegungen der Knochen und der Sehnen setzen Falten voraus, welche bei den ausgeführten Bewegungen verstreichen können, ohne dass die Membran leidet. Die zarten Falten können bei der Silbereinwirkung immerhin so eng werden, dass durch das Aneinanderliegen derselben die Flüssigkeit verhindert wird, in die Tiefe zu dringen. Man kann sich überzeugen, dass viele der fraglichen Räume ganz bestimmt nichts anderes sind, als Falten, da man durch Einstellen des Mikroskopes auf die Tiefe die stufenweise abnehmende Silberwirkung beobachten kann. Es gibt also gewiss Lymphgefässe, gewiss Falten, und endlich Räume, über deren Natur gestritten werden kann. (Fig. 5 gibt bei *c* einen solchen fraglichen Raum wieder.)

B. Auch die Synovialscheiden der Sehnen zeigen an verschiedenen Stellen ihrer Ausbreitung ein verschiedenes Verhalten. Bezüglich der Oberfläche der Sehnen ist schon, wie erwähnt, durch v. Recklinghausen darauf hingewiesen worden, dass die dichte Zellenlage nicht als Endothel aufzufassen sei. Ich kann ein Ähnliches von den übrigen Stellen der Sehnenscheiden aussagen. Sie zeigen aber im Übrigen ein verschiedenes Verhalten. Dort, wo sie als Membran darstellbar sind, also in jenen Duplicaturen, auf deren schöne und überraschende Regelmässigkeit ich früher einmal hingewiesen habe, zeigen sie nicht einmal jenen Gegensatz zwischen einer oberflächlichen und einer tieferen Schichte, wie die Synovialmembranen der Gelenke. Sie gleichen hier vielmehr jenen Stellen der Gelenksintima, wo nur Hüter's sogenannte keratoide Bildungen vorkommen. Sowohl die Anordnung der Gefässe, als auch die Mosaik der Elemente ist hier wie dort dieselbe. Was die Ähnlichkeit noch mehr erhöht, sind die Zotten, sowohl Gefässknäuel enthaltende, als auch gefäss-

lose[1], die hier auch vorkommen, und die hellen, durch Faltung entstehenden Räume. In der grossen carpalen Beugerscheide des Menschen habe ich einmal unzweifelhafte Lymphgefässe gefunden (Fig. 6). Einen beachtenswerthen Unterschied von den Gelenksmembranen bildet aber das Vorkommen von ganzen Lagern von Knorpelzellen, die schon Kölliker erwähnt. Derlei concentrisch geschichtete Zellen kommen an gewissen Stellen fast constant vor, wie z. B. an den von mir beschriebenen Duplicaturen der oberen Pforte der Scheide des *tib. ant.* (Bei manchen Säugethieren kommen in gewissen Sehnenscheiden ansehnliche Knorpelmassen vor.) Die als Mesotendon beschriebenen Theile zeigen über einer Grundlage von fibrillärem Bindegewebe mit elastischen Fasern und vielen Fettträubchen zwischen den letzteren auf ganzen Strecken die sogen. keratoide Bindegewebsform, deren Menge gegen die Sehne hin zunimmt. Lymphgefässe, die man hier vermuthen würde, habe ich nie gesehen. Jene Stellen endlich, die die innerste Schichte der fibrösen Scheide bilden, haben das Aussehen der Gelenksbänder.

C. Die typischen Schleimbeutel, die nach Heineke ursprünglich angelegte Organe sind, haben kein Endothel. Ihre Oberfläche ist mit Bindegewebszellen ausgekleidet, deren Anordnung nebst der Art der Gefässvertheilung die grösste Ähnlichkeit mit den Duplicaturen der Sehnenscheiden bekundet.

Zum Schlusse fühle ich mich verpflichtet Herrn Professor Stricker für die Unterstützung, die er dieser Arbeit angedeihen liess, meinen besten Dank auszusprechen.

---

[1] Ich habe Zotten an der Synovialis auch beim Neugeborenen beobachtet.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. Synovialis aus dem Kniegelenke des Schweines. Die oberflächliche Lage der Zellen bei *a)*, die tiefe Lage bei *b)* gezeichnet. Silberpräp.

Fig. 2. Die oberflächliche Lage der Zellen aus dem Kniegelenke des Hundes. Silberpräp.

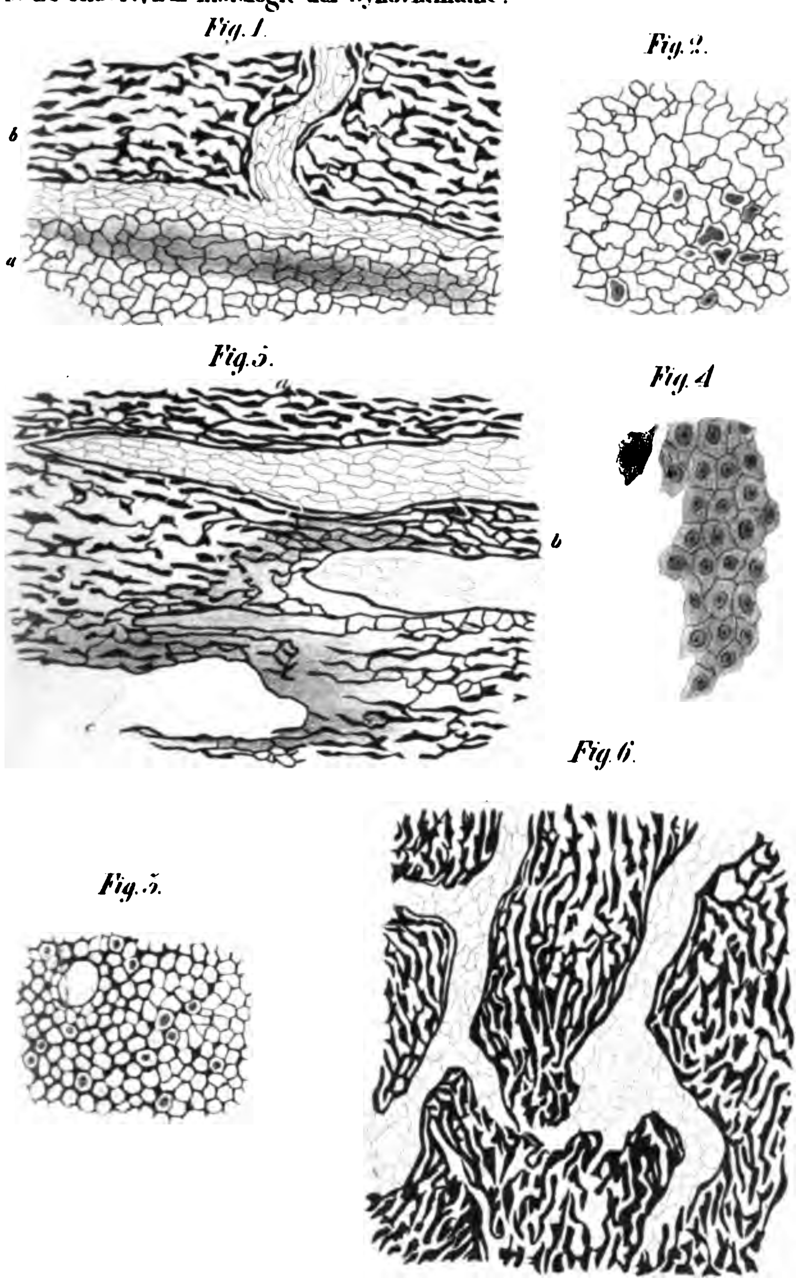
Fig. 3. Dieselbe vom Pferde. Silberpräp.

Fig. 4. Dieselbe vom Hunde, nach Behandlung mit Chromsäure (1:8000) mit Karmin schwach gefärbt.

Fig. 5. Lymphgefässe bei *a)* und *b)*, ein zweifelhafter heller Raum bei *c)* aus der Synovialis vom Kniegelenke des Schweines. Die oberflächliche Zellenlage ist in der Zeichnung weggelassen.

Fig. 6. Lymphgefässe aus der carpalen Beugerscheide des Menschen. Beide letzteren Fig. nach Silberpräp. Bei sämmtlichen Bildern Vergrösserung Hartn. 3/7.

Dr. Ed. Albert, Zur Histologie der Synovialhäute.





Nachweis für die im Berliner Jahrbuche für 1874 enthaltenen Ephemeriden der Planeten (58) Concordia, (59) Elpis, (62) Erato, (64) Angelina, (91) Ägina und (113) Amalthea.

Von dem w. M. Prof. Dr. **Theodor Ritter v. Oppolzer.**

I. (58) Concordia.

Ich habe im LVII. Bande der Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften, II. Abtheilung, Märzheft 1868, eine Bahnbestimmung des Planeten Concordia veröffentlicht, welche sich fünf beobachteten Oppositionen zwischen den Jahren 1860 bis 1867 anschloss, und ausserdem daselbst die bis Anfang 1871 fortgeführte Störungsrechnung nebst den Ephemeriden für die Jahre 1869 und 1870 mitgetheilt.

Es fand sich nämlich:

(58) Concordia.

Epoche, Oscul. und mittl. Aeq. 1865 Jan. 7·0 Berliner Zeit.

$$
\begin{aligned}
L &= 210°34'\ 9''2 \\
M &= 21\ 24\ 4\cdot2 \\
\pi &= 189\ 10\ 5\cdot0 \\
\Omega &= 161\ 19\ 50\cdot3 \\
i &= 5\ 1\ 50\cdot5 \\
\varphi &= 2\ 26\ 21\cdot8 \\
\mu &= 799''59642 \\
\log a &= 0\cdot4314238.
\end{aligned}
$$

Die nach diesen Elementen durchgeführten Vorausberechnungen erwiesen sich, wie mit Sicherheit erwartet werden konnte, als sehr nahe richtig; so ergab eine vorläufige Vergleichung der mir bekannt gewordenen Beobachtungen aus dem Jahre 1869 im Sinne Beob.—Rechnung:

Datum		Beobachtungs-ort	$d\alpha$	$d\delta$	
1869 März	23.	Lund	−0·08	− 1·6	VIII. Opposition.
„	25.	„	−0·17	+ 1·2	
„	30.	„	−0·27	+ 1·3	
April	1.	Königsberg .	−0·09	− 1·3	
„	1.	Bilk	+0·34	− 2·1	
„	1.	Lund	−0·26	+ 4·1	
„	2.	„	−0·56	+ 4·7	
„	4.	„	−0·20	+ 3·2	
„	7.	Warschau ...	+0·30	(+12·9)	
„	10.	„ ...	+0·02	+ 3·3	
„	13.	Leipzig	−0·46	− 5·2	
„	13.	Warschau ...	−0·12	− 1·6	
„	14.	Leipzig	−0·37	− 6·9	
„	22.	„	−0·16	− 1·1	
		im Mittel.....	−0·15	− 0·2	

Im Jahre 1870 fand sich:

Datum		Beobachtungs-ort	$d\alpha$	$d\delta$	
1870 Juli	20.	Paris	−0·15	+1·3	IX. Opposition.
„	22.	„	−0·07	−1·0	
„	23.	Leipzig	−0·47	−0·4	
„	23.	Paris........	−0·31	+1·3	
„	24.	Leiden	—	+0·7	
„	24.	Leipzig......	+0·03	0·0	
„	25.	„	−0·11	+0·6	
„	25.	Lund	−0·53	−0·8	
„	25.	Paris........	−0·12	0·0	
„	26.	Leipzig	+0·24	−1·5	
„	27.	Leiden	−0·40	−1·7	
		im Mittel....	−0·19	−0·1	

Es lässt sich daher mit Sicherheit erwarten, dass die angewandten Elemente noch durch eine lange Reihe von Jahren ausreichend zur Herstellung genauer Ephemeriden befunden werden. Um nun die weiteren Vorausberechnungen durchführen zu können, war es zunächst nöthig, die Störungsrechnungen fortzusetzen. Ich habe im Anschluss an meine, in der oben angeführten Abhandlung veröffentlichten Zahlen die folgenden Werthe der Differentialquotienten der Störungen durch Jupiter und Saturn erhalten:

Mittl. Ekliptik 1870·0.

$$♃ = \frac{1}{1049}.$$

Datum	40 $di:dt$	40 $d\Omega:dt$	40 $d\varphi:dt$	40 $d\pi:dt$	1600 $d\mu:dt$	40 $dL:dt$
1870 Dec. 27	+0"353	— 0"271	+ 6"479	— 1'56"73	+1"8543	+ 2"428
1871 Febr. 5	+0·321	+ 0·279	+ 6·371	— 1 40·94	+1·7087	+ 3·732
März 17	+0·276	+ 0·699	+ 6·006	— 1 27·72	+1·5159	+ 4·990
April 26	+0·221	+ 0·951	+ 5·402	— 1 17·66	+1·2724	+ 6·174
Juni 5	+0·159	+ 0·995	+ 4·574	— 1 12·40	+0·9744	+ 7·251
Juli 15	+0·093	+ 0·801	+ 3·555	— 1 13·54	+0·6179	+ 8·179
Aug. 24	+0·029	+ 0·337	+ 2·394	— 1 22·37	+0·1973	+ 8·909
Oct. 3	—0·027	— 0·416	+ 1·138	— 1 41·09	—0·2926	+ 9·379
Nov. 12	—0·070	— 1·471	— 0·127	— 2 10·56	—0·8564	+ 9·506
Dec. 22	—0·091	— 2·832	— 1·313	— 2 51·72	—1·4981	+ 9·184
1872 Jän. 31	—0·082	— 4·481	— 2·317	— 3 44·81	—2·2164	+ 8·280
März 11	—0·032	— 6·377	— 2·989	— 4 49·47	—3·0032	+ 6·617
April 20	+0·069	— 8·444	— 3·321	— 6 2·94	—5·8347	+ 3·993
Mai 30	+0·231	—10·545	— 3·234	— 7 20·97	—4·6617	+ 0·172
Juli 9	+0·461	—12·462	— 2·783	— 8 37·28	—5·3933	— 5·066
Aug. 18	+0·756	—13·888	— 2·196	— 9 36·81	—5·8878	—11·814
Sept. 27	+1·095	—14·404	— 1·639	—10 10·77	—5·9359	—19·855
Nov. 6	+1·431	—13·639	— 2·382	—10 1·31	—5.3101	—28·416
Dec. 16	+1·689	—11·383	— 4·797	— 9 4·28	—3·8635	—35·973
1873 Jän. 25	+1·791	— 7·905	— 9·090	— 7 4·28	—1·6739	—40·618
März 6	+1·694	— 3·983	—14·528	— 5 42·39	+0·8626	—40·888
April 15	+1·426	— 0·579	—19·476	— 4 18·47	+3·1625	—36·530
Mai 25	+1·073	+ 1·636	—22·794	— 3 21·51	+4·7668	—29·001
Juli 4	+0·726	+ 2·578	—23·666	— 2 54·45	+5·5107	—20·311
Aug. 13	+0·442	+ 2·570	—22·344	— 2 43·66	+5·5094	—12·124
Sept. 22	+0·241	+ 2·048	—19·581	— 2 37·19	+5·0033	— 5·349

$$\hbar = \frac{1}{3501 \cdot 6}$$

Datum	40 $di:dt$	40 $d\Omega:dt$	40 $d\varphi:dt$	40 $d\pi:dt$	1600 $d\mu:dt$	40 $dL:dt$
1870 Dec. 27	+0"012	—0"009	+0"195	—6"76	+0"0734	+0"331
1871 Febr. 5	+0·006	+0·005	+0·093	—5·23	+0·0399	+0·377
März 17	+0·001	+0·003	—0·012	—4·19	+0·0079	+0·38[illegible]
April 26	—0·003	—0·013	—0·111	—3·65	—0·0209	+0·359
Juni 5	—0·006	—0·040	—0·196	—3·54	—0·0456	+0·307
Juli 15	—0·008	—0·072	—0·264	—3·78	—0·0654	+0·235
Aug. 24	—0·009	—0·107	—0·312	—4·23	—0·0803	+0·149
Oct. 3	—0·009	—0·142	—0·339	—4·76	—0·0899	+0·054
Nov. 12	—0·008	—0·175	—0·349	—5·26	—0·0945	—0·045
Dec. 22	—0·007	—0·203	—0·342	—5·59	—0·0941	—0·139
1872 Jän. 31	—0·004	—0·225	—0·324	—5·70	—0·0892	—0·2[illegible]
März 11	—0·001	—0·240	—0·299	—5·54	—0·0800	—0·311
April 20	+0·002	—0·246	—0·273	—5·05	—0·0670	—0·3[illegible]
Mai 30	+0·005	—0·245	—0·251	—4·28	—0·0508	—0·435
Juli 9	+0·008	—0·234	—0·237	—3·30	—0·0322	—0·47[illegible]
Aug. 18	+0·012	—0·216	—0·235	—2·17	—0·0117	—0·491
Sept. 27	+0·014	—0·190	—0·244	—1·09	+0·0097	—0·4[illegible]
Nov. 6	+0·017	—0·158	—0·266	—0·04	+0·0310	—0·4[illegible]
Dec. 16	+0·018	—0·121	—0·297	+0·81	+0·0512	—0·4[illegible]
1873 Jän. 25	+0·019	—0·083	—0·333	+1·39	+0·0692	—0·3[illegible]
März 6	+0·019	—0·043	—0·367	+1·65	+0·0838	—0·2[illegible]
April 15	+0·018	—0·007	—0·393	+1·53	+0·0939	—0·2[illegible]
Mai 25	+0·016	+0·024	—0·404	+1·28	+0·0985	—0·1[illegible]
Juli 4	+0·013	+0·048	—0·396	+0·95	+0·0967	—0·[illegible]
Aug. 13	+0·011	+0·061	—0·363	+0·71	+0·0879	+0·[illegible]
Sept. 22	+0·007	+0·062	—0·308	+0·75	+0·0719	+0·1[illegible]

Betrachtet man als Osculationspunkt: 1865 Jänner 7· Berliner Zeit und integrirt mit Hilfe der in der oben citirten Abhandlung enthaltenen Differentialquotienten die Störungen von dieser Epoche an, so erhält man die folgenden Störungstafeln, die sich an die bereits am citirten Orte gegebenen erweiternd

anschliessen, und denen die fixe mittlere Ekliptik 1870·0 als Fundamentalebene zu Grunde liegt.

Störungswerthe durch Jupiter.

Datum	Δi	ΔΩ	Δπ	Δφ	ΔL	Δμ
1871 Jän. 16	+21"0	—7'23"1	—2° 9'42"	+8'23"2	—2'47"1	+0"481
Febr. 25	+21·3	—7 22·8	—2 11 23	+8 29·6	—2 23·3	+0·524
April 6	+21·6	—7 22·1	—2 12 51	+8 35·6	—1 56·6	+0·562
Mai 16	+21·8	—7 21·2	—2 14 9	+8 41·0	—1 27·4	+0·593
Juni 25	+22·0	—7 20·2	—2 15 22	+8 45·5	—0 55·9	+0·618
Aug. 4	+22·1	—7 19·4	—2 16 36	+8 49·1	—0 22·7	+0·633
Sept. 13	+22·1	—7 19·1	—2 17 58	+8 51·5	+0 11·6	+0·638
Oct. 23	+22·1	—7 19·5	—2 19 40	+8 52·6	+0 46·4	+0·631
Dec. 2	+22·0	—7 21·0	—2 21 51	+8 52·5	+1 20·7	+0·609
1872 Jän. 11	+21·9	—7 23·8	—2 24 43	+8 51·2	+1 53·5	+0·572
Febr. 20	+21·9	—7 28·3	—2 28 28	+8 48·9	+2 23·5	+0·516
März 31	+21·8	—7 34·8	—2 33 18	+8 45·9	+2 49·4	+0·441
Mai 10	+21·9	—7 43·2	—2 39 21	+8 42·6	+3 9·0	+0·345
Juni 20	+22·1	—7 53·7	—2 46 42	+8 39·4	+3 20·7	+0·229
Juli 29	+22·6	—8 6·2	—2 55 19	+8 36·6	+3 22·1	+0·094
Sept. 7	+23·4	—8 20·0	—3 4 55	+8 34·4	+3 11·1	—0·053
Oct. 17	+24·5	—8 34·3	—3 15 4	+8 32·7	+2 46·1	—0·201
Nov. 26	+25·9	—8 47·9	—3 25 3	+8 30·3	+2 7·0	—0·334
1873 Jän. 5	+27·6	—8 59·3	—3 34 6	+8 25·4	+1 15·8	—0·429
Febr. 14	+29·3	—9 7·2	—3 41 35	+8 16·2	+0 17·0	—0·470
März 26	+31·0	—9 11·1	—3 47 18	+8 1·7	—0 42·2	—0·449
Mai 5	+32·4	—9 11·8	—3 51 37	+7 42·3	—1 35·2	—0·370
Juni 14	+33·5	—9 10·2	—3 55 0	+7 19·7	—2 16·7	—0·252
Juli 24	+34·3	—9 7·7	—3 57 56	+6 56·1	—2 44·4	—0·115
Sept. 2	+34·7	—9 5·1	—4 0 39	+6 33·8	—2 58·4	+0·022
Oct. 12	+34·9	—9 3·1	—4 3 16	+6 14·3	—3 0·4	+0·147

Störungswerthe durch Saturn.

Datum	Δi	$\Delta \Omega$	$\Delta \pi$	$\Delta \varphi$	ΔL	$\Delta \mu$
1871 Jän. 16	+0"1	— 9"5	—0' 58"	+0"7	+22"9	+0"027
Febr. 25	+0·1	— 9·5	—1 3	+0·8	+24·4	+0·028
April 6	+0·1	— 9·5	—1 7	+0·8	+25·9	+0·029
Mai 16	+0·1	— 9·5	—1 11	+0·7	+27·4	+0·028
Juni 25	+0·1	— 9·5	—1 14	+0·5	+28·8	+0·027
Aug. 4	+0·1	— 9·6	—1 18	+0·2	+30·1	+0·025
Sept. 13	0·0	— 9·7	—1 22	—0·1	+31·2	+0·023
Oct. 23	0·0	— 9·8	—1 27	—0·4	+32·2	+0·021
Dec. 2	0·0	—10·0	—1 32	—0·8	+32·9	+0·019
1872 Jän. 11	0·0	—10·2	—1 38	—1·1	+33·5	+0·016
Febr. 20	0·0	—10·4	—1 44	—1·4	+33·8	+0·014
März 31	0·0	—10·7	—1 49	—1·7	+34·0	+0·012
Mai 10	0·0	—10·9	—1 54	—2·0	+34·1	+0·010
Juni 20	0·0	—11·2	—1 58	—2·2	+34·1	+0·009
Juli 29	0·0	—11·4	—2 2	—2·5	+33·9	+0·008
Sept. 7	0·0	—11·6	—2 4	—2·7	+33·8	+0·008
Oct. 17	+0·1	—11·8	—2 5	—3·0	+33·6	+0·008
Nov. 26	+0·1	—12·0	—2 5	—3·2	+33·5	+0·009
1873 Jän. 5	+0·1	—12·1	—2 4	—3·5	+33·5	+0·010
Febr. 14	+0·1	—12·2	—2 3	—3·9	+33·5	+0·012
März 26	+0·1	—12·2	—2 1	—4·2	+33·8	+0·014
Mai 5	+0·1	—12·2	—2 0	—4·6	+34·2	+0·017
Juni 14	+0·2	—12·2	—1 58	—5·0	+34·8	+0·019
Juli 24	+0·2	—12·1	—1 57	—5·4	+35·6	+0·021
Sept. 2	+0·2	—12·1	—1 57	—5·8	+36·6	+0·024
Oct. 12	+0·2	—12·0	—1 56	—6·1	+37·7	+0·025

Im Jahre 1871 trifft am 3. November die Opposition der Concordia mit der Sonne ein; um nun das gesammte Rechnungsmateriale gesammelt vorgelegt zu haben, führe ich hier die betreffenden Ephemeriden und deren Grundlagen an, die sich leicht aus den vorstehenden Zahlen ergeben.

Angewandte Elemente.

Epoche und Osculation 1871 Oct. 23·0 Berl. Zt.
mittl. Äquinoct. 1870·0

$$L = 41°29'37"1$$
$$M = 214\ 36\ 28·8$$
$$\pi = 186\ 53\ 8·3$$
$$\Omega = 161\ 16\ 25·6$$
$$i = 5\ 2\ 10·2$$
$$\varphi = 2\ 35\ 14·2$$
$$\mu = 800"248$$
$$\log a = 0·431188$$

$$x = [0·431010] \sin (E+276°56'45"2) + 0·120888$$
$$y = [0·407257] \sin (E+187\ 30\ 23·6) + 0·015063$$
$$z = [9·937901] \sin (E+182\ 11\ 29·5) + 0·001496.$$

(58) Concordia 1871.

Jahresephemeride.

0^h Berl. Zeit		A. R.	Decl.	log Δ	log r
Jän.	16	$22^h\ 9^m 1$	−11°24'	0·552	0·448
Febr.	5	22 39·5	− 8 48	0·569	0·449
Febr.	25	23 10·3	− 5 56	0·578	0·449
März	17	23 40·9	− 2 57	0·581	0·450
April	6	0 11·3	+ 0 3	0·578	0·450
„	26	0 41·2	+ 2 57	0·568	0·450
Mai	16	1 10·2	+ 5 39	0·552	0·450
Juni	5	1 38·1	+ 8 3	0·530	0·450
Juni	25	2 4·5	+10 3	0·501	0·450
Juli	15	2 28·0	+11 34	0·466	0·450
Aug.	4	2 47·8	+12 30	0·424	0·449
„	24	3 1·8	+12 48	0·379	0·449
Sept.	13	3 8·3	+12 24	0·332	0·448
Oct.	3	3 4·7	+11 18	0·289	0·448
„	23	2 52·1	+ 9 42	0·262	0·447
Nov.	12	2 35·1	+ 8 2	0·260	0·446
Dec.	2	2 21·0	+ 7 1	0·285	0·445
„	22	2 15·2	+ 6 58	0·326	0·444
„	42	2 19·1	+ 7 52	0·373	0·443

(58) Concordia 1871.

Oppositionsephemeride.

12ʰ m. Berl. Zeit			α	δ	log Δ	Abrnt.
1871	Oct.	16	2ʰ56ᵐ59ˢ05	+10°15'21"4	0·268628	15ᵐ24ˢ
		17	2 56 16·46	+10 10 14·4	0·267493	15 22
		18	2 55 32·90	+10 5 5·6	0·266417	15 19
		19	2 54 48·41	+ 9 59 55·3	0·265401	15 17
		20	2 54 3·03	+ 9 54 43·8	0·264446	15 15
		21	2 53 16·82	+ 9 49 31·2	0·263553	15 13
		22	2 52 29·82	+ 9 44 17·8	0·262723	15 12
		23	2 51 42·10	+ 9 39 4·0	0·261956	15 10
		24	2 50 53·70	+ 9 33 50·0	0·261253	15 9
		25	2 50 4·68	+ 9 28 36·1	0·260616	15 7
		26	2 49 15·10	+ 9 23 22·5	0·260046	15 6
		27	2 48 25·01	+ 9 18 9·6	0·259542	15 5
		28	2 47 34·45	+ 9 12 57·8	0·259104	15 4
		29	2 46 45·48	+ 9 7 47·3	0·258735	15 3
		30	2 45 52·16	+ 9 2 38·3	0·258434	15 3
		31	2 45 0·55	+ 8 57 31·3	0·258202	15 2
	Nov.	1	2 44 8·71	+ 8 52 26·6	0·258038	15 2
	☍	2	2 43 16·69	+ 8 47 24·4	0·257944	15 2
		3	2 42 24·55	+ 8 42 25·1	0·257920	15 2
		4	2 41 32·34	+ 8 37 29·0	0·257965	15 2
		5	2 40 40·13	+ 8 32 36·5	0·258080	15 2
		6	2 39 48·00	+ 8 27 47·8	0·258264	15 2
		7	2 38 56·00	+ 8 23 3·3	0·258518	15 3
		8	2 38 4·19	+ 8 18 23·2	0·258840	15 3
		9	2 37 12·64	+ 8 13 47·8	0·259232	15 4
		10	2 36 21·40	+ 8 9 17·6	0·259693	15 5
		11	2 35 30·53	+ 8 4 52·7	0·260223	15 6
		12	2 34 40·09	+ 8 0 33·5	0·260820	15 8
		13	2 33 50·15	+ 7 56 20·3	0·261484	15 9
		14	2 33 0·77	+ 7 52 13·6	0·262214	15 11
		15	2 32 12·00	+ 7 48 13·4	0·263009	15 12
		16	2 31 23·90	+ 7 44 20·1	0·263868	15 14
		17	2 30 36·51	+ 7 40 33·9	0·264790	15 16
		18	2 29 49·89	+ 7 36 55·0	0·265775	15 18
		19	2 29 4·09	+ 7 33 23·5	0·266821	15 20
		20	2 28 19·16	+ 7 29 59·7	0·267928	15 23
		21	2 27 35·14	+ 7 26 43·6	0·269094	15 25

(58) ☍ ☉ Nov. 3; 8ʰ

Lichtstärke = 0·82

Grösse = 11·8

Im Jahre 1872 tritt keine Opposition der Concordia ein und es war nur nöthig, genäherte Angaben für die Jahresephemeride abzuleiten; es ist zu diesem Zwecke völlig ausreichend gewesen, die obigen, für 1871 Oct. 23 osculirenden Elemente ohne weitere Rücksicht auf Störungen anzuwenden und ich habe so erhalten:

(58) Concordia 1872.

Jahresephemeride.

0ʰ Berl. Zeit	A. R.	Decl.	log Δ	log r
Jän. 11	2ʰ 19ᵐ1	+ 7°52'	0·373	0·443
„ 31	2 31·7	+ 9 27	0·420	0·442
Febr. 20	2 50·8	+11 24	0·461	0·441
März 11	3 15·0	+13 29	0·496	0·440
„ 31	3 43·1	+15 29	0·524	0·438
April 20	4 14·0	+17 15	0·545	0·437
Mai 10	4 47·2	+18 38	0·560	0·436
„ 30	5 21·9	+19 34	0·568	0·434
Juni 19	5 57·5	+19 59	0·571	0·433
Juli 9	6 33·5	+19 52	0·567	0·432
„ 29	7 8·8	+19 10	0·558	0·430
Aug. 18	7 43·3	+18 0	0·543	0·428
Sept. 7	8 16·1	+16 27	0·521	0·427
„ 27	8 46·7	+14 35	0·493	0·225
Oct. 17	9 14·4	+12 37	0·458	0·424
Nov. 6	9 37·8	+10 42	0·416	0·422
„ 26	9 56·0	+ 9 7	0·368	0·421
Dec. 16	10 6·6	+ 8 10	0·315	0·419
„ 36	10 8·0	+ 8 10	0·265	0·418

Schliesslich will ich zu meiner Eingangs citirten Abhandlung über Concordia berichtigend zufügen, dass auf pag. 28 die Declination des fünften Normalortes 1867 Dec. 15·5 durch einen Druckfehler etwas entstellt ist, derselbe soll lauten statt +15°38′32″9 richtig +15°38′38″9.

II. (59) Elpis.

Im LXI. Bande der Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissensch. II. Abth. Mai-Heft Jahrg. 1870 habe ich eine Bahnbestimmung des Planeten (59) Elpis veröffentlicht; dieselbe gründete sich auf 8 innerhalb des Zeitraumes 1860—1869 beobachtete Oppositionen, und die für diesen Planeten weiter durchgeführten Störungsrechnungen und Ephemeriden für 1872 sind der Abhandlung angeschlossen, so dass ich hier weiter nichts hinzuzufügen habe, ausser die Vergleichung einiger Beobachtungen aus der 9. Opposition, die einen erträglichen Anschluss der Rechnung an die Beobachtungen erkennen liessen.

Datum		Beobachtungs-ort	$d\alpha$	$d\delta$	
1871 Febr.	1	Lund	+0·70	+1·2	IX. Opposition.
„	2	„	+0·48	+1·5	
„	11	Leiden	+0·38	—1·5	
„	12	„	+0·40	—1·9	
		Im Mittel....	+0·49	—0·2.	

III. (62) Erato.

Meine im LXIII. Bande der Sitzungsb. der k. Akademie der Wissensch. II. Abth. April-Heft Jahrgang 1871 veröffentlichte Abhandlung über den in Verlust gerathenen Planeten (62) Erato hatte den Zweck, die Wiederauffindung desselben zu ermöglichen und hat in der That das angestrebte Ziel fast ohne Schwierigkeit zu erlangen gestattet, indem die von mir angestellten Nachforschungen schon in der ersten Nacht (9. August 1871) den Planeten auffinden liessen. Ich hatte mir, um die Aufsuchung möglichst bald zu ermöglichen, die in der Abhandlung mitgetheilte Oppositionsephemeride bis zum 10. August erweitert; die gefundenen Zahlen, die sich an die erwähnte Ephemeride erweiternd anschliessen, sind:

12ʰ Berl. Zeit	α	δ	log. Δ	Abrrzt.
1871 Aug. 10	0ʰ 4ᵐ53·10	—1°41′50″0	0·2822	15ᵐ53ˢ
„ 11	0 4 42·97	—1 44 11·4	0·2799	15 48
„ 12	0 4 31·50	—1 46 41·4	0·2777	15 44

12h Berl. Zeit	α	δ	log. Δ	Abrrzt.
1871 Aug. 13	0h 4m18s69	−1°49′19″8	0·2755	15m39s
„ 14	0 4 4·56	−1 52 6·7	0·2734	15 34
„ 15	0 3 49·11	−1 55 2·0	0·2713	15 30
„ 16	0 3 32·34	−1 58 5·5	0·2692	15 25
„ 17	0 3 14·26	−2 1 17·2	0·2672	15 21
„ 18	0 2 54·89	−2 4 36·9	0·2652	15 17
„ 19	0 2 34·27	−2 8 4·5	0·2632	15 13
„ 20	0 2 12·39	−2 11 39·8	0·2613	15 9
„ 21	0 1 49·26	−2 15 22·7	0·2594	15 5
„ 22	0 1 24·91	−2 19 12·9	0·2576	15 1
„ 23	0 0 59·38	−2 23 10·2	0·2558	14 57
„ 24	0 0 32·69	−2 27 14·5	0·2541	14 54
„ 25	0 0 4·86	−2 31 25·5	0·2524	14 50
„ 26	23 59 35·91	−2 35 42·9	0·2508	14 47
„ 27	23 59 5·87	−2 40 6·6	0·2492	14 44
„ 28	23 58 34·78	−2 44 36·2	0·2477	14 41
„ 29	23 58 2·67	−2 49 11·6	0·2462	14 38
„ 30	23 57 29·54	−2 53 52·5	0·2448	14 35

Meine beiden ersten Beobachtungen in der diesjährigen zehnten Opposition sind:

m. Zt. Josefstadt		app α	Parall.	app δ	Parall.
1871 Aug. 9	12h35m30s	0h4m40s14	−0s12	−1°41′56″5	+3″5
„ „ 12	11 25 22	0 4 10·34	−0·16	−1 48 55·9	+3·5

und nach denselben finden sich die Correctionen der obigen Ephemeride:

	dα	dδ
1871 Aug. 9	−21s83	−2′15″1
„ „ 12	−21·84	−2 17·7,

welche Fehler in Anbetracht der ungünstigen Umstände als mässig bezeichnet werden müssen. Die Notiz über die Wiederauffindung der Erato habe ich Nr. 1858 der Astron. Nachr. eingerückt.

In meiner oben citirten Abhandlung habe ich aus den Beobachtungen der ersten zwei Oppositionen das wahrscheinlichste Elementensystem abgeleitet, dieses aber nach einer nachträglichen isolirten, damals einigermassen zweifelhaften Berliner Beobachtung aus der dritten Opposition verbessert; es zeigt sich nun jetzt, dass ohne diese Beobachtung, wenn sie auch das Vertrauen in die vorausberechneten Orte wesentlich gestärkt und damit dem

Beobachter beträchtlichen Nutzen geschafft hat, die Auffindung hätte ebenso leicht bewerkstelligt werden können, denn die Correction der oben erwähnten ersteren Elemente beträgt für den 10. August $d\alpha = +25''8$, $d\delta = +2'32''$, also nicht wesentlich grösser, als die oben angesetzten Fehler der Ephemeride; ich lege daher für die nächste vorläufige Verbesserung der Elemente das erstere, sich an die Beobachtungen der zwei ersten Oppositionen sich anschliessende System zu Grunde; ich habe dasselbe in der Abhandlung auf die Form gebracht:

(62) Erato.

Mittl. Äq. 1860·0, Oscul. und Epoche 1860 Sept. 30·0 mittl. Berl. Zeit

$$
\begin{aligned}
L &= 14°38'38''6 - 3'44''14\,\Delta\mu \\
M &= 340\ 47\ \ 2\cdot6 + 3\ 13\cdot15\,\Delta\mu \\
\pi &= 33\ 51\ 36\cdot0 - 6\ 57\cdot29\,\Delta\mu \\
\Omega &= 126\ \ 9\ 31\cdot1 + 0\ \ 0\cdot27\,\Delta\mu \\
i &= 2\ 12\ 20\cdot3 - 0\ \ 1\cdot31\,\Delta\mu \\
\varphi &= 9\ 49\ 26\cdot5 - 2\ 31\cdot45\,\Delta\mu \\
\mu &= 641''06372 + \Delta\mu \\
\log a &= 0\cdot4954036 - 0\cdot0004517\,\Delta\mu
\end{aligned}
$$

und dieses System hat die Eigenschaft, dass es für ein gegebenes $\Delta\mu$ (Verbesserung der täglichen mittleren siderischen Bewegung in Einheiten der Bogensecunde) das wahrscheinlichste System gibt, indem die Summe der Fehlerquadrate in den zwei ersten Oppositionen von Fall zu Fall ein Minimum wird; $\Delta\mu = 0$ gesetzt gibt das absolut kleinste Minimum. Die oben angesetzte Ephemeride entspricht dem Werthe $\Delta\mu = +0''10277$ (vergl. den Anhang zu meiner citirten Erato-Abhandlung), ich schliesse nun aus den beiden oben angeführten Correctionen, die einerseits dem eben angeführten Werth von $\Delta\mu$, anderseits dem Werthe $\Delta\mu = 0$ entsprechen, dass die obigen Beobachtungen nahe dargestellt werden, wenn man setzt

$$\Delta\mu = +0''05445.$$

Verbessert man dem entsprechend die obigen Elemente und bringt die in der Abhandlung mitgetheilten Jupiter- und Saturn-Störungen von der Osculationsepoche bis 1871 September 13·0 an,

so erhält man die folgenden Elemente, welche für die Beischaffung der Ephemeriden und weiteren Störungsrechnungen zunächst als völlig ausreichend bezeichnet werden können.

(62) Erato.

Epoche und Osculation 1871 Sept. 13·0 mittl. Berl. Zeit
mittl. Äq. 1870·0.

$$
\begin{aligned}
L &= 5°56'15"3 \\
M &= 328\ 30\ 16·2 \\
\pi &= 37\ 25\ 59·1 \\
\Omega &= 125\ 48\ 56·6 \\
i &= 2\ 12\ 29·4 \\
\varphi &= 9\ 46\ 27·9 \\
\mu &= 641"3390 \\
\log.\ a &= 0·4952793
\end{aligned}
$$

Es fragt sich nun zunächst, wie durch dieses Elementensystem die Berliner Beobachtung der dritten Opposition dargestellt wird; macht man von den im Anhange zur Abhandlung angeführten Coëfficienten Gebrauch, so findet sich der Fehler der obigen Elemente in der dritten Opposition

$$d\alpha = +1^s08 \qquad d\delta = -6"7$$

welcher Fehler sich durch eine erneute Ausgleichung wohl leicht beträchtlich herabmindern liesse; ich habe aber diese Differenz vorerst auf sich beruhen lassen, da dieselbe einerseits nicht sehr beträchtlich ist und ferner kaum einen wesentlichen Einfluss auf die Bestimmung von $\Delta\mu$ nehmen dürfte, daher gleichsam nur einen periodischen Fehler während eines Umlaufes veranlasst, der keineswegs eine sehr merkbare Grösse erreichen kann, und für die nächsten Zwecke der weiteren Verfolgung des Planeten ganz ohne Bedeutung ist; ich beabsichtige aber, sobald mir verlässliches Beobachtungsmaterial aus der kommenden Opposition (Jänner 1873) zur Verfügung steht, mit Hinzuziehung der sodann auf fünf Oppositionen sich erstreckenden Beobachtungen eine erneute strenge Ausgleichung vorzunehmen.

Um schliesslich die Zuverlässigkeit meiner oben angeführten Beobachtungen völlig zu erweisen, habe ich eine den verbesserten Elementen entsprechende Ephemeride für die Opposition 1871

abgeleitet und mit drei September-Beobachtungen, die ich der Güte des Herrn L. Schulhof, Assistenten der Wiener Sternwarte, verdanke, verglichen; ich fand zunächst:

12h Berl. Zeit	α	δ	log. Δ	Abrrzt.
1871 Sept. 3	23h 54m 42·82	−3° 15′ 57″6	0·2397	14m 25s
4	23 54 5·18	−3 21 1·5	0·2386	14 22
5	23 53 26·74	−3 26 9·4	0·2375	14 20
6	23 52 47·55	−3 31 20·9	0·2365	14 18
7	23 52 7·65	−3 36 35·6	0·2355	14 16
8	23 51 27·09	−3 41 53·1	0·2346	14 14
9	23 50 45·93	−3 47 12·9	0·2339	14 13
10	23 50 4·23	−3 52 34·7	0·2331	14 12
11	23 49 22·04	−3 57 58·1	0·2324	14 10
12	23 48 39·42	−4 3 22·6	0·2318	14 9
13	23 47 56·43	−4 8 47·9	0·2313	14 8
14	23 47 13·11	−4 14 13·6	0·2308	14 7
15	23 46 29·51	−4 19 39·2	0·2304	14 6
16	23 45 45·69	−4 25 4·4	0·2301	14 6
☍ 17	23 45 1·70	−4 30 28·8	0·2298	14 5
18	23 44 17·61	−4 35 51·9	0·2296	14 5
19	23 43 33·49	−4 41 13·4	0·2294	14 4
20	23 42 49·39	−4 46 32·9	0·2294	14 4
21	23 42 5·37	−4 51 49·9	0·2294	14 4
22	23 41 21·48	−4 57 4·1	0·2295	14 4
23	23 40 37·77	−5 2 15·1	0·2296	14 5

Vergleicht man nun mit dieser Ephemeride die drei Wiener Beobachtungen, so erhält man als Ephemeridencorrectionen:

	$d\alpha$	$d\delta$	
1871 Sept. 9	+0·09	+5″1	X Opposition.
10	+0·26	+5·6	
11	0·00	−2·3	
im Mittel	+0·12	+2″8 [1]	

womit die gewünschte Prüfung erreicht ist.

[1] Nachträglich kam mir von Herrn Asaph Hall in Washington die Mittheilung zu, dass ihm am 5. September die Wiederauffindung der Erato gelungen sei, ohne noch von meiner am 9. August erfolgten Constatirung in Kenntniss gewesen zu sein; seine Beobachtung wird durch die obige verbesserte Ephemeride dargestellt: 1871 Sept. 5. Washington $d\alpha = +0{\cdot}14$, $d\delta = +0''9$.

Die nächste Aufgabe nun war die Ermittlung der Störungswerthe; indem ich das Intervall mit 40 Tagen annahm, als fixe Fundamentalebene die mittlere Ekliptik 1870·0 wählte und über die Masse der störenden Planeten die folgenden Annahmen machte

$$♃ = \frac{1}{1049} \qquad ♄ = \frac{1}{3501\cdot 6}$$

fanden sich die folgenden Differentialquotienten der Störungen.

Jupiter.

Datum	40 $di:dt$	40 $d\Omega:dt$	40 $d\varphi:dt$	40 $d\pi:dt$	1600 $d\mu:dt$	40 $dL:dt$
1871 Aug. 24	+0″052	+1″27	— 6″229	+0′37″34	+1″8785	+0″743
Oct. 3	+0·037	+1·25	— 6·166	+0 33·09	+1·7574	+2·086
Nov. 12	+0·023	+1·12	— 5·771	+0 28·83	+1·5660	+3·406
Dec. 22	+0·011	+0·91	— 4·984	+0 25·13	+1·2937	+4·668
1872 Jan. 31	+0·003	+0·63	— 3·783	+0 22·74	+0·9317	+5·821
März 11	+0·000	+0·29	— 2·172	+0 22·51	+0·4726	+6·810
April 20	+0·001	—0·08	— 0·204	+0 25·26	—0·0853	+7·556
Mai 30	+0·007	—0·44	+ 2·027	+0 31·74	—0·7415	+7·964
Juli 9	+0·018	—0·75	+ 4·395	+0 42·47	—1·4909	+7·914
Aug. 18	+0·034	—0·98	+ 6·780	+0 57·74	—2·3264	+7·259
Sept. 27	+0·053	—1·10	+ 9·017	+1 17·61	—3·2358	+5·812
Nov. 6	+0·073	—1·07	+10·997	+1 41·72	—4·2024	+3·356
Dec. 16	+0·090	—0·89	+12·633	+2 9·43	—5·2023	—0·375

Saturn.

Datum	40 $di:dt$	40 $d\Omega:dt$	40 $d\varphi:dt$	40 $d\pi:dt$	1600 $d\mu:dt$	40 $dL:dt$
1871 Aug. 24	+0″001	+0·014	—0″033	+1·720	+0″0425	+0″349
Oct. 3	0·000	+0·005	+0·066	+1·103	+0·0069	+0·346
Nov. 12	0·000	—0·007	+0·168	+0·653	—0·0255	+0·310
Dec. 22	0·000	—0·018	+0·263	+0·378	—0·0528	+0·245
1872 Jan. 31	0·000	—0·029	+0·342	+0·259	—0·0740	+0·163
März 11	0·000	—0·038	+0·398	+0·255	—0·0884	+0·068
April 20	0·000	—0·044	+0·430	+0·316	—0·0958	—0·033
Mai 30	+0·001	—0·048	+0·437	+0·390	—0·0967	—0·133
Juli 9	+0·001	—0·050	+0·424	+0·432	—0·0918	—0·229
Aug. 18	+0·002	—0·048	+0·398	+0·408	—0·0822	—0·316
Sept. 27	+0·002	—0·044	+0·363	+0·313	—0·0692	—0·393
Nov. 6	+0·002	—0·037	+0·331	+0·144	—0·0537	—0·456
Dec. 16	+0·003	—0·029	+0·301	—0·086	—0·0369	—0·505

Integrirt man nun diese Werthe zwischen den Grenzen 1871 Sept. 13·0 und 1873 Jänner 5·0, so findet man die Störungen der Elemente:

	Δi	$\Delta\Omega$	$\Delta\varphi$	$\Delta\pi$	$\Delta\mu$	ΔL
♃	+0"4	—1"1	+22"8	+10'0"0	—0"2825	+1'26"3
♄	0·0	—0·4	+ 3·9	+ 4·6	—0·0190	— 5·0

und demnach die Elemente, die zur Berechnung der folgenden Ephemeriden dienten:

(62) Erato.

Epoche und Osculation 1873 Jänner 5·0 mittl. Berl. Zeit
mittl. Äq. 1870·0.

$$L = 91°28'19"3$$
$$M = 53\ 52\ 15·6$$
$$\pi = 37\ 36\ 3·7$$
$$\Omega = 125\ 48\ 55·1$$
$$i = 2\ 12\ 29·8$$
$$\varphi = 9\ 46\ 54·6$$
$$\mu = 641"0375$$
$$\log a = 0·495416.$$

Demnach gestaltet sich genähert der geocentrische Lauf des Planeten in den Jahren 1872 und 1873 wie folgt:

Jahresephemeride.

0ʰ Berl. Zeit	A. R.	Decl.	log Δ	log r
1872 Jan. 11	0ʰ 10ᵐ9	— 1° 3'	0·439	0·417
„ 31	0 37·1	+ 1 56	0·474	0·415
Febr. 20	1 6·4	+ 5 8	0·503	0·415
März 11	1 38·0	+ 8 21	0·526	0·415
„ 31	2 11·4	+11 30	0·542	0·415
April 20	2 46·2	+14 24	0·553	0·416
Mai 10	3 22·2	+16 57	0·559	0·417
„ 30	3 58·9	+19 2	0·559	0·419
Juni 19	4 35·9	+20 35	0·554	0·421
Juli 9	5 12·5	+21 35	0·544	0·424
„ 29	5 48·0	+22 2	0·528	0·427
Aug. 18	6 21·5	+22 0	0·507	0·430
Sept. 7	6 52·0	+21 36	0·480	0·433
„ 27	7 18·2	+20 53	0·446	0·437

0ʰ Berl. Zeit	A. R.	Decl.	log Δ	log r
1872 Oct. 17	7ʰ 38ᵐ6	+20° 10'	0·408	0·442
Nov. 6	7 51·3	+19 40	0·365	0·446
„ 26	7 54·3	+19 35	0·324	0·451
Dec. 16	7 47·0	+20 1	0·291	0·455
1873 Jän. 5	7 31·1	+20 50	0·280	0·460
„ 25	7 13·9	+21 39	0·293	0·465
Febr. 14	7 2·7	+22 14	0·329	0·470
März 6	7 1·1	+22 30	0·377	0·474
„ 26	7 9·2	+22 28	0·429	0·479
April 15	7 25·1	+22 9	0·475	0·484
Mai 5	7 46·0	+21 28	0·517	0·489
„ 25	8 10·3	+20 26	0·552	0·494
Juni 14	8 36·7	+19 2	0·581	0·498
Juli 4	9 4·2	+17 18	0·603	0·503
„ 24	9 32·0	+15 18	0·619	0·507
Aug. 13	9 59·5	+13 0	0·628	0·511
Sept. 2	10 26·6	+10 35	0·631	0·515
„ 22	10 52·6	+ 8 6	0·628	0·519
Oct. 12	11 17·4	+ 5 39	0·618	0·523
Nov. 1	11 40·4	+ 3 20	0·601	0·527
„ 21	12 0·9	+ 1 16	0·578	0·530
Dec. 11	12 18·0	− 0 23	0·548	0·533
„ 31	12 30·7	− 1 31	0·513	0·537.

Für die Zeit der Opposition im Jahre 1873 erhielt ich die folgenden Ortsangaben:

12ʰ Berl. Zeit	α	δ	log Δ	Abrrzt.
1872 Dec. 22	7ʰ 42ᵐ 22ˢ67	+20° 15' 48"8	0·285253	16ᵐ 0ˢ
23	7 41 37·59	+20 18 11·1	0·284445	15 58
24	7 40 51·49	+20 20 35·6	0·283698	15 57
25	7 40 4·44	+20 23 2·2	0·283011	15 55
26	7 39 16·50	+20 25 30·6	0·282386	15 54
27	7 38 27·73	+20 28 0·8	0·281823	15 53
28	7 37 38·18	+20 30 32·6	0·281323	15 52
29	7 36 47·92	+20 33 5·7	0·280887	15 51
30	7 35 57·01	+20 35 40·0	0·280516	15 50
31	7 35 5·50	+20 38 15·4	0·280210	15 49
1873 Jän. 1	7 34 13·45	+20 40 51·6	0·279970	15 48
2	7 33 20·94	+20 43 28·5	0·279796	15 48
3	7 32 28·03	+20 46 5·8	0·279689	15 48
4	7 31 34·79	+20 48 43·4	0·279650	15 48
5	7 30 41·28	+20 51 21·0	0·279678	15 48
6	7 29 47·56	+20 53 58·5	0·279774	15 48

12ʰ Berl. Zeit	α	δ	log Δ	Abrrzt.
1873 Jän. 7	7ʰ28ᵐ53ˢ70	+20°56'35"7	0·279938	15ᵐ48ˢ
8	7 27 59·76	+20 59 12·3	0·280169	15 49
☍ 9	7 27 5·81	+20 1 48·2	0·280468	15 50
10	7 26 11·90	+21 4 23·3	0·280833	15 50
11	7 25 18·11	+21 6 57·5	0·281265	15 51
12	7 24 24·49	+21 9 30·5	0·281763	15 53
13	7 23 31·11	+21 12 2·2	0·282328	15 54
14	7 22 38·02	+21 14 32·6	0·282959	15 55
15	7 21 45·28	+21 17 1·7	0·283655	15 57
16	7 20 52·95	+21 19 29·3	0·284416	15 58
17	7 20 1·10	+21 21 55·2	0·285241	16 0
18	7 19 9·78	+21 24 19·3	0·286129	16 2
19	7 18 19·05	+21 26 41·5	0·287080	16 4
20	7 17 28·99	+21 29 1·6	0·288093	16 6
21	7 16 39·65	+21 31 19·5	0·289168	16 9
22	7 15 51·07	+21 33 35·3	0·290303	16 11
23	7 15 3·30	+21 35 48·8	0·291498	16 14
24	7 14 16·40	+21 38 0·1	0·292752	16 17
25	7 13 30·42	+21 40 9·0	0·294064	16 20
26	7 12 45·40	+21 42 15·4	0·295433	16 23
27	7 12 1·40	+21 44 19·3	0·296858	16 26

(62) ☍ ⊙ 1873 Jän. 9; 20ʰ

Lichtstärke = 1·47

Grösse = 12·0.

IV. (64) Angelina.

Meine im LX. Bande d. Sitzb. d. k. Akademie d. Wissensch. II. Abth., Oct.-Heft Jahrg. 1869 veröffentlichte Bahnbestimmung des Planeten (64) Angelina schliesst sich sechs beobachteten Oppositionen des Planeten innerhalb des Zeitraumes 1861—1868 an. Die daselbst erhaltenen Elemente, bei denen durch einen Druckfehler die Jahreszahl der Epoche statt 1868 richtig 1865 heissen soll, sind:

(64) Angelina.

Epoche, Oscul. und mittl. Äquinoct. 1865 Jän. 7·0 mittl. Berl. Zeit.

$L = 119°24'25"8$

$M = 355\ 46\ 58·1$

$\pi = 123\ 37\ 27·7$

$\Omega = 311\ 10\ 13·3$

$$i = 1°19'54"3$$
$$\varphi = 7\ 21\ 54 \cdot 7$$
$$\mu = 808"31196$$
$$\log.\ a = 0 \cdot 4282850.$$

Der Abhandlung selbst sind die Vorausberechnungen der Planetenorte für die Jahre 1870 und 1871 angefügt, die durch die Beobachtungen in befriedigender Weise bestätigt wurden. Es fanden sich nämlich im Jahre 1870 die Unterschiede im Sinne Beob.-Rechnung, nach vorläufiger Vergleichung:

Datum	Beobachtungs-ort	$d\alpha$	$d\delta$	
1870 April 5	Lund	—0"22	—1"4	VIII. Opposition.
„ 5	Leiden	—0·03	—0·4	
„ 6	„	—0·10	+0·3	
„ 7	Lund	—0·28	—0·9	
„ 11	Greenwich	0·00	+0·3	
„ 18	Leiden	—0·32	—1·3	
„ 19	„	—0·31	—0·3	
„ 20	Lund	—0·05	+0·7	
„ 21	„	+0·05	+1·1	
„ 22	Paris	—0·01	+0·8	
„ 25	„	+0·10	+0·4	
„ 26	„	—0·01	+1·7	
„ 27	„	+0·16	+0·5	
	im Mittel	—0"08	+0"1	

Von der Opposition des Jahres 1871 sind mir bislang nur zwei Wiener Beobachtungen bekannt geworden, die einen nahen Anschluss ebenfalls darthun; es findet sich nämlich:

Datum	Beobachtungs-ort	$d\alpha$	$d\delta$	
1871 Juli 15	Wien	+0"46	+3"7	IX. Opposition.
„ 17	„	+0·12	+3·0	
	im Mittel	+0"29	+3"3	

Für die Herstellung der Ephemeriden für das Jahr 1872 war es nur nöthig, die in der citirten Abhandlung schon so weit berechneten Störungswerthe durch Jupiter und Saturn zur Übertragung auf eine der Opposition nahe Osculationsepoche zu benützen, und ich fand so:

Angewandte Elemente.

Epoche und Osculation 1872 Oct. 17·0 Berl. Zeit
mittl. Äq. 1870·0.

$$L = 36°28'15"0$$
$$M = 270\ 49\ 35·4$$
$$\pi = 125\ 38\ 39·6$$
$$\Omega = 310\ 59\ 48·2$$
$$i = 1\ 19\ 27·0$$
$$\varphi = 7\ 14\ 57·5$$
$$\mu = 808"1082$$
$$\log a = 0·428359$$

$$x = [0·425999] \sin (E + 215°52'11"8) + 0·197184$$
$$y = [0·386845] \sin (E + 124\ 59\ \ 2·0) - 0·251947$$
$$z = [0·042177] \sin (E + 127\ 38\ 20·2) - 0·110115.$$

(64) Angelina 1872.

Jahresephemeride.

0h Berl. Zeit		A. R.	Decl.	log Δ	log r
Jän.	11	21h 24m4	—14°55'	0·582	0·475
„	31	21 53·6	—12 26	0·593	0·474
Febr.	20	22 22·9	— 9 41	0·597	0·472
März	11	22 52·0	— 6 44	0·594	0·470
„	31	23 20·5	— 3 41	0·585	0·468
April	20	23 48·1	— 0 38	0·569	0·465
Mai	10	0 14·5	+ 2 19	0·546	0·463
„	30	0 39·3	+ 5 6	0·516	0·460
Juni	19	1 1·9	+ 7 35	0·480	0·457
Juli	9	1 21·0	+ 9 41	0·438	0·453
„	29	1 35·4	+11 17	0·390	0·450
Aug.	18	1 42·8	+12 13	0·338	0·446
Sept.	7	1 41·5	+12 19	0·289	0·443
„	27	1 30·7	+11 31	0·251	0·439
Oct.	17	1 14·1	+ 9 59	0·237	0·434
Nov.	6	0 58·4	+ 8 21	0·249	0·430
„	26	0 50·6	+ 7 24	0·284	0·426
Dec.	16	0 52·9	+ 7 26	0·329	0·422
„	36	1 4·6	+ 8 28	0·375	0·417

(64) Angelina 1872.

Oppositionsephemeride.

12ʰ m. Berl. Zeit			α	δ	log Δ	Abrrzt.
1872	Sept.	26	1ʰ 31ᵐ 9ˢ81	+11°33′ 1″2	0·252291	14ᵐ50ˢ
		27	1 30 25·82	+11 29 17·1	0·250896	14 47
		28	1 29 40·87	+11 25 26·1	0·249560	14 44
		29	1 28 55·02	+11 21 28·4	0·248284	14 42
		30	1 28 8·33	+11 17 24·3	0·247069	14 39
	Oct.	1	1 27 20·84	+11 13 13·9	0·245917	14 37
		2	1 26 32·60	+11 8 57·4	0·244828	14 35
		3	1 25 43·67	+11 4 35·2	0·243804	14 33
		4	1 24 54·09	+11 0 7·6	0·242846	14 31
		5	1 24 3·93	+10 55 34·8	0·241955	14 29
		6	1 23 13·24	+10 50 57·1	0·241132	14 27
		7	1 22 22·09	+10 46 14·9	0·240376	14 26
		8	1 21 30·55	+10 41 28·4	0·239690	14 25
		9	1 20 38·67	+10 36 38·1	0·239074	14 23
		10	1 19 46·51	+10 31 44·2	0·238529	14 22
		11	1 18 54·13	+10 26 47·2	0·238054	14 21
		12	1 18 1·60	+10 21 47·4	0·237649	14 20
	☍	13	1 17 8·97	+10 16 45·1	0·237316	14 20
		14	1 16 16·31	+10 11 40·6	0·237055	14 19
		15	1 15 23·67	+10 6 34·4	0·236865	14 19
		16	1 14 31·12	+10 1 26·9	0·236746	14 19
		17	1 13 38·71	+ 9 56 18·3	0·236699	14 19
		18	1 12 46·51	+ 9 51 9·0	0·236723	14 19
		19	1 11 54·57	+ 9 45 59·4	0·236818	14 19
		20	1 11 2·96	+ 9 40 49·9	0·236985	14 19
		21	1 10 11·73	+ 9 35 40·8	0·237223	14 20
		22	1 9 20·95	+ 9 30 32·4	0·237531	14 20
		23	1 8 30·67	+ 9 25 25·2	0·237909	14 21
		24	1 7 40·94	+ 9 20 19·6	0·238357	14 22
		25	1 6 51·83	+ 9 15 16·0	0·238875	14 23
		26	1 6 3·39	+ 9 10 14·8	0·239462	14 24
		27	1 5 15·69	+ 9 5 16·3	0·240117	14 25
		28	1 4 28·77	+ 9 0 20·8	0·240838	14 27
		29	1 3 42·71	+ 8 55 28·8	0·241626	14 28
		30	1 2 57·54	+ 8 50 40·7	0·242479	14 30
		31	1 2 13·33	+ 8 45 56·8	0·243395	14 32
	Nov.	1	1 1 30·13	+ 8 41 17·5	0·244374	14 34

(64) ☍ ⊙ Oct. 14; 3ʰ

Lichtstärke = 0·92

Grösse = 10·6

V. (91) Ägina.

Ich werde seiner Zeit eine nur in Folge von ausständigen Vergleichssternbestimmungen noch nicht beendete Abhandlung über den Planeten (91) Ägina vorlegen, der seit seiner Entdeckungsopposition (1866) nicht mehr gesehen wurde, und dessen Wiederauffindung die von mir in Angriff genommenen Rechnungen ermöglichen sollen. Indem ich nun auf diese späteren Mittheilungen verweise, will ich nur erwähnen, dass ich mir vorerst Elemente abgeleitet habe aus den Beobachtungen Leipzig 1866 Nov. 10, Berlin 1866 Dec. 8, Berlin 1867 Jän. 5, Berlin 1867 Febr. 2, und habe gefunden:

Ägina.

Epoche 1866 Dec. 8·0 mittl. Berl. Zeit
mittl. Äq. 1866·0.

$$L = 50°46'38"6$$
$$M = 330\ 7\ 57·3$$
$$\pi = 80\ 38\ 41·3$$
$$\Omega = 10\ 59\ 34·9$$
$$i = 2\ 8\ 0·2$$
$$\varphi = 6\ 5\ 59·2$$
$$\mu = 853"460$$
$$\log a = 0·412549.$$

Mit Rücksicht auf die Jupiterstörungen habe ich die folgende Jahresephemeride für 1872 abgeleitet, die sich gewiss von der Wahrheit nicht allzuweit entfernen wird, und den Oppositionsmoment auf den 22. Febr. 1872 bestimmt.

0h Berl. Zeit	A. R.	Decl.	log Δ	log r
1872 Jän. 11	10h 49m6	+ 9°58'	0·224	0·386
„ 31	10 41·8	+10 47	0·186	0·390
Febr. 20	10 25·2	+12 17	0·172	0·393
März 11	10 7·5	+13 34	0·190	0·397
„ 31	9 57·3	+14 5	0·232	0·401
April 20	9 57·8	+13 37	0·287	0·405
Mai 10	10 8·0	+12 22	0·342	0·409
„ 30	10 25·2	+10 28	0·393	0·413
Juni 19	10 47·2	+ 8 4	0·439	0·417

0h Berl. Zeit	A. R.	Decl.	log Δ	log r
Juli 9	11h 12m4	+ 5°17'	0·477	0·421
„ 29	11 39·6	+ 2 12	0·509	0·424
Aug. 18	12 8·3	− 1 13	0·534	0·428
Sept. 7	12 38·2	− 4 23	0·553	0·431
„ 27	13 8·9	− 7 42	0·566	0·434
Oct. 17	13 40·3	−10 55	0·572	0·437
Nov. 6	14 12·2	−13 56	0·572	0·440
„ 26	14 44·4	−16 39	0·565	0·443
Dec. 16	15 16·3	−19 0	0·551	0·445
„ 36	15 47·4	−20 57	0·531	0·447.

VI. (113) Amalthea.

Der Planet (113) Amalthea wurde von Luther am 12. März 1871 entdeckt und die folgenden Zeilen berichten über diejenigen Arbeiten, welche ich unternommen habe, um die Wiederauffindung dieses Planeten in der nächsten, zweiten, Opposition zu sichern.

Das erste genäherte Elementensystem aus den Beobachtungen Bilk März 12, Wien März 20 und Josefstadt März 27 habe ich in Nr. 1839 der Astr. Nachrichten nebst der Ephemeride bis Juni 9 veröffentlicht; nachdem ich aber meine Beobachtungen dieses Planeten bis zum 10. Mai ausgedehnt hatte, leitete ich ein genaueres System ab, welchem ich die Beobachtungen Bilk März 12, Bilk und Josefstadt April 8 und Josefstadt Mai 10 zu Grunde legte (vergl. Nr. 1846 der Astr. Nachr.).

(113) Amalthea.

Epoche 1871 April 6·0 mittl. Berl. Zeit
mittl. Äq. 1871·0.

$$L = 185°19'\ 8"9$$
$$M = 346\ \ 3\ \ 35·2$$
$$\pi = 199\ \ 15\ \ 33·7$$
$$\Omega = 123\ \ 4\ \ 50·1$$
$$i = 5\ \ 2\ \ 31·1$$
$$\varphi = 4\ \ 55\ \ 7·6$$
$$\mu = 968"646$$
$$\log a = 0·375895.$$

Dieses Elementensystem hatte zunächst nur den Zweck, genauere Ephemeridenorte hauptsächlich für den Monat Juli herstellen zu können, um die andauernde Verfolgung des Planeten möglichst zu erleichtern; dasselbe hat sich aber schliesslich in so befriedigendem Anschluss an die Beobachtungen erwiesen, dass es unmittelbar zur Vergleichung mit den Beobachtungen und zur Bildung von Normalorten benützt werden konnte; ich leitete aus obigen Zahlen die folgende Ephemeride ab:

12ʰ Berl. Zeit			α	δ	log Δ	Aberrzt.
1871	März	11	12ʰ 1ᵐ59ˢ79	+7°37'47"0	0·0799	9ᵐ58ˢ
		12	12 1 9·66	+7 45 55·6	0·0793	9 57
		13	12 0 18·93	+7 54 1·8	0·0787	9 56
		14	11 59 27·68	+8 2 4·9	0·0782	9 56
		15	11 58 35·97	+8 10 3·8	0·0778	9 56
		16	11 57 43·89	+8 17 58·3	0·0775	9 55
		17	11 56 51·54	+8 25 47·5	0·0774	9 55
		18	11 55 59·00	+8 33 30·8	0·0773	9 55
		19	11 55 6·35	+8 41 7·5	0·0772	9 55
		20	11 54 13·68	+8 48 37·1	0·0773	9 55
		21	11 53 21·08	+8 55 58·8	0·0775	9 55
		22	11 52 28·64	+9 3 12·1	0·0778	9 56
		23	11 51 36·45	+9 10 16·3	0·0781	9 56
		24	11 50 44·59	+9 17 10·8	0·0786	9 56
		25	11 49 53·14	+9 23 55·2	0·0792	9 57
		26	11 49 2·20	+9 30 29·0	0·0798	9 58
		27	11 48 11·84	+9 36 51·6	0·0805	9 59
		28	11 47 22·14	+9 43 2·5	0·0813	10 0
		29	11 46 33·18	+9 49 1·4	0·0822	10 2
		30	11 45 45·03	+9 54 48·0	0·0832	10 3
		31	11 44 57·77	+10 0 21·8	0·0842	10 4
	April	1	11 44 11·45	+10 5 42·5	0·0854	10 6
		2	11 43 26·15	+10 10 49·8	0·0866	10 8
		3	11 42 41·92	+10 15 43·4	0·0879	10 10
		4	11 41 58·82	+10 20 23·1	0·0892	10 11
		5	11 41 16·91	+10 24 48·5	0·0907	10 13
		6	11 40 36·24	+10 28 59·6	0·0922	10 16
		7	11 39 56·87	+10 32 56·2	0·0938	10 18

12h Berl. Zeit		α	δ	log Δ	Abrrzt.
1871 April	8	11h 39m 18s·83	+10° 36' 38"·1	0·0955	10m 20s
	9	11 38 42·16	+10 40 5·3	0·0972	10 23
	10	11 38 6·92	+10 43 17·6	0·0990	10 25
	11	11 37 33·15	+10 46 14·9	0·1008	10 28
	12	11 37 0·91	+10 48 57·2	0·1027	10 31
	13	11 36 30·24	+10 51 24·4	0·1047	10 34
	14	11 36 1·16	+10 53 36·4	0·1067	10 36
	15	11 35 33·72	+10 55 33·1	0·1088	10 40
	16	11 35 7·93	+10 57 14·6	0·1109	10 43
	17	11 34 43·85	+10 58 40·7	0·1131	10 46
	18	11 34 21·49	+10 59 51·5	0·1153	10 50
	19	11 34 0·85	+11 0 47·2	0·1176	10 53
	20	11 33 41·96	+11 1 27·9	0·1199	10 56
	21	11 33 24·85	+11 1 53·5	0·1222	11 0
	22	11 33 9·52	+11 2 4·3	0·1246	11 3
	23	11 32 55·98	+11 2 0·3	0·1270	11 7
	24	11 32 44·25	+11 1 41·6	0·1295	11 11
	25	11 32 34·34	+11 1 8·4	0·1320	11 15
	26	11 32 26·24	+11 0 20·8	0·1345	11 19
	27	11 32 19·96	+10 59 19·0	0·1371	11 23
	28	11 32 15·49	+10 58 3·2	0·1397	11 27
	29	11 32 12·83	+10 56 33·6	0·1423	11 31
	30	11 32 11·97	+10 54 50·3	0·1450	11 35
Mai	1	11 32 12·89	+10 52 53·5	0·1476	11 39
	2	11 32 15·58	+10 50 43·5	0·1503	11 44
	3	11 32 20·02	+10 48 20·4	0·1530	11 48
	4	11 32 26·24	+10 45 44·5	0·1557	11 52
	5	11 32 34·19	+10 42 55·9	0·1584	11 57
	6	11 32 43·86	+10 39 54·9	0·1612	12 2
	7	11 32 55·22	+10 36 41·7	0·1639	12 6
	8	11 33 8·27	+10 33 16·4	0·1667	12 11
	9	11 33 23·00	+10 29 39·3	0·1694	12 15
	10	11 33 39·40	+10 25 50·5	0·1722	12 20
	11	11 33 57·46	+10 21 50·2	0·1750	12 25
	12	11 34 17·15	+10 17 38·7	0·1778	12 30
	13	11 34 38·46	+10 13 16·1	0·1806	12 35

12ʰ Berl. Zeit			α	δ	log Δ	Abrrzt.
1871	Mai	14	11ʰ35ᵐ1ˢ38	+10° 8'42"7	0·1835	12ᵐ40ˢ
		15	11 35 25·88	+10 3 58·4	0·1864	12 45
		16	11 35 51·95	+ 9 59 3·6	0·1892	12 50
		17	11 36 19·59	+ 9 53 58·4	0·1920	12 55
		18	11 36 48·74	+ 9 48 43·0	0 1948	13 0
		19	11 37 19·40	+ 9 43 17·5	0·1977	13 5
		20	11 37 51·54	+ 9 37 42·1	0·2005	13 10
		21	11 38 25·15	+ 9 31 57·0	0·2034	13 15
		22	11 39 0·21	+ 9 26 2·5	0·2062	13 20
		23	11 39 36·71	+ 9 19 58·8	0·2090	13 26
		24	11 40 14·61	+ 9 13 46·0	0·2118	13 31
		25	11 40 53·89	+ 9 7 24·3	0·2146	13 36
		26	11 41 34·52	+ 9 0 53·8	0·2174	13 41
		27	11 42 16·49	+ 8 54 14·8	0·2202	13 47
		28	11 42 59·76	+ 8 47 27·4	0·2230	13 52
		29	11 43 44·32	+ 8 40 31·8	0·2258	13 57
		30	11 44 30·14	+ 8 33 28·3	0·2286	14 3
		31	11 45 17·19	+ 8 26 17·0	0·2314	14 8
	Juni	1	11 46 5·46	+ 8 18 58·1	0·2342	14 14
		2	11 46 54·92	+ 8 11 31·7	0·2370	14 20
		3	11 47 45·55	+ 8 3 58·0	0·2397	14 25
		4	11 48 37·32	+ 7 56 17·2	0·2425	14 30
		5	11 49 30·21	+ 7 48 29·4	0·2452	14 36
		6	11 50 24·22	+ 7 40 34·7	0·2479	14 41
		7	11 51 19·32	+ 7 32 33·3	0·2506	14 47
		8	11 52 15·49	+ 7 24 25·3	0·2533	14 52
		9	11 53 12·71	+ 7 16 10·9	0·2560	14 58
		10	11 54 10·98	+ 7 7 50·1	0·2587	15 3
		11	11 55 10·27	+ 6 59 23·0	0·2613	15 9
		12	11 56 10·57	+ 6 50 49·8	0·2640	15 14
		13	11 57 11·87	+ 6 42 10·7	0·2666	15 20
		14	11 58 14·14	+ 6 33 25·7	0·2693	15 26
		15	11 59 17·37	+ 6 24 35·0	0·2719	15 31
		16	12 0 21·54	+ 6 15 38·7	0·2745	15 37
		17	12 1 26·64	+ 6 6 36·9	0·2771	15 42
		18	12 2 32·66	+ 5 57 29·8	0·2797	15 48

12ʰ Berl. Zeit		α	δ	log Δ	Abrrzt.
1871 Juni	19	12ʰ 3ᵐ39ˢ57	+ 5°48'17"4	0·2822	15ᵐ53ˢ
	20	12 4 47·37	+ 5 38 59·9	0·2848	15 59
	21	12 5 56·03	+ 5 29 37·4	0·2873	16 5
	22	12 7 5·54	+ 5 20 10·0	0·2898	16 10
	23	12 8 15·88	+ 5 10 37·9	0·2923	16 16
	24	12 9 27·04	+ 5 1 1·2	0·2948	16 21
	25	12 10 39·00	+ 4 51 20·1	0·2973	16 27
	26	12 11 51·74	+ 4 41 34·6	0·2998	16 33
	27	12 13 5·25	+ 4 31 44·8	0·3022	16 38
	28	12 14 19·50	+ 4 21 50·9	0·3047	16 44
	29	12 15 34·48	+ 4 11 52·9	0·3071	16 50
	30	12 16 50·19	+ 4 1 51·1	0·3095	16 55
Juli	1	12 18 6·61	+ 3 52 45·5	0·3119	17 1
	2	12 19 23·72	+ 3 41 36·3	0·3143	17 7
	3	12 20 41·51	+ 3 31 23·5	0·3166	17 12
	4	12 21 59·99	+ 3 21 7·3	0·3190	17 18
	5	12 23 19·13	+ 3 10 47·7	0·3213	17 23
	6	12 24 38·94	+ 3 0 24·8	0·3236	17 29
	7	12 25 59·40	+ 2 49 58·7	0·3259	17 34
	8	12 27 20·50	+ 2 39 29·6	0·3282	17 40
	9	12 28 42·23	+ 2 28 57·4	0·3305	17 46
	10	12 30 4·58	+ 2 18 22·2	0·3328	17 51
	11	12 31 27·54	+ 2 7 44·1	0·3350	17 57
	12	12 32 51·10	+ 1 57 3·2	0·3372	18 2
	13	12 34 15·27	+ 1 46 19·7	0·3394	18 7
	14	12 35 40·03	+ 1 35 33·6	0·3416	18 13
	15	12 37 5·38	+ 1 24 45·1	0·3438	18 19
	16	12 38 31·30	+ 1 13 54·1	0·3460	18 24
	17	12 39 57·80	+ 1 3 0·8	0·3481	18 30
	18	12 41 24·85	+ 0 52 5·3	0·3502	18 35
	19	12 42 52·46	+ 0 41 7·6	0·3523	18 41
	20	12 44 20·61	+ 0 30 7·9	0·3544	18 46
	21	12 45 49·30	+ 0 19 6·2	0·3565	18 52
	22	12 47 18·51	+ 0 8 2·6	0·3586	18 57
	23	12 48 48·24	— 0 3 2·7	0·3606	19 2
	24	12 50 18·48	— 0 14 9·7	0·3627	19 7
	25	12 51 49·23	— 0 25 18·3	0·3647	19 13

Ich habe nun mit dieser Ephemeride die mir bekannt gewordenen, überaus zahlreichen Beobachtungen der Amalthea verglichen und das Resultat derselben in folgender Übersicht zusammengestellt.

Datum		Beobachtungs-ort	B.—R. $d\alpha$	B.—R. $d\delta$
1871 März	12	Bilk	+0ˢ01	— 0"2
	13	„	(+0·27)	(+ 3·9)
	14	Berlin	—0·04	— 3·1
	15	Bilk	—0·14	— 1·0
	15	Bonn	(+0·81)	(—13·7)
	16	Berlin	—0·08	— 0·7
	16	Leiden	—0·17	— 4·0
	16	„	—0·22	— 3·9
	18	Berlin	—0·16	— 2·6
	19	„	—0·34	— 2·8
	19	Bilk	—0·22	— 2·3
	19	Leiden	—0·12	+ 1·6
	20	Berlin	—0·18	— 2·5
	20	Bilk	+0·01	— 2·4
	21	Berlin	—0·04	— 1·8
	21	Wien	—0·19	— 4·6
	21	„	—0·35	— 0·8
	21	Lund	—0·02	— 0·3
	21	Kremsmünster.	—0·13	— 2·7
	21	Wien	—0·07	— 8·2
	22	Bilk	—0·14	+ 0·6
	22	Lund	—0·13	+ 0·2
	22	Helsingfors ...	(+0·36)	(—29·5)
	22	Wien	+0·04	— 1·5
	23	Josefstadt	+0·05	— 1·8
	23	„	—0·21	— 4·9
	23	„	+0·11	— 0·7
	23	Berlin	—0·21	+ 0·1
	23	Wien	—0·12	— 1·4
	23	Helsingfors ...	—0·02	— 3·9
	23	Bilk	—0·16	— 1·3
	23	Helsingfors ...	—0·08	— 1·2
	23	Lund	—0·13	— 3·7
	23	Kremsmünster.	—0·14	— 2·1
	24	Josefstadt	—0·16	— 1·6
	24	Berlin	—0·30	— 1·5
	24	Helsingfors ...	—0·13	(+ 4·0)
	24	Lund	—0·27	— 1·4

Datum			Beobachtungs-ort	B.—R. $d\alpha$	$d\delta$
1871	März	24	Wien	—0·37	—1·8
		24	Bilk	+0·04	—4·3
		24	Kremsmünster.	—0·05	—2·1
		25	Josefstadt	—0·18	—0·8
		25	Berlin	—0·11	—5·7
		25	Lund	+0·06	—0·1
		25	Wien	+0·13	—2·8
		25	"	—0·39	—0·7
		25	"	—0·11	—1·3
		25	Berlin	—0·10	—3·0
		26	Josefstadt	—0·07	+1·2
		26	"	—0·10	—2·1
		26	Wien	—0·14	—5·9
		26	Lund	—0·36	—2·3
		26	Wien	—0·09	—2·0
		27	Josefstadt	+0·23	+0·4
		27	Wien	+0·02	—4·8
		27	Josefstadt	+0·03	—4·9
		27	Lund	—0·14	—2·7
		28	Wien	+0·22	—3·0
		28	Lund	+0·20	—1·6
		28	Berlin	+0·04	—4·1
		29	"	—0·22	—2·5
		29	Lund	—0·31	—1·1
		30	Berlin	+0·05	—2·7
		30	Lund	—0·32	—1·3
		31	"	—0·25	—1·8
	April	1	"	+0·06	—2·3
		1	"	+0·02	—2·3
		1	Berlin	—0·03	—3·9
		2	Lund	+0·06	+1·4
		4	Berlin	—0·09	—2·6
		5	"	—0·06	—3·5
		5	Lund	—0·10	—2·2
		6	"	+0·06	—2·4
		6	Berlin	+0·04	—3·0
		7	"	—0·27	—2·0
		7	Hamburg	+0·14	—4·2
		8	Josefstadt	—0·27	—0·4
		8	Wien	+0·08	+1·2
		8	Bilk	+0·17	+0·1
		9	Lund	+0·06	—3·0
		9	Hamburg	—0·16	—1·7

Datum			Beobachtungs-ort	B.—R. $d\alpha$	$d\delta$
1871	April	10	Berlin	—0·21	—3·3
		10	Lund	+0·01	—3·5
		11	Berlin	+0·03	—3·1
		11	Wien	+0·10	—4·1
		11	Hamburg	—0·27	—2·9
		12	Wien	+0·11	—4·1
		12	Josefstadt	+0·06	—3·9
		13	Wien	+0·24	—4·6
		14	Lund	+0·12	—5·0
		14	Bilk	—0·10	—2·0
		14	Berlin	+0·09	—4·6
		14	Wien	—0·33	0·0
		18	Berlin	+0·17	—4·5
		18	Lund	—0·15	—3·9
		20	Berlin	+0·02	—3·9
		22	Hamburg	—0·14	—4·2
		23	Lund	+0·02	—3·0
		26	Josefstadt	—0·08	—0·7
		27	Lund	+0·02	—4·6
		28	„	+0·09	—3·8
		30	„	+0·08	—4·8
	Mai	2	Berlin	—0·06	—6·7
		2	Hamburg	—0·07	—3·3
		3	Berlin	+0·01	—6·0
		3	Lund	+0·12	—4·2
		6	Hamburg	—0·08	—3·4
		7	Berlin	+0·24	—4·4
		9	„	+0·07	—0·6
		9	Hamburg	—0·18	—2·4
		10	Josefstadt	+0·04	—0·2
		10	Berlin	—0·02	—1·5
		10	Lund	+0·26	+2·9
		15	„	—0·03	—3·7
		15	Hamburg	—0·13	—1·9
		17	Berlin	+0·27	—3·0
		17	Lund	+0·10	—4·6
		17	Hamburg	—0·33	—6·5
		18	Berlin	+0·31	—3·6
		18	Clinton	—0·13	—1·2
		19	Berlin	+0·57	—6·0
		20	Clinton	+0·11	—3·9
		21	Lund	+0·09	—4·8
		21	Hamburg	+0·03	—3·5

Datum			Beobachtungs-ort	B.—R. $d\alpha$	$d\delta$
1871	Mai	22	Berlin	+0·31	— 2·8
		22	Lund	+0·24	— 2·4
		23	Berlin	+0·16	— 2·1
		23	Hamburg	—0·11	— 3·2
		24	Berlin	+0·22	— 5·0
		24	Lund	+0·09	— 2·9
		24	Clinton	+0·22	— 4·9
		25	Josefstadt	+0·34	— 2·6
		25	Lund	+0·23	— 5·3
		25	Hamburg	+0·05	— 4·1
		26	Lund	+0·22	— 1·6
		26	Hamburg	+0·28	— 2·0
		26	Clinton	+0·21	— 5·3
		27	Hamburg	+0·18	— 7·5
	Juni	4	Clinton	+0·06	— 5·1
		15	Hamburg	(—0·72)	(+11·7)
		16	Josefstadt	+0·73	— 0·1
		20	Berlin	+0·29	— 3·3
		22	Clinton	+0·53	— 5·4
	Juli	12	„	+0·81	— 0·5
		13	„	+0·07	— 1·7

Nach Abschluss meiner Rechnungen über Amalthea kam mir eine schöne, sehr umfassende Reihe von Washingtoner Beobachtungen zu, die leider keine Berücksichtigung mehr finden konnte; ich nehme aber die Vergleichung derselben mit meiner Ephemeride hier auf um zu zeigen, dass meine Annahmen über die Ephemeridencorrectionen durch Hinzuziehung dieser Beobachtungen kaum eine wesentliche Änderung erlitten hätten.

Datum			Beobachtungs-ort	$d\alpha$	$d\delta$
1871	April	23	Washington...	—0·28	—3·7
		24	„ ...	—0·25	—0·9
	Juni	9	„ ...	+0·06	+3·7
		12	„ ...	—0·36	—2·3
		14	„ ...	+0·17	—2·5
		15	„ ...	+0·22	—3·8
		16	„ ...	+0·17	—5·9
		19	„ ...	+0·37	—4·7
	Juli	7	„ ...	(—0·88)	(—7·8)
		14	„ ...	+0·45	—5·0
		15	„ ...	+0·42	—3·5

Um nun dieses reiche Beobachtungsmaterial in einfacher Weise zur Bahnbestimmung zu verwerthen, suchte ich mir durch Construction die Fehlercurven zu ermitteln und fand so, dass den Beobachtungen nahehin genügt wird, wenn man annimmt als Fehler der Ephemeride:

m. Berl. Zeit	$d\alpha$	$d\delta$
1871 März 15·5	−0ˢ13	−1″7
April 24·5	0·00	−3·2
Juni 3·5	+0·22	−3·3
Juli 13·5	+0·51	−2·2

Bringt man diese Correctionen an die Ephemeride an, und reducirt dann die so erhaltenen Normalorte auf den mittleren Äquator 1870·0, so erhält man

	α	δ
1871 März 15·5	179°38′17″6	+ 8°10′19″4
April 24·5	173 10 19·6	+11 1 57·3
Juni 3·5	176 55 37·3	+ 8 4 16·0
Juli 13·5	188 33 1·3	+ 1 46 41·3

und diese Orte galten mir zur Grundlage für die Bahnbestimmung aus vier Orten; ich habe mich hiezu der Methode bedient, die ich in meinem Lehrbuche über Bahnbestimmungen veröffentlicht habe, durch die den äussersten Orten und den Längen der mittleren Orte völlig genügt wird; um aber den störenden Einfluss durch Jupiter und Saturn zu berücksichtigen, habe ich denselben in Rechnung gezogen und gefunden, dass man denselben eliminirt, wenn man an die beobachteten Ekliptical-Coordinaten die folgenden Correctionen anbringt, für die die Osculationsepoche 1871 April 6·0 mittl. Berliner Zeit als massgebend angesehen ist.

	$d\lambda$	$d\beta$
1871 März 15·5	−0″1	0″0
April 24·5	0·0	0·0
Juni 3·5	−0·5	0·0
Juli 13·5	−1·4	0·0

Verwandelt man die obigen Angaben über die Normalorte in Länge und Breite, und corrigirt, um auf die bekannte Weise die Sonnenbreiten zu eliminiren, die dann erhaltenen Breiten und

setzt die sich ergebenden Sonnencoordinaten nach dem Berliner Jahrbuche an, so erhält man die folgenden Grundlagen der Rechnung, für welche das mittlere Äquinoctium 1870·0 als massgebend angesehen wurde.

		λ	β	L	log R
1871 März	15·5	176°23'51"6	+7°20'56"4	354°55'55"6	9·997914
April	24·5	169 21 8·9	(+7 25 4·7)	34 17 12·4	0·002801
Juni	3·5	173 57 42·5	(+6 10 52·5)	72 50 59·6	0·006335
Juli	13·5	187 8 55·8	+5 1 36·0	111 1 14·3	0·007097

Die Breiten der beiden mittleren Orte habe ich in Klammern angesetzt, da dieselben zur Bestimmung der Elemente nicht herangezogen werden.

Die erhaltenen Elemente sind:

(113) Amalthea.

mittl. Äq.: 1870·0

Epoche und Osculation 1871 April 6·0 m. Berl. Zeit.

$$
\begin{aligned}
L &= 185°18'23"7\\
M &= 346\ \ 4\ \ 3·5\\
\pi &= 199\ \ 14\ \ 20·2\\
\Omega &= 123\ \ 4\ \ 38·3\\
i &= 5\ \ 2\ \ 31·8\\
\varphi &= 4\ \ 55\ \ 22·8\\
\mu &= 968"573\\
\log a &= 0·375917.
\end{aligned}
$$

Ich habe die Rechnung durchaus nur mit 6stelligen Logarithmentafeln geführt und finde die Darstellung der obigen Orte durch dieses System

	$d\lambda$	$d\beta$
I.	+0"1	+0·1
II.	—0·6	(—2·5)
III.	0·0	(—2·2)
IV.	+0·1	—0·1

Ehe ich daran gehe, die Rechnungen mitzutheilen, die ich ausgeführt habe zur Herstellung der Ephemeriden für das Jahr 1872, will ich noch hier die Angaben sammeln, die mir zur Bestimmung der mittleren Oppositionsgrösse gedient haben, ich fand:

Datum			Beobachter	geschätzte Grösse	mittlere Grösse
1871	März	12	Luther	10·3	10·8
		14	Tietjen	10·8	11·3
		16	„	10·6	11·1
		16	Becker	10·5	11·0
		23	Oppolzer..........	10·0	10·5
		24	„	10·2	10·7
		25	„	10·3	10·8
	April	8	„	10·5	10·9
		12	„	10·4	10·8
		26	„	11·0	11·2
	Mai	10	„	11·2	11·3
		17	Tietjen	11·2	11·1
		18	„	11·3	11·2
		18	C. H. F. Peters	12·0	11·9
		22	Tietjen	11·5	11·4
		24	„	11·4	11·2
		25	Oppolzer..........	11·3	11·1
	Juni	16	„	12·0	11·5
	Juli	12	C. H. F. Peters	13·0	12·2

Ich finde also im Mittel für die mittlere Oppositionsgrösse:

$$Mg = 11{\cdot}2.$$

Die Störungsrechnungen habe ich nach Encke's Methode ausgeführt und hiebei auf Jupiter $\left(\frac{1}{1047\cdot9}\right)$ und Saturn $\left(\frac{1}{3501\cdot6}\right)$ Rücksicht genommen; lässt man als mittleres fixes Äquinoctium das des Jahres 1870·0 gelten, so erhält man die folgenden Störungswerthe der rechtwinkligen Ekliptical-Coordinaten, die ich in Einheiten der siebenten Decimale ansetze.

			Δx	Δy	Δz
1871	Febr.	5	+ 72	— 36	— 5
	März	17	+ 8	— 4	— 1
	April	26	+ 7	— 5	— 1
	Juni	5	+ 63	— 47	— 5
	Juli	15	+171	— 136	—13
	Aug.	24	+325	— 274	—25
	Oct.	3	+512	— 463	—39
	Nov.	12	+714	— 721	—53
	Dec.	22	+916	—1079	—64

			Δx	Δy	Δz
1872	Jän.	31	+ 1118	— 1589	— 68
	März	11	+ 1345	— 2310	— 63
	April	20	+ 1656	— 3297	— 51
	Mai	30	+ 2137	— 4589	— 35
	Juli	9	+ 2899	— 6192	— 22
	Aug.	18	+ 4064	— 8075	— 23
	Sept.	27	+ 5755	—10159	— 50
	Nov.	6	+ 8077	—12326	—116
	Dec.	16	+11110	—14414	—234
1873	Jän.	25	+14892	—16228	—416

Mit Hilfe dieser Zahlen, in Verbindung mit den obigen Elementen, war es nun sofort möglich, die Ephemeriden für das Jahr 1872 abzuleiten, und ich theile zunächst die genäherte Jahresephemeride mit, nachher habe ich die genaue Oppositionsephemeride angesetzt.

(113) Amalthea.

Jahresephemeride.

0^h Berl. Zeit			A. R.	Decl.	log Δ	log r
1872	Jän.	11	$18^h 25^m 9$	—21°21'	0·509	0·360
	„	31	19 8·3	—20 48	0·500	0·364
	Febr.	20	19 48·7	—19 39	0·486	0·368
	März	11	20 26·6	—18 1	0·465	0·371
	„	31	21 1·1	—16 7	0·438	0·375
	April	20	21 31·8	—14 10	0·404	0·378
	Mai	10	21 57·8	—12 23	0·364	0·382
	„	30	22 18·0	—11 6	0·319	0·385
	Juni	19	22 30·6	—10 34	0·270	0·388
	Juli	9	22 33·8	—11 7	0·222	0·391
	„	29	22 26·3	—12 45	0·185	0·394
	Aug.	18	22 10·2	—15 6	0·171	0·397
	Sept.	7	21 52·6	—17 12	0·188	0·399
	„	27	21 41·8	—18 18	0·229	0·401
	Oct.	17	21 41·7	—18 16	0·283	0·403
	Nov.	6	21 51·7	—17 17	0·339	0·405
	„	26	22 9·5	—15 34	0·390	0·407
	Dec.	16	22 32·6	—13 14	0·435	0·408
	„	36	22 59·3	—10 28	0·473	0·409

(113) Amalthea.

Oppositionsephemeride.

12ʰ Berl. Zeit			α	δ	log Δ	Abrrzt.
1872	Aug	3	22ʰ22ᵐ30ˢ08	−13°22′13″3	0·178366	12ᵐ31ˢ
		4	22 21 44·95	−13 29 7·8	0·177386	12 29
		5	22 20 58·71	−13 36 6·7	0·176475	12 27
		6	22 20 11·44	−13 43 9·3	0·175634	12 26
		7	22 19 23·19	−13 50 15·1	0·174864	12 25
		8	22 18 34·03	−13 57 23·6	0·174167	12 23
		9	22 17 44·02	−14 4 34·3	0·173544	12 22
		10	22 16 53·22	−14 11 46·8	0·172995	12 21
		11	22 16 1·69	−14 19 0·4	0·172521	12 21
		12	22 15 9·49	−14 26 14·7	0·172124	12 20
		13	22 14 16·70	−14 33 29·1	0·171803	12 19
		14	22 13 23·37	−14 40 43·3	0·171559	12 19
		15	22 12 29·58	−14 47 56·7	0·171392	12 19
		16	22 11 35·39	−14 55 8·9	0·171304	12 19
		17	22 10 40·87	−15 2 19·5	0·171293	12 19
		18	22 9 46·07	−15 9 27·9	0·171360	12 19
		19	22 8 51·07	−15 16 33·7	0·171505	12 19
		☍ 20	22 7 55·91	−15 23 36·4	0·171729	12 19
		21	22 7 0·68	−15 30 35·6	0·172031	12 20
		22	22 6 5·44	−15 37 30·9	0·172411	12 20
		23	22 5 10·27	−15 44 22·0	0·172869	12 21
		24	22 4 15·22	−15 51 8·4	0·173406	12 22
		25	22 3 20·38	−15 57 49·6	0·174020	12 23
		26	22 2 25·81	−16 4 25·3	0·174710	12 24
		27	22 1 31·58	−16 10 55·1	0·175477	12 26
		28	22 0 37·76	−16 17 18·4	0·176321	12 27
		29	21 59 44·41	−16 23 35·0	0·177239	12 29
		30	21 58 51·62	−16 29 44·4	0·178231	12 30
		31	21 57 59·45	−16 35 46·4	0·179296	12 32
	Sept.	1	21 57 8·00	−16 41 40·6	0·180434	12 34
		2	21 56 17·30	−16 47 26·7	0·181644	12 36
		3	21 55 27·42	−16 53 4·4	0·182923	12 39
		4	21 54 38·41	−16 58 33·5	0·184270	12 41
		5	21 53 50·35	−17 3 53·7	0·185685	12 43
		6	21 53 3·28	−17 9 4·7	0·187165	12 46
		7	21 52 17·27	−17 14 6·2	0·188710	12 49
		8	21 51 32·37	−17 18 58·2	0·190320	12 52

(113) ☍ ☉ Aug. 20, 19ʰ Lichtstärke = 0·78

Grösse = 11·5.

XXII. SITZUNG VOM 19. OCTOBER 1871.

Herr Leopold Gegenbauer, Prof. an der n.-ö. Landes-Oberrealschule in Krems, übersendet eine Abhandlung: „Auswertung einiger Doppelintegrale".

Der Secretär bringt eine weitere Mittheilung des Herrn Dr. A. Petermann in Gotha vom 9. October l. J., über die Entdeckung eines offenen Polarmeeres durch die Herren Payer und Weyprecht im September 1871, zur Kenntniss der Classe.

Herr Regierungsrath Dr. C. v. Littrow macht eine Mittheilung über die Auffindung des Kometen „Tuttle" am 12. October l. J. durch den Assistenten der Sternwarte in Marseille, Herrn Alph. Borelly, und am 15. d. M. durch Herrn Hofrath Winnecke in Carlsruhe.

Herr *stud. phil.* Hermann Frombeck überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Ein Beitrag zur Theorie der Functionen complexer Variablen".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften und Künste, Südslavische: Rad. Knjiga XVI. U Zagrebu, 1871; 8°. — Starine. Knjiga III. — Stari pisci hravaski. Knjiga III. U Zagrebu, 1871; 8°.

— — Königl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. August 1871. Berlin; 8°.

— — Kais., zu St. Petersburg: Mémoires. Tome XVIII, 2e Partie; Tome XIX, 1e Partie. St. Pétersbourg, 1871; 8°. (Russisch.)

Archivio per l'Antropologia e la Etnologia. I. Vol., Fasc. 3°. Firenze, 1871; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1863 (Bd. 78. 15.) Altona, 1871; 4°.

Beobachtungen, Magnetische und meteorologische, auf der k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1870. 31. Jahrgang. Prag, 1871; 4⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIII, Nr. 14. Paris, 1871; 4⁰.

Genootschap, bataafsch, der Proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam: Nieuwe Verhandelingen. II. Reeks: II. Deel, 1. Stuk. Rotterdam, 1870; 4⁰.

Gesellschaft, naturforschende, zu Freiburg i. Br.: Berichte über die Verhandlungen. Band V, Heft 3 & 4. Freiburg i. Br., 1870; 8⁰.

— Physikalisch-Medicin., in Würzburg: Verhandlungen. N. F. II. Band, 1. & 2. Heft. Würzburg, 1871; 8⁰.

— Deutsche geologische: Zeitschrift. XXIII. Band, 2. Heft. Berlin, 1871; 8⁰.

— Naturforschende, zu Emden: LVI. Jahresbericht. 1870. Emden, 1871; 8⁰. — Kleine Schriften. XV. Emden, 1871; kl. 4⁰.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXII. Jahrgang, Nr. 41. Wien, 1871; 4⁰.

Isis. Jahrgang 1871. Nr. 1—6. Dresden; 8⁰.

Jahresberichte: Siehe Programme.

Landbote, Der steirische. 4. Jahrgang, Nr. 21. Graz, 1871; 4⁰.

Laube, Gust. C., Reise der Hansa in's nördliche Eismeer. Reisebriefe und Erinnerungsblätter. Prag, 1871; 8⁰.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 17. Band, 1871, X. Heft. Gotha; 4⁰.

Nature. Nr. 102, Vol. IV. London, 1871; 4⁰.

Naturforscher-Verein zu Riga: Arbeiten. N. F. IV. Heft. Riga, 1871; 8⁰.

Onderzoekingen gedaan in het Physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogschool. III. Reeks: I., Aflev. 1. Utrecht, 1871; 8⁰.

Programme und Jahresberichte der Gymnasien zu Bistritz, Brixen, Capodistria, Eger, Essek, Hermannstadt, Kaschau, Kronstadt, Böhm.-Leipa, Leoben, Marburg, Pilsen, Pressburg, Rosenau, Schässburg, Spalato, Tabor, Trient, Warasdin, des akadem. Gymnasiums, sowie des Gymnasiums zu den

Schotten in Wien, der Gymnasien zu Zara und Zengg, und der Communal-Oberrealschule in Böhm.-Leipa. 1871; 4° & 8°.

Société des Ingénieurs civils: Mémoires et compte-rendu des travaux. 3e Série. 23e Année, 1er & 2e Cahiers. Paris, 1870; 8°. — Séances du 6 Janvier au 1er Septembre 1871. 8°.

— littéraire, scientifique et artistique d'Apt. (Vaucluse): Annales. Ve Année. 1867—1868. Apt, 1871; 8°.

Society, The Asiatic, of Bengal: Journal. Part II, Nr. 1. 1871. 8°. — Proceedings. Nrs. III—IV. March, April 1871. 8°.

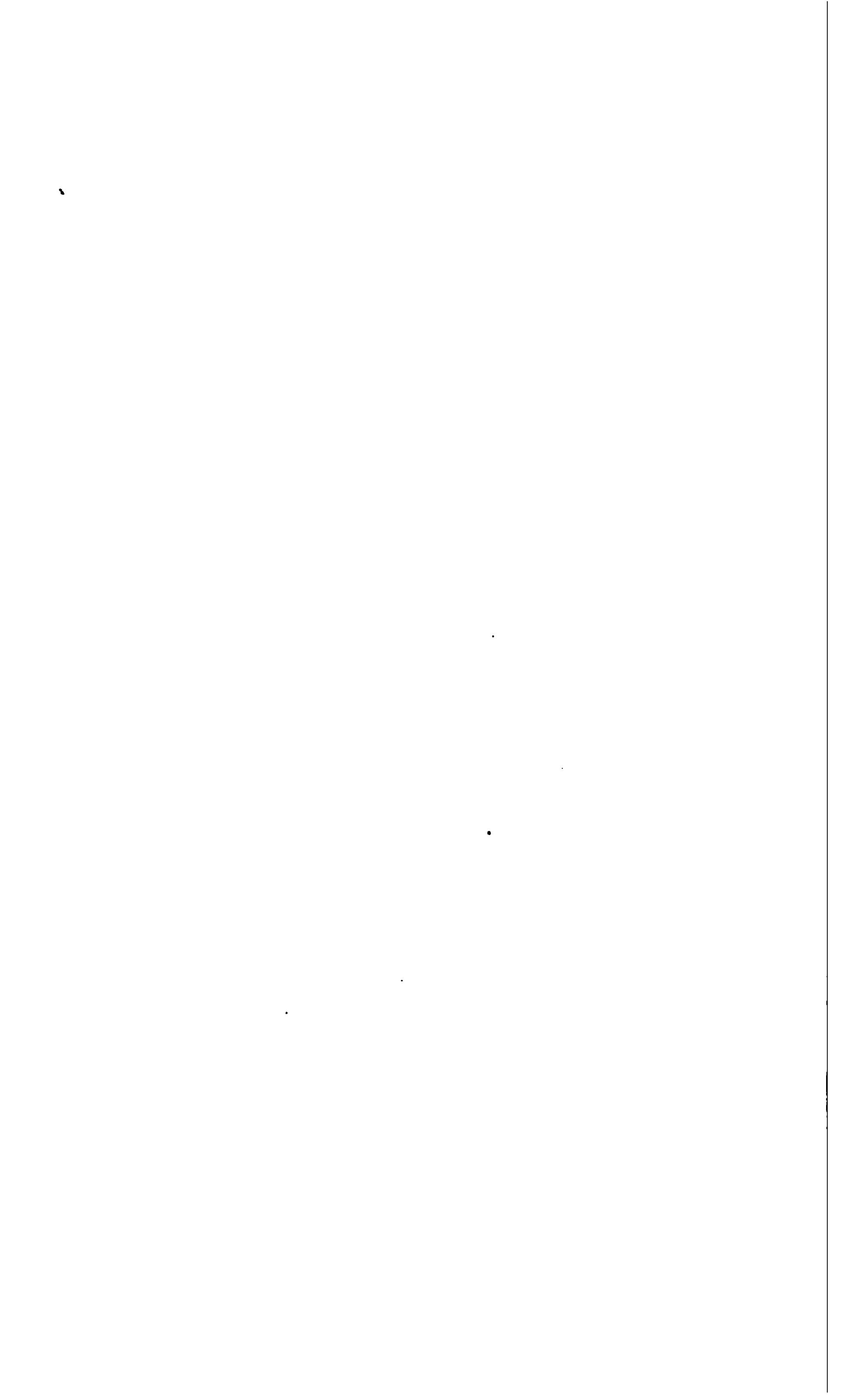
— The Astronomical, of London: Monthly Notices. Vol. XXXI, Nr. 8. London, 1871; 8°.

Verein für siebenbürgische Landeskunde: Jahresbericht für das Vereinsjahr 1869/70. Hermannstadt, 1870; 8°. — Archiv. N. F. IX. Band, 2. Heft. 1871. 8°.

— Nassauischer, für Naturkunde: Jahrbücher. Jahrgang XXIII & XXIV. Wiesbaden, 1869 & 1870; 8°.

— naturhistor., der preuss. Rheinlande und Westphalens: Verhandlungen. XXVII. Jahrgang. (III. Folge: 7. Jahrg.) 1. & 2. Hälfte. Bonn, 1870; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXI. Jahrgang, Nr. 41. Wien, 1871; 4°.



Die jedem Fachmanne bekannten, bei der raschen Entwickelung der Wissenschaft von Jahr zu Jahr sich steigernden Unzukömmlichkeiten, welche mit der cumulativen Herausgabe von Abhandlungen verbunden sind, die sich auf sämmtliche naturwissenschaftliche Fächer beziehen, haben die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften bestimmt, ihre Sitzungsberichte in zwei gesonderten Abtheilungen erscheinen zu lassen.

Die **erste Abtheilung** enthält die Abhandlungen aus der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Anatomie, Geologie und Paläontologie; die **zweite Abtheilung** die aus der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

Von jeder dieser Abtheilungen erscheint jeden Monat mit Ausnahme von August und September ein Heft, welches drei Sitzungen umfasst. Der Jahrgang enthält somit zehn Hefte.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine vollständige Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen voran, selbst wenn diese nicht zur Aufnahme in die Schriften der Akademie bestimmt werden.

Der Preis des Jahrganges beträgt für eine Abtheilung 12 Gulden ö. W.

Von allen grösseren Abhandlungen kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und sind durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn zu beziehen.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

…DEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

…MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXIV. BAND. IV. u. V. HEFT.

…gang 1871. — November u. December.

(Mit 3 Tafeln.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

…Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie,
…Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

[illegible]

1871.

INHALT

des 4. und 5. Heftes (November und December 1871) des 64. Bandes, II. Abth. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 50 kr. = 1 Thlr. 20 Ngr.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

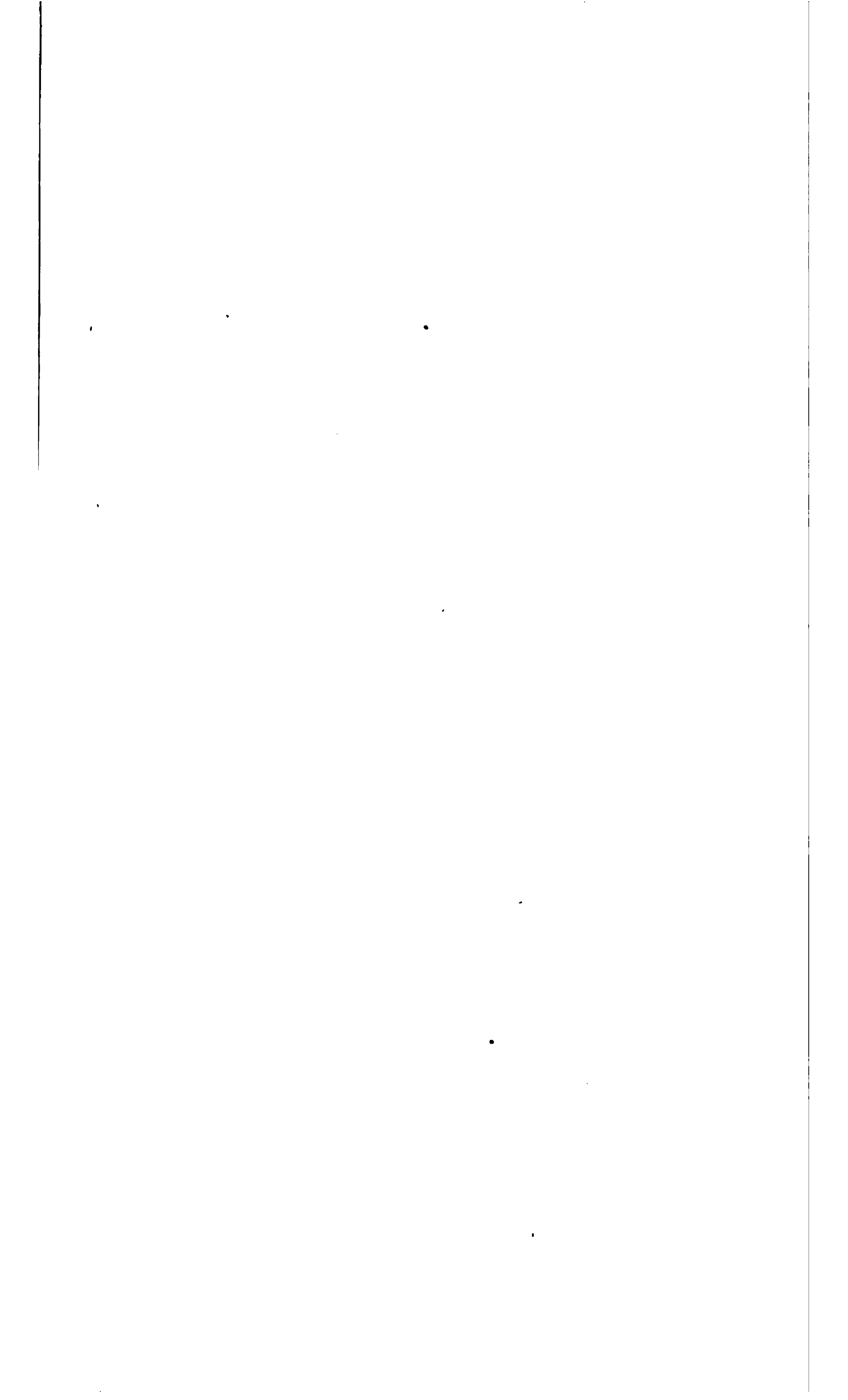
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXIV. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

9.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.



XXIII. SITZUNG VOM 2. NOVEMBER 1871.

In Verhinderung des Präsidenten führt Herr Hofrath Freih. v. Ettingshausen den Vorsitz.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Über das Verhältniss einer Kreislinie zu ihrem Durchmesser", vom Herrn Franz Drabalek, jub. k. k. Bezirksamts-Kanzlisten zu Neutitschein.

„Über die Identität von Constructionen in perspectivischer, schiefer und orthogonaler Projection", vom Herrn R. Staudigl.

„Auswerthung bestimmter Integrale", vom Herrn Prof. Leop. Gegenbauer in Krems.

Herr Eugen Bloek, Astronom zu Pulkowa, übersendet eine Note bezüglich des im 22. Bande der Sitzungsberichte veröffentlichten Nordlichtkataloges vom Herrn Dr. A. Boué, in welcher auf darin enthaltene Unrichtigkeiten aufmerksam gemacht wird.

Herr Prof. V. v. Lang legt eine Abhandlung: „Zur dynamischen Theorie der Gase" vor.

Herr Dr. J. Peyritsch überreicht eine Abhandlung: „Über einige Pilze aus der Familie der Laboulbenien".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Imp. des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Lyon: Mémoires. Classe des Sciences: Tome XVIIe. Paris & Lyon, 1869—1870; gr. 8^0.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei: Atti. Anno II (1849). Roma, 1867; Anno XX, Sess. 1^a—9^a (1866—1867); Anno XXIV (1871), Sess. 2^a—3^a. Roma; 4^0.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Dritte Folge. XVII. Band. Jahrgang 1867. Wien, 1871; gr. 8⁰.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 9. Jahrgang, Nr. 30—31. Wien, 1871; 8⁰.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1864. (Bd. 78. 16.) Altona, 1871; 4⁰.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome XLII°, Nr. 165. Genève, Lausanne, Paris, 1871; 8⁰.

Comitato, R., Geologico d'Italia: Bollettino. Anno 1871, Nr. 5—8. Firenze; 8⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIII, Nr. 15. Paris 1871; 4⁰.

Gesellschaft, Astronomische: Vierteljahrsschrift VI. Jahrgang, 2. & 3. Heft. Leipzig, 1871; 8⁰.

— Anthropologische, in Wien: Mittheilungen. I. Band, Nr. 13. Wien, 1871; 8⁰.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VI. Band, Nr. 20. Wien, 1871; 4⁰.

— Physikalisch-medicin., in Würzburg: Verhandlungen. N. F. II. Band, 3. Heft. Würzburg, 1871; 8⁰.

— Naturforschende, in Zürich: Vierteljahrsschrift. XIV. Jahrgang, 1.—4. Heft. 1869; XV. Jahrgang, 1.—3. Heft. 1870. Zürich; 8⁰.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXII. Jahrg. Nr. 42 bis 44. Wien, 1871; 4⁰.

Grunert, Joh. Aug., Archiv der Mathematik & Physik. LIII. Theil, 1. & 2. Heft. Greifswald, 1871; 8⁰.

Institut National Genevois: Bulletin. Nr. 35. Vol. XVI, pages 225—384. Genève, 1870; 8⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, von C. Ohrtmann und Felix Müller. I. Band. Jahrgang 1868, 3. Heft. Berlin, 1871; 8⁰.

Jahrbücher der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. N. F. VI. Band, Jahrgang 1869. Wien, 1871; 4⁰.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. 1871. N. F. Band IV, 5. & 6. Heft. Leipzig; 8⁰.

Landbote, Der steirische. 4. Jahrgang, Nr. 22. Graz, 1871; 4⁰.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen & Mittheilungen. Jahrgang 1871, Nr. 20. Wien; 8⁰.

Lotos. XXI. Jahrgang, Juli—August 1871. Prag; 8⁰.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. Ergänzungsheft Nr. 29. Gotha, 1871; 4⁰.

Nature. Nrs. 103—104, Vol. IV. London, 1871; 4⁰.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Vol. V, Nr. 1. Torino, 1871; 4⁰.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1871, Nr. 13. Wien; 4⁰.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXII. Band, Jahrg. 1871, September-Heft. Wien; 8⁰.

„Revue politique et littéraire" et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger." Ire Année. (2e Serie) Nrs. 16—18. Paris & Bruxelles, 1871; 4⁰.

Societas Entomologica Rossica. Horae. T. VIII, Nr. 2. Petropoli, 1871; 8⁰. — Iroudy. T. VI, Nr. 2. St. Petersburg, 1871; 8⁰.

Société Imp. des Sciences naturelles de Cherbourg: Mémoires. Tome XIV (2e Série. Tome IV). Paris & Cherbourg, 1869; 8⁰.

— des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux: Mémoires. Tome V, pag. 279 — fin. 1867; Tome VII, 1869. — Tome VIII. Extrait des procès-verbaux. pag. I—XXXII. Bordeaux; 8⁰.

— Médico-chirurgicale des hôpitaux et hospices de Bordeaux: Mémoires et Bulletins. Tome V. 1870. Paris & Bordeaux; 8⁰.

— Linnéenne de Lyon: Annales. Année 1869. N. S. Tome XVIIe. Paris; gr. 8⁰.

— Botanique de France: Bulletin. Tome XVIIe. 1870. Revue bibliographique C. Paris; 8⁰.

— des Ingénieurs civils: Mémoires et Compte rendu des travaux. 3e Série. 22e Année, 1er, 2e et 4e Cahiers. Paris, 1868 & 1869; 8⁰.

Société géologique de France: Bulletin. 2e Série. Tome XXVIe, feuilles 66—75. Paris, 1869; 8⁰.

— Imp. géographique de Russie: Séances générales. Février 1870 — Mai 1871. 4⁰.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXI. Jahrgang, Nr. 42—43. Wien, 1871; 4⁰.

Zeitschrift für Chemie von Beilstein, Fittig & Hübner. XIV. Jahrgang. N. F. VII. Bd., 10. Heft. Leipzig, 1871; 8⁰.

Zur dynamischen Theorie der Gase.

Von dem w. M. **Viktor v. Lang.**

Es liegt der Gedanke nahe zu versuchen, die Gleichungen, welche Clausius für die Wärmeleitung, Maxwell und Meyer für die innere Reibung der Gase erhielten, auf demselben einfachen Weg abzuleiten, auf welchem Krönig die Expansivkraft der Gase aus der fortschreitenden Bewegung ihrer Moleküle erklärte, so den Grund zur neueren Gastheorie legend. Krönig lässt nämlich die sich in Wirklichkeit nach allen möglichen Richtungen bewegenden Moleküle nur nach drei zu einander senkrechten Axen fortschreiten.

Das angegebene Problem lässt sich nun wirklich ausführen, wenn man noch folgende Betrachtung zu Hilfe nimmt. Statt nämlich in der ganzen Ausdehnung des Gases diejenigen Moleküle aufzusuchen, die einen bestimmten Querschnitt erreichen, kann man gleich von vorne herein allen Molekülen die gleiche mittlere Weglänge l ertheilen. Dann braucht man die Moleküle, deren Entfernung von jenem Querschnitt grösser als l ist, nicht weiter zu betrachten, da sie den Querschnitt ohnedem nicht erreichen. Dagegen werden alle Moleküle, die innerhalb der Entfernung l liegen, den Querschnitt treffen.

Bevor ich nun die Formeln für die Wärmeleitung und die innere Reibung ableite, will ich noch den Druck auf die Gefässwände in Hinsicht auf die zuletzt gemachte Bemerkung in Betracht ziehen.

Druck auf die Gefässwand.

Wir nehmen den betrachteten Theil der Gefässwand zur xy-Ebene und lassen die Moleküle sich nach den drei rechtwinkligen Coordinatenaxen bewegen. Bedeutet n die Anzahl der

Moleküle in der Volumseinheit, θ die Zeit, die zwischen zwei Zusammenstössen eines Moleküls verfliesst, so wird eine zur xy-Ebene parallele Gasschicht in der Entfernung z und von der Dicke dz auf die Volumseinheit ndz Moleküle enthalten. Von diesen wird nur der dritte Theil gegen die Flächeneinheit der xy-Ebene stossen, und da jedes Molekül in der Zeiteinheit $\frac{1}{\theta}$ mal zusammenstösst, so haben wir im Ganzen den Effect von $\frac{n}{3\theta}\,dz$ Molekülen auf die xy-Ebene in Betracht zu ziehen. Da nun jedes Molekül der Wand die Bewegungsquantität mc mittheilt, wo m die Masse des Moleküls, c aber die Geschwindigkeit seiner fortschreitenden Bewegung bedeutet, so ist der Druck, welcher von der Schichte dz auf die Gefässwand ausgeübt wird,

$$\frac{nmc}{3\theta}\,dz = \frac{nmc^2}{3l}\,dz,$$

da ja die mittlere Weglänge $l = c\theta$ sein muss. Um nun den ganzen Druck p auf die Gefässwand zu finden, braucht man den letzten Ausdruck nur von 0 bis l zu integriren und erhält so die bekannte Formel

$$p = \int_0^l \frac{nmc^2}{3l}\,dz = \frac{nmc^2}{3}. \tag{1}$$

Bedeutet N die in dem Volumen v enthaltene Anzahl von Molekülen und setzt man die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung

$$\frac{mc^2}{2} = qT \tag{2}$$

d. i. proportional der absoluten Temperatur, so gibt die letzte Gleichung

$$\frac{pv}{T} = \frac{2}{3}\,Nq \tag{3}$$

oder das vereinigte Mariotte, Gay-Lussac'sche Gesetz.

Innere Reibung.

Wir berechnen die Reibung wieder mit Bezug auf die Flächeneinheit der xy-Ebene, indem wir annehmen, dass das Gas sich parallel der x-Axe bewege, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die in der xy-Ebene gleich u, in der kleinen Entfernung z von dieser Ebene aber gleich $u + \frac{du}{dz} z$ ist. Die Schichte dz in dieser Entfernung enthält per Flächen- und Zeiteinheit $\frac{n}{3\theta} dz$ Moleküle, welche in Folge der Bewegung nach der x-Axe die Bewegungsquantität

$$\frac{nm}{3\theta}\left[u + \frac{du}{dz} z\right] dz$$

besitzen. Ist nun $z < l$, so gehen diese Moleküle alle durch die xy-Ebene, bis sie in eine Entfernung $z - l$ gelangen, in welcher sie nach dem Vorhergehenden die Bewegungsquantität

$$\frac{nm}{3\theta}\left[u + \frac{du}{dz}(z - l)\right] dz$$

besitzen. Dieselben haben also die Differenz dieser Quantitäten oder

$$\frac{nm}{3\theta} l \frac{du}{dz} dz$$

beim Durchgange verloren. Integrirt man den letzten Ausdruck von 0 bis l, so erhält man den Gesammtverlust für die Flächeneinheit der xy-Ebene oder die Reibung R an dieser Stelle. Da bei der Integration $\frac{du}{dz}$ als constant betrachtet werden kann, so gibt dieselbe

$$R = \int_0^l \frac{nm}{3\theta} l \frac{du}{dz} dz = \frac{1}{3} \frac{nm}{\theta} l^2 \frac{du}{dz} \tag{4}$$

und für den Reibungscoëfficienten die Maxwell'sche Formel

$$\eta = \frac{nm}{3\theta} l^2. \tag{5}$$

Wärmeleitung.

Ändert sich die absolute Temperatur senkrecht zur xy-Ebene, so dass sie in dieser Ebene gleich T, in der Entfernung z aber gleich T_z ist, so ändern sich die Grössen n, c, l, θ ebenfalls und man hat nach den Gleichungen (2) und (3)

$$n_z = \frac{T}{T_z} n, \quad c_z = \sqrt{\frac{T_z}{T}} c,$$

ferner hat man, da nach Clausius

$$l = \frac{3}{4} \frac{1}{\pi s^2 n} \tag{6}$$

ist, unter s der Radius der Wirkungssphäre eines Moleküls verstanden,

$$l_z = \frac{n}{n_z} l = \frac{T_z}{T} l$$

$$\theta_z = \frac{l_z}{c_z} = \sqrt{\frac{T_z}{T}} \cdot \frac{l}{c}.$$

Ist die Entfernung z klein, so kann man

$$T_z = T + \frac{dT}{dz} z$$

setzen und hat somit für die lebendige Kraft derjenigen Moleküle der Schichte dz, welche sich senkrecht zur xy-Ebene bewegen, per Flächen- und Zeiteinheit

$$\frac{mn_z c_z^2}{6\theta_z} dz = \frac{mnc^3}{6l} \sqrt{\frac{T}{T_z}} dz = \frac{mnc^3}{6l} \left[1 + \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} z\right]^{-\frac{1}{2}} dz$$

und bei Vernachlässigung zweiter und höherer Potenzen der kleinen Grösse $\frac{1}{T} \frac{dT}{dz} z$

$$\frac{mnc^3}{6l} \left[1 - \frac{1}{2T} \frac{dT}{dz} z\right] dz.$$

Ist $z < l$, so gehen diese Theilchen alle durch die xy-Ebene bis zur Entfernung $(z-l)$ und haben an dieser Stelle die lebendige Kraft

$$\frac{mnc^3}{6l}\left[1-\frac{1}{2T}\frac{dT}{dz}(z-l)\right]dz$$

haben somit bei ihrem Durchgange die lebendige Kraft

$$-\frac{mnc^3}{12}\frac{1}{T}\frac{dT}{dz}dz$$

verloren. Integrirt man noch von 0 bis l, wobei $\frac{dT}{dz}$ als constant betrachtet werden kann, so erhält man für die ganze der xy-Ebene mitgetheilte lebendige Kraft

$$-\frac{mnc^3}{12}\frac{l}{T}\frac{dT}{dz},$$

welche durch Multiplication mit einem constanten Factor k die Wärmemenge Q gibt, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit fliesst. Es ist also

$$Q=-k\frac{mnc^3}{12}\frac{l}{T}\frac{dT}{dz}. \tag{7}$$

Will man noch die von T abhängigen Grössen n, c, l auf die Normaltemperatur T_0 reduciren, so hat man

$$n=\frac{T_0}{T}n_0,\quad c=\sqrt{\frac{T}{T_0}}c_0,\quad l=\frac{T}{T_0}l_0$$

und daher

$$Q=-k\frac{mn_0c_0{}^3}{12T_0}\sqrt{\frac{T}{T_0}}\frac{dT}{dz}l_0, \tag{8}$$

welche Formel mit der von Clausius bis auf den Factor $\frac{1}{12}$ stimmt, für welchen derselbe $\frac{5}{24}$ findet.

Über die Identität von Constructionen in perspectivischer, schiefer und orthogonaler Projection.

Von Dr. **Rudolf Staudigl,**

a. ö. Professor am k. k. polytechn. Institute in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

Nicht selten stösst man bei der Auflösung von Aufgaben aus dem Gebiete der darstellenden Geometrie auf Fälle, in welchen ganz dieselbe Construction, dieselbe Zusammenstellung von Linien zum Ziele führt, man mag in perspectivischer, schiefer oder axonometrischer Projection arbeiten. Eine und dieselbe Figur kann als graphische Lösung der betreffenden Aufgabe für jede der genannten drei Projectionsarten betrachtet werden. Die Möglichkeit dieser Thatsache findet ihre Erklärung in folgendem, für die darstellende Geometrie gewiss sehr wichtigen Satze, den wir beweisen, und durch einige Beispiele erläutern wollen:

Alle Aufgaben der darstellenden Geometrie, bei denen weder ein Längen-, noch ein Winkelmass in Betracht kommt, also alle Aufgaben, welche der Geometrie der Lage angehören, können auf ganz gleiche Weise, durch ganz dieselben Liniencombinationen sowohl in perspectivischer, wie in schiefer, als auch in orthogonaler (axonometrischer) Projection gelöst werden [1].

---

[1] Eine Abhandlung des Herrn H. Anton, die sich im 54. Bande der Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wissensch. Jhrg. 1866 unter dem Titel: „Die Grenzebene" findet, sowie auch die im 58. Bande Jhrg. 1871 aufgenommene Abhandlung des Herrn Prof. R. Niemtschik: „Allgemeine Methoden zur Darstellung der Durchschnitte von Ebenen mit Kegel- und Cylinderflächen, von Geraden mit Kegelschnittslinien und von confocalen Kegelschnittslinien unter sich," enthalten Erklärungen von Constructionen, welche als An-

Zu diesen Aufgaben gehören unter anderen folgende, wenn bei denselben keine bestimmten Abmessungen oder Dimensionsverhältnisse vorausgesetzt werden.

Bestimmung des Durchschnittes einer Geraden mit einer Ebene.

Schnitt zweier Ebenen.

Durchdringung von körperlichen Gebilden, welche von Ebenen begrenzt sind.

Schnitt einer Geraden oder Ebene mit einer Kegel- oder Cylinderfläche, abwickelbaren oder windschiefen Fläche.

Construction von Tangenten und tangirenden Ebenen.

Selbst- und Schlagschattenbestimmungen bei centralen oder parallelen Lichtstrahlen.

Schnitt zweier Kegelflächen, zweier Flächen zweiter Ordnung, überhaupt irgend zweier Flächen, u. s. w.

Um den Beweis für unseren Satz herzustellen, nehmen wir an, E (Fig. 1—3) sei die Projectionsebene, in der wir uns irgend eine der bezeichneten Aufgaben bereits ausgeführt denken. Die auf E gezeichnete Figur sei für das Projectionscentrum O construirt, welches auch in irgend einer Richtung unendlich ferne liegend gedacht werden kann. Letztere Figur fassen wir im Sinne der neueren Geometrie als ein ebenes System S auf und betrachten also — unseren Annahmen gemäss — S als eine centrale, schiefe, oder orthogonale Projection irgend eines räumlichen Systemes Σ auf E aus dem Projectionscentrum O. Σ wird in Fig. 1—3 durch das Dreieck ABC, und S durch die Projection abc von ABC repräsentirt.

Das Centrum O und das ebene System S kann man als Bestandtheile des räumlichen Systemes Σ ansehen.

Es lässt sich nun ein zweites räumliches System Σ_1 construiren, welches gegen Σ perspectivisch liegt, und zwar derart, dass E zur Collineationsebene wird. Dabei ist es gestattet, zu irgend zwei Punkten von Σ die zwei entsprechenden von Σ_1 beliebig anzunehmen, wie aus dem bekannten Lehrsatze folgt,

---

wendungen des obigen Satzes auf specielle Fälle zu betrachten sind. Das diesen Constructionen zu Grunde liegende allgemeine Princip scheint bisher nicht erkannt worden zu sein.

dass, wenn man zwei räumliche Systeme collinear auf einander beziehen will, fünf beliebige Punkte des einen Systemes, von denen keine vier derselben Ebene angehören, irgend solchen fünf Punkten des anderen Systemes als entsprechend zugewiesen werden können. Drei Paare sich selbst entsprechender Punkte liegen in E und weitere zwei Paare sind noch beliebig zu wählen. Wir nehmen nun an, den Punkten O und A in Σ sollen beziehungsweise O_1 und A_1 in Σ_1 entsprechen.

Diesen Annahmen zufolge entspricht dem das System Σ projicirenden Strahlenbündel mit dem Mittelpunkte O der das System Σ_1 projicirende Bündel mit dem Mittelpunkte O_1. Letztere zwei Bündel liegen perspectivisch; ihr perspectivischer Durchschnitt ist das ebene System S, daher fällt die Projection von Σ aus O auf die Ebene E mit jener von Σ_1 aus O_1 auf dieselbe Ebene zusammen.

Da sowohl O_1 als auch A_1 beliebig gewählt werden konnten, so gibt es für jeden beliebigen Punkt O_1 des Raumes unendlich viele mit Σ collineare räumliche Systeme Σ_1, welche aus O_1 auf E projicirt dieselbe Projection S liefern wie Σ für das Projectionscentrum O.

Aus dem Umstande, dass es gestattet ist O_1 in endlicher oder unendlicher Entfernung beliebig anzunehmen, schliessen wir, dass jede ebene centrale oder Parallel-Projection irgend eines räumlichen Systemes Σ sowohl als eine centrale, als auch eine schiefe oder orthogonale Projection eines mit Σ collinearen räumlichen Systemes für irgend ein beliebiges Projectionscentrum betrachtet werden kann.

Die in der Zeichenfläche E ausgeführte Construction gilt demnach ebensowohl für Σ wie für Σ_1 und diese Construction kann als eine perspectivische, schiefe, oder orthogonale Darstellung gelten.

Hiermit ist obiger Satz bewiesen.

Die Beschränkung, dass die eben nachgewiesenen Beziehungen nur für Aufgaben aus dem Gebiete der Geometrie der Lage bestehen, findet ihre Rechtfertigung in der Allgemeinheit der collinearen Verwandtschaft von Σ und Σ_1. Handelt es sich bei irgend einer Construction um bestimmte Längen- oder Winkelmasse,

so gibt es im allgemeinen nicht für jedes beliebige Projectionscentrum O_1 ein System Σ_1, welchem diese Construction entspricht, weil ja bei collinear verwandten Gebilden entsprechende Strecken oder Winkel im allgemeinen nicht gleich gross sind.

Nebenbei sei noch bemerkt, dass das Collineationscentrum M von Σ und Σ_1 stets in der Verbindungslinie von O und O_1 liegen muss, da letztere zwei Punkte sich entsprechen. Befindet sich O in unendlicher Entfernung, ist also S eine Parallelprojection von Σ, so gehört M einer Geraden an, welche durch O_1 geht und parallel zu den Projectionsstrahlen ist. (Fig. 2.)

Liegt sowohl O als auch O_1 in unendlicher Entfernung, so rückt M ebenfalls in unendliche Ferne. Σ und Σ_1 sind dann affin. (Fig. 3.)

Es erübrigt nun noch, den in Rede stehenden Satz durch einige Beispiele zu erläutern.

P sei die axonometrische Projection eines Punktes, P' jene seines Grundrisses, a die axonometrische Projection einer Geraden und a' jene ihres Grundrisses. Es soll der Schnittpunkt S einer zweiten, durch analoge Angaben bestimmten Geraden bb' mit der Ebene von PP', aa' ermittelt werden.

Man zieht durch P eine Parallele c zu b, durch P' eine Parallele c' zu b' und bestimmt auf bekannte Weise, etwa mit Hilfe einer projicirenden Ebene, den Durchschnitt von bb' mit der Ebene der zwei Geraden aa', cc'. — Derselbe Punkt S ergibt sich, wenn man die Angaben als perspectivische oder schiefe Projectionen auffasst. Dieselbe Liniencombination führt also auch bei diesen zwei Projectionsarten zu demselben Ziele.

Hieraus allein kann schon geschlossen werden, dass z. B. die Construction des Bildes der Durchdringung von zwei Pyramiden, oder einer Pyramide und eines Prismas, oder überhaupt von irgend zwei durch Ebenen begrenzten Körpern auf ganz gleiche Weise durchführbar ist, man mag die Bilder dieser räumlichen Objecte als centrale oder Parallel-Projectionen betrachten. Die Projection des Durchdringungs-Polygones ist für jeden Fall eine und dieselbe. — Analoges gilt bezüglich der Darstellung ebener Schnitte von Kegel- oder Cylinderflächen, von abwickelbaren oder windschiefen Flächen. Die Projection der Schnittcurve ist eine und dieselbe für jede der drei Projectionsarten; daher gilt

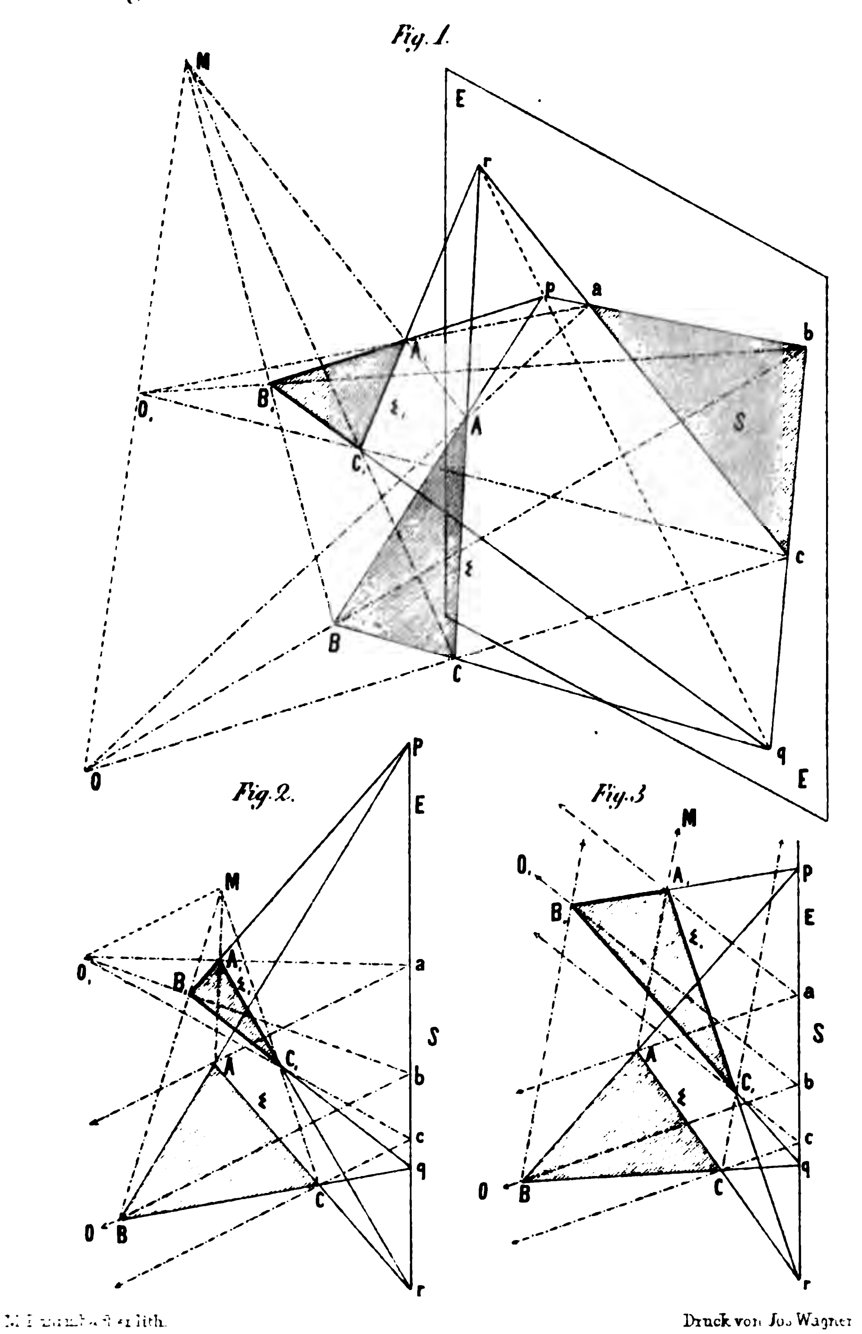
jede Methode, welche die Projection eines solchen Schnittes liefert, ebensowohl für centrale, wie für Parallel-Projection und kann als eine „allgemeine" bezeichnet werden. Ist man demnach im Stande, z. B. conjugirte Durchmesser der orthogonalen Projection eines ebenen Schnittes einer Kegelfläche zweiter Ordnung direct zu bestimmen, so versteht man es auch, diese Aufgabe bei perspectivischer Darstellung zu lösen.

Bekanntlich ist eine Fläche zweiter Ordnung durch zwei Kegelschnitte, welche sich in zwei Punkten schneiden, und durch einen ausserhalb den Ebenen dieser Curven liegenden Punkt vollkommen bestimmt. Sind nun z. B. die centralen Bilder K, K_1 von zwei solchen Kegelschnitten und die centralen Bilder K', K_1' ihrer Grundrisse, ferner das centrale Bild P eines Punktes und jenes P' seines Grundrisses gegeben, so könnten die Projectionen der Schnittpunkte irgend einer Geraden aa' mit der durch die zwei Kegelschnitte und den Punkt bestimmten Fläche zweiter Ordnung genau ebenso wie in schiefer oder axonometrischer Projection ermittelt werden. Man legt nämlich durch PP' und die Gerade aa' eine Ebene, sucht die Schnittpunkte A, B, C, D der letzteren mit den beiden Kegelschnitten und construirt die durch A, B, C, D, P bestimmte Curve zweiter Ordnung. Diese Curve schneidet a in den verlangten Punkten.

Die Projection der Durchdringungscurve einer auf solche Weise bestimmten Fläche zweiter Ordnung mit irgend einer im Bilde gegebenen Kegelfläche ändert sich daher nicht, es mag centrale, schiefe oder orthogonale Projection vorausgesetzt werden.

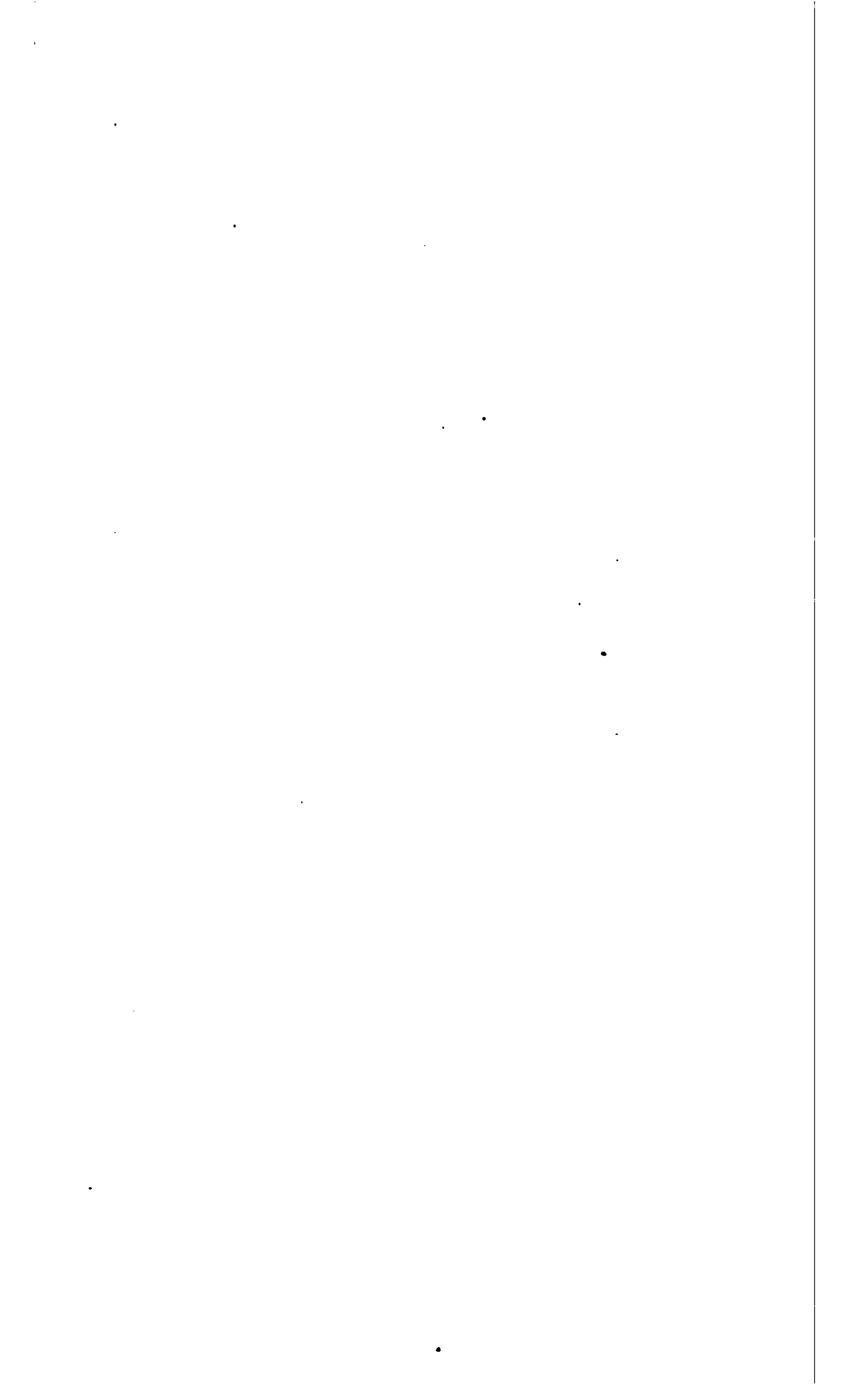
Dass auch z. B. das Bild der Selbstschattengrenze einer auf solche Weise gegebenen Fläche zweiter Ordnung für jede Projectionsart eine und dieselbe Curve zweiter Ordnung sein muss, bedarf wohl keiner weiteren Erklärung.

Schon aus diesen wenigen Beispielen dürfte die Wichtigkeit des nachgewiesenen Satzes klar werden.



M. Rumbacher lith.

Druck von Jos. Wagner



Ein Beitrag zur Theorie der Functionen complexer Variabelen[1].

Von **Hermann Frombeck** stud. phil.

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. October 1871.)

Die Theorie der Functionen complexer Variabelen gewinnt wesentlich an Klarheit und Vollständigkeit, wenn man ihre Untersuchungen auf Functionen beliebiger nicht gerade complexer Ausdrücke mit einer Mehrzahl von Veränderlichen überträgt. Es ist zu diesem Behufe nothwendig, die Bedingungen, unter welchen die Gleichung gilt

$$F\{f(x, y, z, \ldots)\} = f(\varphi, \psi, \chi, \ldots) \qquad 1)$$

zu ermitteln; die Annahme des Zeichens f auch rechter Hand wird hierbei zur eindeutigen, nur von der Charakteristik F abhängigen Bestimmung für die den Variabelen $x, y, z, \ldots$ correspondirenden Functionen $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ in dem einen Fall, wenn

$$f = a\varphi + b\psi + c\chi + \ldots$$

wo die Constanten $a, b, c \ldots$ derart gewählt sind, dass eine Gleichung $f = f_1$ nur durch die speciellen Voraussetzungen $\varphi = \varphi_1$, $\psi = \psi_1$, $\chi = \chi_1, \ldots$ befriedigt wird. Um jene Bedingungen zu erhalten, differenzirt man die Gleichung 1) in Bezug auf alle Argumente; aus dem totalen Differentiale

$$dF =$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} + \ldots\right) dx +$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} + \ldots\right) dy +$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} + \ldots\right) dz + \ldots$$

---

[1] Im Anschlusse an Schlömilch's Compendium der höheren Analyse., II. Bd. S. 44—68.

$$= Xdx + Ydy + Zdz + \ldots$$

und der Definition

$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz + \ldots$$

ergibt sich ein eindeutiger Differentialquotient, wie ihn die Gleichung 1), wo F von den Beziehungen der dx, dy, dz, ... unter sich unabhängig ist, voraussetzt, wenn sich in dem Ausdrucke

$$\frac{dF}{df} = \frac{Xdx + Ydy + Zdz + \ldots}{f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz + \ldots}$$

rechter Hand alle dx, dy, dz, ... eliminiren lassen. Es führt dies jetzt zu der Annahme

$$\frac{X}{f'_x} = \frac{Y}{f'_y} = \frac{Z}{f'_z} = \ldots = \frac{dF}{df}, \tag{2}$$

welche in der That die sämmtlichen Bedingungen enthält, mit denen das Bestehen der Gleichung 1) verknüpft ist.

Für das Folgende ist die Untersuchung des speciellen Falles von Interesse, gemäss welchem als Eigenschaften der Function f die Beziehungen gelten

$$p \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = q \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = r \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = \ldots \tag{3}$$

und zu dem Gleichungen 2) als zugehörige Bedingung die Formeln liefern

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} + \ldots\right) &= \\ q\left(\frac{1}{p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} + \ldots\right) &= \\ r\left(\frac{1}{p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} + \ldots\right) &= \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Man genügt diesen letzteren unter anderm, wenn man die genannten Eigenschaften der Function f auf die Zeichen φ, ψ, χ, ... überträgt und schreibt

$$p \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = q \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \ldots,$$

$$p \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = q \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = r \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} = \ldots,$$

$$p \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} = q \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} = r \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} = \ldots,$$

. . . . ;

Die bisherige Betrachtung führt nun unmittelbar von dem speciellen Integrale der Gleichungen 3)

$$f = \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} + \ldots$$

zu dem allgemeinen

$$\varphi, \psi, \chi, \ldots f = F\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} + \ldots\right),$$

oder auch

$$\varphi, \psi, \chi, \ldots f = F\left(\frac{\varphi_1}{p} + \frac{\psi_1}{q} + \frac{\chi_1}{r} + \ldots\right),$$

dies letztere mit einer den Bedingungen für $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ analogen Bedeutung der Functionen $\varphi_1, \psi_1, \chi_1, \ldots$.

Es ist jetzt leicht, ohne Rücksicht auf das allgemeinste Integral der Gleichungen 4) den im Anfange erwähnten eigenthümlichen Fall zu erledigen, wonach nunmehr die Zahlen $p, q, r, \ldots$ den dort für $a, b, c, \ldots$ aufgestellten Bedingungen entsprechen; der wechselseitigen Quotienten jedoch aus $p, q, r, \ldots$ halber ist es nothwendig, diese Multiplicatoren näher zu specialisiren. Beschränken wir uns im Folgenden auf die vier Substitutionen

$$\frac{1}{p} = 1, \; \frac{1}{q} = \sqrt{-1} = i, \; \frac{1}{r} = \sqrt[4]{-1} = i', \; \frac{1}{s} = ii',$$

welchen jene Eigenschaft zukommt (siehe Anhang 1.), so erhalten wir mit blosser Rücksicht auf die Worte $+\sqrt{\pm\sqrt{-1}}$ und $+\sqrt{-1}$ für die bezeichneten Quotienten die Ausdrücke

$$\frac{q}{p} = -i, \ \frac{r}{p} = \mp ii', \ \frac{s}{p} = \mp i',$$

$$\frac{r}{q} = \pm i', \ \frac{s}{q} = \mp ii', \ \frac{q}{r} = -ii',$$

$$\frac{s}{r} = -i, \ \frac{q}{s} = i', \quad \frac{r}{s} = i$$

und es spalten sich die Gleichungen 4) in die folgenden 12

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\chi}{\partial z} = \frac{\partial\vartheta}{\partial t}, \ \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\vartheta}{\partial z} = -\frac{\partial\chi}{\partial t},$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = \frac{\partial\vartheta}{\partial y} = \pm\frac{\partial\psi}{\partial z} = \mp\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \ \frac{\partial\vartheta}{\partial x} = -\frac{\partial\chi}{\partial y} = \mp\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \mp\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Die derart bestimmten Functionen φ, ψ, χ und ϑ besitzen, wie auf dem Wege der Elimination ersichtlich wird, die folgenden gemeinsamen Eigenschaften

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial t^4} = \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} = \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial t^4} = 0,$$

denen schliesslich dem früheren analog das unvollständige Integral

$$f = F(x + iy + i'z + ii't)$$

oder

$$f = F[\varphi(x+iy+i'z+iit) + i\psi(x+iy+i'z+ii't) +$$
$$+ i'\chi(x+iy+i'z+ii't) + ii'\vartheta(x+iy+i'z+ii't)]$$

mit den bekannten Ergänzungen

$$F_1(x-iy-i'z+ii't), \ F_2(x-iy+i'z-ii't), \ F_3(x+iy-i'z-ii't)$$

entspricht.

Zu dem Kapitel der Functionentheorie, welches von der Integration längs geschlossener Contoure handelt und zu den weiteren Ausführungen betreffs asynektischer und vieldeutiger Ausdrücke in x und y können jetzt einige sehr wesentliche Er-

gänzungen gemacht werden. Es bedarf hiezu einer Verallgemeinerung des Abschnitt IV, S. 52 a. a. O. aufgestellten Hilfssatzes über Doppelintegrale, welche, eines speciellen Beweises nicht bedürftig, sofort durch die folgende unmittelbar einleuchtende Formel vergegenwärtigt werden möge.

$$(n-1)\int(\Phi_1 dx' + \Phi_2 dx'' + \Phi_3 dx''' + \ldots + \Phi_n dx^{(n)}) = 5)$$

$$\iint\left[\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x''}dx'' + \frac{\partial\Phi_1}{\partial x'''}dx''' + \ldots + \frac{\partial\Phi_1}{\partial x^{(n)}}dx^{(n)}\right)dx'\right.$$

$$+\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x'''}dx''' + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x^{(4)}}dx^{(4)} + \ldots - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x'}dx'\right)dx''$$

$$+\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x^{(4)}}dx^{(4)} + \ldots - \frac{\partial\Phi_3}{\partial x'}dx' - \frac{\partial\Phi_3}{\partial x''}dx''\right)dx'''$$

$$+ \ldots$$

$$\left.+\left(-\frac{\partial\Phi_n}{\partial x'}dx' - \frac{\partial\Phi_n}{\partial x''}dx'' - \ldots - \frac{\partial\Phi_n}{\partial x^{(n-1)}}dx^{(n-1)}\right)dx^{(n)}\right].$$

Wenige Bemerkungen genügen zur Erklärung dieser Formel. Die Doppelintegrale rechter Hand nach dx', dann dx'', $dx''', \ldots$, endlich nach $dx^{(n)}$ sind wesentlich einander gleich, nur die Art ihrer Entstehung ist verschieden; es ist hiebei zu unterscheiden, ob $n-1$, $n-2, \ldots$ oder ob z. B. blos eine Gleichung zwischen den n Veränderlichen vorliegt. Im ersten Falle, wenn $n-1$ specielle Beziehungen gegeben sind

$$x' = \varphi_2(x'') = \varphi_3(x''') = \ldots = \varphi_n(x^{(n)}),$$

stellen die Integrale

$$\iint\frac{\partial\Phi_1}{\partial x''}dx''dx', \iint\frac{\partial\Phi_1}{\partial x'''}dx'''dx', \ldots \iint\frac{\partial\Phi_1}{\partial x^{(n)}}dx^{(n)}dx'$$

sämmtlich das gleiche Resultat der Integration längs eines (analytischen) Contours $n-1$ter Krümmung vor, mag derselbe gesetzmässig oder ungesetzmässig verlaufen (die Zeichen φ_2, $\varphi_3, \ldots$ φ_n vertreten die Function in ihrer grössten Allgemeinheit); um die einmalige Integration längs dieses geschlossenen Contours,

den jene $n-1$ Gleichungen definiren, oder den Ausdruck $\int \Phi_1 dx'$ zu erhalten, muss die Summe der Doppelintegrale durch $n-1$ dividirt werden. Das gleiche gilt nun auch von allen die Functionen Φ_2, $\Phi_3, \ldots \Phi_n$ betreffenden Integrationen; nur ist selbstverständlich eine Integrationenfolge $x^{(q)}$, $x^{(p)}$, da alles längs desselben Contours zu erfolgen hat, mit dem entgegengesetzten Zeichen der Folge $x^{(p)}$, $x^{(q)}$ zu versehen. Der zweite Fall, welcher wie alle folgenden durch den ersten direct erklärt wird, hat es nunmehr zu thun mit einem durch $n-2$ Gleichungen definirten Integrationsorte; den Relationen gemäss

$$x = \psi_3(x'', x''') = \psi_4(x'', x^{(4)}) = \ldots = \psi_n(x'', x^{(n)})$$

erfolgt die Summirung auf einer Fläche im allgemeinen $n-1$ter Krümmung, ohne dass in Bezug auf die Zeichenwahl eine Änderung einträte. Gleiches gilt für den dritten Fall

$$x' = \chi_4(x'', x''', x^{(4)}) = \chi_5(x'', x''', x^{(5)}) = \ldots = \chi_n(x'', x''', x^{(n)}),$$

für den vierten, fünften u. s. f., endlich für den letzten

$$x' = \nu_n(x'', x''', \ldots x^{(n)}),$$

bei welchen die specielle B e z e i c h n u n g des Integrationsortes in geometrischen Verhältnissen keine Analogie mehr findet.

Zufolge dieser Erläuterung ist es jetzt möglich, Sinn und Werth eines Integrales $\int F(f)\,df$ zu ermitteln, wenn f eine Function der n Veränderlichen $x', x'', \ldots x^{(n)}$ vorstellt, die der Gleichung 1) genügt, die Integration aber an irgend einen der vorerwähnten analytischen Orte gebunden ist, bei welchen als gemeinschaftliche wesentliche Merkmale erstens ein ununterbrochener Durchgang der Function F von einem Werthe F_0 durch alle Veränderlichen nach F_0 zurück, zweitens Continuität, Endlichkeit und Eindeutigkeit der Function selbst im Innern und an der Oberfläche des also durchwanderten Werthcomplexes stattfinden. Schreibt man nämlich

$$\int F(f)\,df =$$

$$\int F(f)\left\{\frac{\partial f}{\partial x'}dx' + \frac{\partial f}{\partial x''}dx'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}dx^{(n)}\right\},$$

so erhellt die Anwendbarkeit der Gleichung 5); man hat unter Berücksichtigung der Relation 1)

$$\int F(f)\,df =$$

$$\frac{1}{n-1}\int\!\!\int\Bigg[\Bigg(\frac{\partial F}{\partial x''}dx'' + \frac{\partial F}{\partial x'''}dx''' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}dx^{(n)}\Bigg)\frac{\partial f}{\partial x'}dx'$$

$$+\Bigg(\frac{\partial F}{\partial x'''}dx''' + \frac{\partial F}{\partial x^{(4)}}dx^{(4)} + \ldots - \frac{\partial F}{\partial x'}dx'\Bigg)\frac{\partial f}{\partial x''}dx''$$

$$+\Bigg(\frac{\partial F}{\partial x^{(4)}}dx^{(4)} + \ldots - \frac{\partial F}{\partial x'}dx' - \frac{\partial F}{\partial x''}dx''\Bigg)\frac{\partial f}{\partial x'''}dx''' + \ldots$$

$$+\Bigg(-\frac{\partial F}{\partial x'}dx' - \frac{\partial F}{\partial x''}dx'' - \ldots - \frac{\partial F}{\partial x^{(n-1)}}dx^{(n-1)}\Bigg)\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}dx^{(n)}$$

$$+ F(f)\Bigg\{\Bigg(\frac{\partial^2 f}{\partial x'\partial x''}dx'' + \frac{\partial^2 f}{\partial x'\partial x'''}dx''' + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x'\partial x^{(n)}}dx^{(n)}\Bigg)dx'$$

$$+\Bigg(\frac{\partial^2 f}{\partial x''\partial x'''}dx''' + \frac{\partial^2 f}{\partial x''\partial x^{(4)}}dx^{(4)} + \ldots - \frac{\partial^2 f}{\partial x''\partial x'}dx'\Bigg)dx''$$

$$+ \ldots$$

$$+\Bigg(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^{(n)}\partial x'}dx' - \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(n)}\partial x''}dx'' - \ldots - \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(n)}\partial x^{(n-1)}}dx^{(n-1)}\Bigg)dx^{(n)}\Bigg\}\Bigg].$$

Die Doppelintegrale rechter Hand verschwinden sämmtlich, jene, welche die Differentialquotienten der Function F enthalten, gemäss den Gleichungen 2), die übrigen nach dem Satze, welcher die Umkehrung der Differentiationenfolge erlaubt; es bleibt mithin als Resultat

$$\int F(f)\,df = 0.$$

Mit der erweiterten Bedeutung dieser letzteren Formel erlangen die Consequenzen derselben gleichfalls einen allgemeineren, mannigfaltige Fälle umfassenden Sinn. Die wichtigste Anwendung vor allem, wonach hinsichtlich eines Integrationsortes $A_0P_0A_1P_1A_0$

$$I[A_0P_0A_1] = I[A_0P_1A_1]$$

gilt jetzt nicht blos für Theile einer geschlossenen Curve oder irgend welchen beliebigen Contours (verschiedener Ordnung, vorerwähnter erster Fall), sondern auch für zusammenschliessende Theile jedes andern geschlossenen Werthsystems, welche durch Werthgruppen der nächst niederen Ordnung von einander geschieden sind. Hievon ist z. B. bereits eine einfache Folge die Möglichkeit, unter den angegebenen Bedingungen die Reihenfolge der Integrationen in Doppel- und mehrfachen bestimmten Integralen beliebig zu ordnen.

1. Die folgenden Anwendungen beschränken sich auf den mehrerwähnten ersten Fall (Definirung eines Integrationsortes durch $n-1$ Gleichungen zwischen n Variabelen); dem Integrationsorte selbst möge dabei die doppelte (reelle und imaginäre) Dimension des Zahlengebietes zu Grunde gelegt werden, indem die Summirung an Parallelogramme, beziehungsweise Rechtecke mit den Winkeln 45° und 90° und mit den Seiten a, bi', bez. a, bi gebunden gedacht wird. Der Annahme eines Rechteckes entspricht die bekannte Gleichung

$$\int_0^a f(x)dx + i\int_0^b f(a+iy)dy = i\int_0^b f(iy)dy + \int_0^a f(ib+x)dx$$
$$= \frac{a+ib}{a}\int_0^a f\left(\frac{a+ib}{a}x\right)dx,$$

welche wir dahin modificiren, dass wir $i_1' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ und $i_2' = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ an die Stelle von i treten lassen, wodurch jenes Rechteck in ein Rhomboid mit dem Winkelmasse $\frac{\pi}{4}$ übergeht. Da dieser Fall einiges Interesse gewährt, so möge also hier in Kurzem zunächst blos die congruirende Formel

$$\int_0^a f(x)dx + i'\int_0^b f(a+i'y)dy = i'\int_0^b f(i'y)dy + \int_0^a f(x+i'b)dx$$
$$= \frac{a+i'b}{a}\int_0^a f\left(\frac{a+i'b}{a}x\right)dx \qquad 6)$$

mit Berücksichtigung des Werthes i_1' discutirt werden. Wir beschränken uns dabei auf den Fall parer und imparer Functionen und erhalten für beide Functionsarten gleichmässig aus der letzten Gleichung, in der wir $-x$ an die Stelle von x, dem entsprechend $-a$ an die Stelle von a treten lassen, die neue Gleichung

$$\int_0^a f(x)dx - i'\int_0^b f(x-i'y)dy = -i'\int_0^b f(-i'y)dy + \int_0^{-a} f(x-i'b)dx$$

$$= \frac{a-i'b}{a}\int_0^a f\left(\frac{a-i'b}{a}\,x\right)dx. \qquad 7)$$

Obwohl dieselbe gerade so wie 6) allgemein für beliebige Functionsarten unter den Bedingungen der Gleichung 6) giltig bleibt, so bildet sie eine werthvolle Ergänzung zu 6) allein bei der Beschränkung auf die Fälle gerader oder ungerader Functionen, wie sogleich hervorgeht, wenn die verschiedenen Functionen f unter den Integralzeichen nach dx und dy in complexe Summen reeller Ausdrücke in x und y nach dem allgemeinen Schema

$$F(x+iy+i'z+ii't) = \Phi(x, y, z, t) + i\Phi_1 + i'\Phi_2 + ii'\Phi_3$$

verwandelt werden. Hiefür liefert nun Nr. 2 des Anhangs die nöthigen Formeln, wonach, den Fall $i' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ vorausgesetzt, Gleichung 6) die folgende complicirte Gestalt annimmt

$$2\int_0^a \varphi(x,o)dx + i'\int_0^b\left[\left\{\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right) + \varphi_1\left(a-\frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right\}\right.$$

$$+ i\left\{\psi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right) + \psi_1\left(a-\frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right\} \qquad 8)$$

$$\left. + \frac{i'}{\sqrt{2}}\left\{\varphi-\varphi_1+\psi-\psi_1\right\} + \frac{ii'}{\sqrt{2}}\left\{-\varphi+\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}\right] dy =$$

$$i'\int_0^b\left[\left\{\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1\right\}+i\left\{\psi\left(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\psi_1\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{i'}{\sqrt{2}}\left\{\varphi-\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}+\frac{ii'}{\sqrt{2}}\left\{-\varphi+\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}\right]dy$$

$$+\int_0^a\left[\left\{\varphi\left(x+\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1\right\}+i\left\{\psi\left(x+\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)+\psi_1\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{i'}{\sqrt{2}}\left\{\varphi-\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}+\frac{ii'}{\sqrt{2}}\left\{-\varphi+\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}\right]dx$$

$$=\frac{a+i'b}{a}\int_0^a\left[\left\{\varphi\left(x+\frac{b}{a\sqrt{2}}x,\frac{b}{a\sqrt{2}}x\right)+\varphi_1\right\}+i\left\{\psi+\psi_1\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{i'}{\sqrt{2}}\left\{\varphi-\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}+\frac{ii'}{\sqrt{2}}\left\{-\varphi+\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}\right]dy\,.$$

Behält man die Bedeutung der Zeichen dieser ersten Formel bei — ein beigefügter Index 1 an die Zeichen φ und ψ in

$$f(u+iv)=\varphi(u,v)+i\psi(u,v)$$

zeigt an, dass in den für u und v eintretenden Argumenten statt $+\frac{y}{\sqrt{2}}$ und $+\frac{b}{\sqrt{2}}$ bezüglich die negativen Werthe zu setzen sind, während jene Argumente immer so eingeschaltet werden, wie es unmittelbar hinter dem zugehörigen Integralzeichen angegeben ist — so lautet die wesentliche Ergänzung, Gleichung 7) in analoger Form

$$2\int_0^a\varphi(x,o)dx-i'\int_0^b\left[\left\{\varphi\left(a-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right\}\right.$$

$$+i\left\{\psi\left(a-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\psi_1\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right\} \qquad 9)$$

$$\left.+\frac{i'}{\sqrt{2}}\left\{\varphi-\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}+\frac{ii'}{\sqrt{2}}\left\{-\varphi+\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}\right]dy=$$

$$-i'\int_0^b\left[\left\{\varphi\left(-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1\right\}+i\left\{\psi\left(-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\psi_1\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{i''}{\sqrt{2}}\left\{\varphi-\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}+\frac{ii''}{\sqrt{2}}\left\{-\varphi+\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}\right]dy$$

$$+\int_0^a\left[\left\{\varphi\left(x-\frac{b}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1\right\}+i\left\{\psi\left(x-\frac{b}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)+\psi_1\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{i'}{\sqrt{2}}\left\{\varphi-\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}+\frac{ii'}{\sqrt{2}}\left\{-\varphi+\varphi_1+\psi-\psi_1\right\}\right]dy$$

$$=\frac{a-i'b}{a}\int_0^a\left[\left\{\varphi\left(x-\frac{b}{a\sqrt{2}}x,-\frac{b}{a\sqrt{2}}x\right)+\varphi_1\right\}+i\left\{\psi+\psi_1\right\}+\ldots\right]dx,$$

im allgemeinen

$$A=B=o.$$

In 8) lassen sich die Grössen A und B zu dem complexen Ausdrucke $p+iq+i'r+ii's=o$, hier in 9) zu dem Ausdrucke $p+iq-i'r-ii's=o$ transformiren, wo p, q, r und s reell sind; abstrahirt man dabei vorläufig von der speciellen Bedeutung dieser Factoren, so enthalten die zugehörigen Gleichungen lediglich eine der Bedingungen, unter welchen es erlaubt ist

$$p=q=r=s=o$$

anzunehmen — die Einführung von $i_2''=-ii_1''$ in die Rechnung (siehe Anhang 1. und 2.) ergibt

$$p-iq+i_2''r-ii_2''s=p-iq-i_2''r+ii_2''s=o$$

mit der nämlichen Wirkung. Das zweite Integral nach y in den Formeln 8) und 9) beeinträchtigt unter den gemachten Voraussetzungen die Giltigkeit dieses Schlusses nicht, wie es auf den ersten Blick hin scheinen könnte, indem sich im Falle parer Functionen die mit i' und ii' multiplicirten Glieder, im Falle imparer Functionen die mit 1 und $\sqrt{-1}$ multiplicirten Glieder desselben tilgen; zugleich liegt hierin die Nothwendigkeit der

Unterscheidung zwischen beiden Functionsarten, wenn man daran geht, in dem Resultate $p=q=r=s=o$ für die Nullwerthe ihre ursprüngliche Bedeutung zu restituiren. Es leitet jetzt dies auf die gewünschten Relationen, über deren Schreibweise die früheren Bestimmungen gelten mögen.

Erster Theil der Doppelgleichungen in 8) und 9); Fall $A=o$.

α) Gerade Functionen.

$$1)\ \int_0^a\left[\varphi\left(x+\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1\left(x-\frac{c}{\sqrt{2}},-\frac{c}{\sqrt{2}}\right)-2\varphi(x,o)\right]dx= \qquad 10)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^c\left[-\varphi\left(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1+\psi\left(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)-\psi_1\right]dz,$$

$$2)\ \int_0^a\left[\psi\left(x+\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\right)+\psi_1\left(x-\frac{c}{\sqrt{2}},-\frac{c}{\sqrt{2}}\right)\right]dx=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^c\left[\varphi\left(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)-\varphi_1+\psi-\psi_1\right]dz,$$

$$3)\ \int_0^c\left[\varphi\left(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1-2\varphi\left(\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]dz=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a\left[\varphi\left(x+\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\right)-\varphi_1+\psi-\psi_1\right]dx,$$

$$4)\ \int_0^c\left[\psi\left(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+\psi_1-2\psi\left(\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]dz=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a\left[-\varphi\left(x+\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1+\psi-\psi_1\right]dx.$$

β) Ungerade Functionen.

$$1)\ \int_0^a\left[\varphi\left(x+\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1\left(x-\frac{c}{\sqrt{2}},-\frac{c}{\sqrt{2}}\right)-2\varphi(x,o)\right]dx=$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^c\Big[-\varphi\Big(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)+\varphi_1+\psi-\psi_1+2\varphi\Big(\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)$$
$$-2\psi\Big(\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\Big]dz\,,$$

2) $$\int_0^a\Big[\psi\Big(x+\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\Big)+\psi_1\Big(x-\frac{c}{\sqrt{2}},-\frac{c}{\sqrt{2}}\Big)\Big]dx=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^c\Big[\varphi\Big(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)-\varphi_1+\psi-\psi_1-2\varphi\Big(\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)$$
$$-2\psi\Big(\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\Big]dz\,,$$

3) $$\int_0^c\Big[\varphi\Big(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)+\varphi_1\Big(a-\frac{z}{\sqrt{2}},-\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\Big]dz=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a\Big[\varphi\Big(x+\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\Big)-\varphi_1+\psi-\psi_1\Big]dx\,,$$

4) $$\int_0^c\Big[\psi\Big(a+\frac{z}{\sqrt{2}},\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)+\psi_1\Big(a-\frac{z}{\sqrt{2}},-\frac{z}{\sqrt{2}}\Big)\Big]dz=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a\Big[-\varphi\Big(x+\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\Big)+\varphi_1+\psi-\psi_1\Big]dx\,.$$

Zweiter Theil der Doppelgleichungen 8) und 9); Fall $B=o$, giltig für beliebige Functionen.

1) $$\int_0^a\Big[\Big(1+\frac{b}{a\sqrt{2}}\Big)\varphi\Big(x+x\frac{b}{a\sqrt{2}},\,x\frac{b}{a\sqrt{2}}\Big)$$
$$+\Big(1-\frac{b}{a\sqrt{2}}\Big)\varphi_1\Big(x-x\frac{b}{a\sqrt{2}},\,-\frac{b}{a\sqrt{2}}x\Big)-2\varphi(x,o)$$
$$+\frac{b}{a\sqrt{2}}\Big\{\psi\Big(x+x\frac{b}{a\sqrt{2}},\,\frac{b}{a\sqrt{2}}x\Big)-\psi_1\Big\}\Big]dx$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^b\left[-\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1+\psi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\psi_1\right\}\Bigg]dy.$$

2) $$\int_0^a\left[\left(1+\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)\psi\left(x+x\frac{b}{a\sqrt{2}},x\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)+\left(1-\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)\right.$$

$$\left.\psi_1\left(x-x\frac{b}{a\sqrt{2}},-x\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)+\frac{b}{a\sqrt{2}}\left\{\varphi\left(x+x\frac{b}{a\sqrt{2}},x\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)-\varphi_1\right\}\right]dx$$

$$=+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^b\left[\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\varphi_1+\psi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\psi_1\right]dy.$$

3) $$\int_0^a\left[\left(\frac{b}{a}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(x+x\frac{b}{a\sqrt{2}},x\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{b}{a}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right.$$

$$\left.\varphi_1\left(x-x\frac{b}{a\sqrt{2}},-x\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi-\psi_1)\right]dx=$$

$$\int_0^b\left[\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\varphi_1\left(a-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right]dy.$$

4) $$\int_0^a\left[\left(\frac{b}{a}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\psi\left(x+x\frac{b}{a\sqrt{2}},x\frac{b}{a\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{b}{a}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\psi_1\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{2}}(-\varphi+\varphi_1)\right]dx=$$

$$\int_0^b\left[\psi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\psi_1\left(a-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right]dy.$$

Eine sehr interessante Anwendung gestatten diese Formeln für den Fall $f(t)=e^{-t^2}$, $(a=\infty)$, woraus sich

$$\varphi(u,v)=e^{-u^2+v^2}\cos 2uv,\ \psi(u,v)=-e^{-u^2+v^2}\sin 2uv$$

ergibt; da die Rechnung nichts Besonderes darbietet, so genügt die Angabe der Resultate, man erhält aus den Formeln 10, 21 das folgende System

$$\int_0^\infty \left\{ e^{-x^2-\sqrt{2}cx} \cos(\sqrt{2}cx+c^2) + e^{-x^2+\sqrt{2}cx} \cos(\sqrt{2}cx-c^2) \right\} dx = \sqrt{\pi}, \qquad 11)$$

$$\int_0^\infty \left\{ e^{-x^2-\sqrt{2}cx} \cos(\sqrt{2}cx+c^2) - e^{-x^2+\sqrt{2}cx} \sin(\sqrt{2}cx-c^2) \right\} dx = 0$$

$$\int_0^\infty \left\{ e^{-x^2-\sqrt{2}cx} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}cx+c^2\right) - e^{-x^2+\sqrt{2}cx} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}cx+c^2\right) \right\} dx = 2\int_0^c \cos(z^2)\, dz,$$

$$\int_0^\infty \left\{ e^{-x^2-\sqrt{2}cx} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}cx+c^2\right) - e^{-x^2+\sqrt{2}cx} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}cx+c^2\right) \right\} dx = 2\int_0^c \sin(z^2)\, dz.$$

Einerseits führt dasselbe zu bekannten Integralformeln; dies erstere bei der Substitution $\sqrt{2}cx+c^2$ und $\sqrt{2}cx-c^2=z$, wodurch die beiden ersten Gleichungen in die folgenden übergehen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2} \cos z\, dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{1}{4a}}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2} \sin z\, dz = 0,$$

während durch Addition und Subtraction der übrigen

$$\int_0^c \cos(z^2) dz + \int_0^c \sin(z^2) dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - 2\frac{e^{\frac{c^2}{2}}}{c} \int_{c^2}^\infty e^{-\frac{z^2}{2c^2}} \cos z\, dz,$$

$$\int_0^c \cos(z^2) dz - \int_0^c \sin(z^2) dz = 2\frac{e^{\frac{c^2}{2}}}{c} \int_{c^2}^\infty e^{-\frac{z^2}{2c^2}} \sin z\, dz$$

und ($c=\infty$ gesetzt)

$$\int_0^\infty \cos(z^2)\,dz = \int_0^\infty \sin(z^2)\,dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

gewonnen wird. Andererseits erweist sich die Substitution der unendlichen Reihen für die Ausdrücke $e^{-\sqrt{2cx}}$, $\cos\sqrt{2cx}$ und $\sin\sqrt{2cx}$ in den Formeln 11) von bedeutendem Vortheil, indem ausser der inductiven Werthbestimmung des Integrales $\int_0^\infty e^{-x^2} x^p\,dx$, hieraus convergente Reihenentwicklungen für die Integrale $\int_0^c \cos(z^2)\,dz$ und $\int_0^c \sin(z^2)\,dz$ namentlich bei kleinen c entspringen. Den Relationen entsprechend

$$\int_0^c \cos(z^2)dz = \cos(c^2)\int_0^\infty e^{-x^2}\left\{\frac{2cx}{1} - \frac{(2cx)^5}{5!} + \frac{(2cx)^9}{9!} - \ldots\right\}dx$$

$$+\sin(c^2)\int_0^\infty e^{-x^2}\left\{\frac{(2cx)^3}{3!} - \frac{(2cx)^7}{7!} + \ldots\right\}dx,$$

$$\int_0^c \sin(z^2)dz = -\cos(c^2)\int_0^\infty e^{-x^2}\left\{\frac{(2cx)^3}{3!} - \frac{(2cx)^7}{7!} + \ldots\right\}dx$$

$$+\sin(c^2)\int_0^\infty e^{-x^2}\left\{\frac{2cx}{1} - \frac{(2cx)^5}{5!} + \frac{(2cx)^9}{9!} - \ldots\right\}dx$$

lauten diese Entwicklungen zunächst in Bezug auf die Werthe, welche sie paarweise annehmen

$$2\int_0^c \cos(z^2)\,dz = \cos(c^2)\left\{\frac{2c}{1} - \frac{(2c)^5}{3.4.5} + \frac{(2c)^9}{5.6.7.8.9} - \ldots\right\}$$

$$+\sin(c^2)\left\{\frac{(2c)^3}{2.3} - \frac{(2c)^7}{4.5.6.7} + \frac{(2c)^{11}}{6.7.8.9.10.11} - \ldots\right\},$$

$$2\int_0^c \sin(z^2)dz = -\cos(c^2)\left\{\frac{(2c)^3}{2.3}-\frac{(2c)^7}{4.5.6.7}+\frac{(2c)^{11}}{6.7.8.9.10.11}-\ldots\right\}$$

$$+\sin(c^2)\left\{\frac{2c}{1}-\frac{(2c)^5}{3.4.5}+\frac{(2c)^9}{5.6.7.8.9}-\ldots\right\},$$

sodann isolirt

$$2\int_0^b \cos(b^2-y^2)\,dy = \frac{2b}{1}-\frac{(2b)^5}{3.4.5}+\frac{(2b)^9}{5.6.7.8.9}-\ldots=$$

$$2\int_0^b \frac{y\cos(y^2)}{\sqrt{b^2-y^2}}\,dy;$$

$$2\int_0^b \sin(b^2-y^2)\,dy = \frac{(2b)^3}{2.3}-\frac{(2b)^7}{4.5.6.7}+\frac{(2b)^{11}}{6.7.8.9.10.11}-\ldots=$$

$$2\int_0^b \frac{y\sin(y^2)}{\sqrt{b^2-y^2}}\,dy.$$

2. Von der Function e^{-t^2} gehen wir zur allgemeinen Substitution in 6) über

$$f'(t) = tf(t);$$

die bezeichnete Formel lautet in diesem Falle

$$\int_0^a xf(x)dx + i'\int_0^b (a+i'y)f(a+i'y)\,dy = \qquad 12)$$

$$i'\int_0^b i'yf(i'y)\,dy + \int_0^a (x+i'b)f(x+i'b)\,dx$$

Bei Ansicht dieser letzteren drängt sich die Frage nach den Änderungen auf, die eine Einführung der Factoren $a-i'y$, $-i'y$ und $x-i'b$ anstatt $a+i'y$, $+i'y$, $x+i'b$ unter den drei letzten Integralzeichen mit sich führt. Der Fall ist, wie leicht zu ersehen, von den bisher betrachteten grundverschieden, da es sich hier nicht mehr um ein Integral $\int F(f)df$, sondern um Integrale von

der Form $\int F(f_1, f_2)\,df_1$ oder $\int F(f_1, f_2)\,df_2$ handelt, worin f_2, sowie f_1 Functionen derselben Veränderlichen, allerdings von geringer Verschiedenheit bedeuten. Die letzteren Integrale, auf einen geschlossenen Integrationsort bezogen, reduciren sich nicht nothwendig auf Null. Man hat vielmehr, f_1 und f_2 als Functionen zweier Veränderlichen vorausgesetzt, nach 5)

$$\int F(f_1, f_2)\,df_1 = \int F(f_1, f_2)\left\{\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy\right\} =$$

$$\iint\left[\left(\frac{\partial F}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}dxdy - \left(\frac{\partial F}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y}dydx\right.$$

$$\left. + F(f_1, f_2)\left\{\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}dxdy - \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x}dydx\right\}\right],$$

$$\int F(f_1, f_2)\,df_2 = \int F(f_1, f_2)\left\{\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy\right\} =$$

$$\iint\left[\left(\frac{\partial F}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}dxdy - \left(\frac{\partial F}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}dydx\right.$$

$$\left. + F(f_1, f_2)\left\{\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}dxdy - \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x}dydx\right\}\right],$$

d. h. im speciellen Falle

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$$

$$\int F(f_1, f_2)\,df_1 = 2\iint\frac{\partial F}{\partial f_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}dydx = -2\iint\frac{\partial F}{\partial f_2}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y}dxdy, \quad 13)$$

$$\int F(f_1, f_2)\,df_2 = 2\iint\frac{\partial F}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}dydx = -2\iint\frac{\partial F}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}dxdy.$$

Wählt man hierin für f_1 und f_2, wie es z. B. oben verlangt wird, die Zahlen $x + \zeta_h y$ und $x - \zeta_h y$, wo ζ_h eine der stets com-

plexen Wurzeln der Gleichung $x^h \pm 1 = 0$ bedeutet, so erhält man sogleich die Resultate

$$\int F(x+\zeta_h y, x-\zeta_h y) d(x+\zeta_h y) =$$
$$-2\zeta_h \iint F_{x-\zeta_h y}(x+\zeta_h y, x-\zeta_h y) dx dy,$$

$$\int F(x+\zeta_h y, x-\zeta_h y) d(x-\zeta_h y) =$$
$$+2\zeta_h \iint F_{x+\zeta_h y}(x+\zeta_h y, x-\zeta_h y) dx dy,$$

und damit auch die gewünschte Ergänzung zu der Formel 12), nämlich

$$\int_0^a x f(x) dx + i' \int_0^b (a-i'y) f(a+i'y) dy = i' \int_0^b i'y f(i'y) dy$$
$$+ \int_0^a (x-i'b) f(x+i'b) dx - 2i' \int_0^a \int_0^b f(x+i'y) dx dy,$$

$$\int_0^a x f(x) dx + i' \int_0^b (a+i'y) f(a-i'y) dy = i \int_0^b y f(-i'y) dy$$
$$+ \int_0^a (x+i'b) f(x-i'b) dx - 2i' \int_0^a \int_0^b (x+i'y) f_{x-i'y} (x-i'y) dx dy.$$

Da noch häufiger als $zf(z)$, die Function $\frac{f(z)}{z}$, welche möglicherweise discontinuirlich ist, angewendet werden kann, um Integralformeln zu erhalten, so ist es von Vortheil, den gegenwärtigen Fall allgemein aufzufassen und demgemäss die Gleichung

$$\int_0^a F(x,x) dx + i' \int_0^b F(a+i'y, a-i'y) dy = i' \int_0^b F(i'y, -i'y) dy \quad 14)$$
$$+ \int_0^a F(x+i'b, x-i'b) dx - 2i' \int_0^a \int_0^b F_{x-i'y} (x+i'y, x-i'y) dx dy$$

analog wie Gleichung 6) zu discutiren. Wie aus den Definitionen

$$F(u+iv, u-iv) = \Phi(u, v; u-iv) + i\Psi(u, v; u-iv);$$

$$\Phi(u, v; u-iv) = \varphi(u, v; u, -v) + i\psi(u, v; u, -v),$$

$$\Psi(u, v; u-iv) = \varphi'(u, v; u, -v) + i\psi'(u, v; u, -v)$$

hervorgeht, besteht die einzige Änderung des Verfahrens nunmehr darin, dass an die Stelle des früheren φ jetzt die in den vorhergehenden Gleichungen bestimmte Function $\varphi-\psi'$, dagegen für ψ jetzt $\psi+\varphi'$ zu stehen kommt, während die Bedeutung des Index 1 unverändert bleibt. Bestimmt man noch, dass

$$F'_{x-i'y}(x+i'y; x-i'y) = \Phi'_{x-i'y}\left(x+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}; x-i'y\right) + i\Psi'(\ldots)$$
$$= f_1 + if_2 + i'f_3 + ii'f_4,$$

so zerfällt die Gleichung 14) ganz wie 6) in vier partielle Gleichungen, indem die mit 1, i, i' und ii' multiplicirten Ausdrücke derselben jeder für sich verschwinden, für alle solche Functionen F, welche einer der Bedingungen $F(\xi; \eta) = F(-\xi; -\eta)$ oder $F(\xi; \eta) = -F(-\xi; -\eta)$ genügen.

Jene Nullwerthe nun erhalten durch Transposition der Glieder die folgenden geordneten Formen von 8 Relationen zur Auswerthung bestimmter Doppelintegrale

α) Bedingung $F(\xi; \eta) = F(-\xi; -\eta)$

$$1) \quad \int_0^a \left[\varphi\left(x+\frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}; x-\frac{b}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right) - \psi' \right.$$
$$\left. + \varphi_1\left(x-\frac{b}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}; x+\frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right) - \psi'_1 - 2\varphi(x, o; x, o)\right] dx =$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^b \left[\left\{-\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}; a-\frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + \psi' + \varphi_1 - \psi'_1\right\}\right.$$
$$\left. + \left\{\psi + \varphi' - \psi_1 - \varphi'_1\right\}\right] dy - 4\int_0^a\int_0^b f_4\, dx\, dy,$$

$$2)\quad \int_0^a\left[\psi\left(x+\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}};\,x-\frac{b}{\sqrt{2}},\,-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)+\varphi'+\psi_1+\varphi_1'\right]dx=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^b\left[\left\{\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,a-\frac{y}{\sqrt{2}},\,-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\psi'+\psi_1'-\varphi_1\right\}\right.$$

$$\left.+\left\{\psi+\varphi'-\psi_1-\varphi_1'\right\}\right]dy+4\int_0^a\int_0^b f_3\,dx\,dy\,,$$

$$3)\quad \int_0^b\left[\left\{\varphi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,a-\frac{y}{\sqrt{2}},\,-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\psi'+\varphi_1-\psi_1'\right\}-\right.$$

$$\left.2\left\{\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,-\frac{y}{\sqrt{2}},\,-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\psi'\left(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,-\frac{y}{\sqrt{2}},\,-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right\}\right]dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a\left[\left\{\varphi\left(x+\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}};\,x-\frac{b}{\sqrt{2}},\,-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)-\psi'-\varphi_1+\psi_1'\right\}\right.$$

$$\left.+\left\{\psi+\varphi'-\psi_1-\varphi_1'\right\}\right]dx-4\int_0^a\int_0^b f_1\,dx\,dy\,,$$

$$4)\quad \int_0^b\left[\left\{\psi\left(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,a-\frac{y}{\sqrt{2}},\,-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\varphi'+\psi_1+\varphi_1'\right\}-\right.$$

$$\left.2\left\{\psi\left(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,-\frac{y}{\sqrt{2}},\,-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\varphi'\left(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,-\frac{y}{\sqrt{2}},\,-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right\}\right]dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a\left[\left\{-\varphi\left(x+\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}};\,x-\frac{b}{\sqrt{2}},\,-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)+\psi'+\varphi_1-\psi_1'\right\}\right.$$

$$\left.+\left\{\psi+\varphi'-\psi_1-\varphi_1'\right\}\right]dx-4\int_0^a\int_0^b f_2\,dx\,dy.$$

β) Bedingung $F(\xi;\eta)=-F(-\xi;-\eta)$.

1)
$$\int_0^a\Big[\varphi\Big(x+\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}};\,x-\frac{b}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}}\Big)-\psi'$$

$$+\varphi_1\Big(x-\frac{b}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}};\,x+\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\Big)-\psi_1'-2\varphi(x,o;\,x,o)\Big]dx=$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^b\Big[\Big\{-\varphi\Big(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,a-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)+\psi'+\varphi_1-\psi_1'\Big\}$$

$$+\Big\{\psi+\varphi'-\psi_1-\psi_1'\Big\}$$

$$+2\Big\{\varphi\Big(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)-\psi'\Big\}$$

$$-2\Big\{\psi\Big(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)+\varphi'\Big\}\Big]dy-4\int_0^a\!\!\int_0^b f_4\,dx\,dy,$$

2)
$$\int_0^a\Big[\psi\Big(x+\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}};\,x-\frac{b}{\sqrt{2}},-\frac{b}{\sqrt{2}}\Big)+\varphi'+\psi_1+\varphi_1'\Big]dx=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^b\Big[\Big\{\varphi\Big(a+\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,a-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)-\psi'+\psi_1'-\varphi_1\Big\}$$

$$+\Big\{\psi+\varphi'-\psi_1-\varphi_1'\Big\}$$

$$+2\Big\{\varphi\Big(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)-\psi'\Big\}$$

$$-2\Big\{\psi\Big(\frac{y}{\sqrt{2}},\frac{y}{\sqrt{2}};\,-\frac{y}{\sqrt{2}},-\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)+\varphi'\Big\}\Big]dy+4\int_0^a\!\!\int_0^b f_3\,dx\,dy,$$

$$3)\quad \int_0^b \Big[\Big\{\varphi\Big(a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}};\, a-\frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)-\psi'$$

$$+\varphi_1\Big(a-\frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}};\, a+\frac{y}{\sqrt{2}}, +\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)-\psi_1'\Big\}\Big]\, dy =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a \Big[\Big\{\varphi\Big(x+\frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}};\, x-\frac{b}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\Big)-\psi'-\varphi_1+\psi_1'\Big\}$$

$$+\Big\{\psi+\varphi'-\psi_1-\varphi_1'\Big\}\Big]\, dx - 4\int_0^a\int_0^b f_1\, dx\, dy\,,$$

$$4)\quad \int_0^b \Big[\Big\{\psi\Big(a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}};\, a-\frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)+\varphi'$$

$$+\psi_1\Big(a-\frac{y}{\sqrt{2}}, -\frac{y}{\sqrt{2}};\, a+\frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\Big)+\varphi_1'\Big\}\Big]\, dy =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a \Big[\Big\{-\varphi\Big(x+\frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}};\, x-\frac{b}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\Big)+\psi'+\varphi_1-\psi_1'\Big\}$$

$$+\Big\{\psi+\varphi'-\psi_1-\varphi_1'\Big\}\Big]\, dx - 4\int_0^a\int_0^b f_2\, dx\, dy.$$

3. Zur Vervollständigung des bisherigen Formelsystems gehört noch eine kleine Discussion der Integrationsorte mit sogenannten Ausnahmepunkten. Unter der Voraussetzung, dass es sich blos um Integrationen von Differentialen eines einzigen Argumentes nach diesem Argumente handelt, liefert die Cauchy'sche Gleichung

$$\int_{(0_1)} F(z)dz = \int_0^b\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} F(z)\, dx dy = \int_0^a\int_{\eta-\varepsilon}^{\eta+\varepsilon} F(z) dy dx\,,\quad \varepsilon = 0\,,$$

worin der Index (0_1) irgend einen beliebigen Integrationsort mit einem Ausnahmepunkte, rechts das Doppelintegral eine Integra-

tion auf der Basis eines Rechtecks mit den Seiten a und b und dem innerhalb des Rechteckes liegenden Ausnahmepunkt ξ, η bedeutet, die nöthigen Behelfe; für $\xi = o$ fällt dabei das untere, für $\xi = a$ das obere unendlich kleine ε weg — ebenso bezüglich η. Schon bei der Einführung anderer complexer Wurzeln algebraischer Gleichungen als $+i$ oder $-i$, stösst die Auswerthung jener Doppelintegrale auf Unbestimmtheiten; völlig unbrauchbar wird die Formel bei Functionen mehrerer Argumente, wie sie im Vorhergehenden angewendet sind, wenn eben die Integration blos nach der einen Veränderlichen erfolgt — es muss und kann in diesen Fällen der Integrationsort (o_1) auf einen Kreis mit unendlich kleinem Radius reducirt werden, der den Ausnahmepunkt umschliesst. Bei Functionen eines Arguments kann diese Reduction ohne weiters geschehen, weil die Wahl eines geschlossenen Contours auf das Resultat von keinem Einflusse ist, und führt zur Gleichung

$$\int_{(o_n)} F(z)dz = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) \int_{\vartheta_o}^{\vartheta_o + 2\pi} \frac{-\sin\vartheta + i_k \cos\vartheta}{\cos\vartheta + i_k \sin\vartheta} d\vartheta,$$

worin $\lambda_p = Lim[\delta F(\zeta_p + \delta)]$, $\{\delta = o\}$ von ϑ unabhängig ist, i_k eine complexe Wurzel von der Form $\cos\tau \pm i \sin\tau$ bedeutet, während die Integration links auf einen Contour mit n vollkommen eingeschlossenen Ausnahmepunkten $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ bezogen ist. Wenn einer der Ausnahmepunkte auf dem Integrationswege selbst liegt, gilt die vorstehende Formel nicht mehr; die Integration lässt sich dann nur in dem Falle bewerkstelligen, wenn der Ausnahmepunkt entweder auf einer Geraden oder in der Spitze eines Winkels mit dem Bogenmasse τ liegt, wofür bezüglich statt der oberen Grenze $\vartheta_o + 2\pi$, $\vartheta_o + \pi$ oder $(\vartheta_o = o +)\frac{\pi}{2}$ eintritt (entsprechend dem Wegfall des ε unter den früheren Bedingungen $\xi = o$ und $\eta = o$). Man findet nun (s. Anhang 3.) — und hiermit erledigt sich die Integration discontinuirlicher Functionen eines Arguments $x + i_k y$ — je nachdem $i_k = \cos\tau \pm i \sin\tau$, als Integralwerth für den Weg (o_n)

$$\int_{(0_n)} F(z)dz = \pm ip(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n) \tag{15}$$

mit den Werthen $p = 2\pi$, π oder τ für die vorhin bezeichneten Grenzen $\vartheta_0 + 2\pi$, $\vartheta_0 + \pi$ oder $\frac{\pi}{2}$.

Nicht viel anders gestaltet sich bezüglich des Resultates die Sache bei Functionen zweier Argumente $x + i_k y$ und $x - i_k y$, die nach $x + i_k y$ oder nach $x - i_k y$ zu integriren sind; die Reduction des Integrationsortes (o_n) auf n unendlich kleine Kreise um $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ ist hier an die Formel gebunden (s. Gleichung 13)

$$\int_{(0_n)} F(x + i_k y, x - i_k y) d(x + i_k y)$$

$$-(\mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_n) \int_0^{2\pi} \frac{-\sin\vartheta + i_k \cos\vartheta}{\cos\vartheta \pm i_k \sin\vartheta} d\vartheta$$

$$= -2i_k \iint_{(0_n)} F'_{x - i_k y}(x + i_k y, x - i_k y) dx\, dy + Lim$$

$$\left[\int_0^{r_1}\int_0^{2\pi} rF'_{r\cos\vartheta - i_k r \sin\vartheta}(r\cos\vartheta + i_k r\sin\vartheta, r\cos\vartheta - i_k r\sin\vartheta) dr d\vartheta\right.$$

$$\left. + \int_0^{r_2}\int_0^{2\pi} rF' dr d\vartheta + \ldots \int_0^{r_n}\int_0^{2\pi} rF' dr d\vartheta\right], \{r_1 = r_2 = \ldots r_n = o\},$$

d. h. wegen des Verschwindens der mit *Lim* bezeichneten Doppelintegrale

$$\int_{(0_n)} F(x + i_k y, x - i_k y) d(x + i_k y) =$$

$$\pm ip(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n) - 2i_k \iint_{(0_n)} F'_{x - i_k y}(x + i_k y, x - i_k y) dx\, dy \tag{16}$$

$$\mu_q = Lim[\delta_o, {}_1F(\xi_q + i_k\eta_q + \delta_o, \xi_q - i_k\eta_q + \delta_1)],$$

$$\begin{cases} \delta_o = Lim\{r(\cos\vartheta + i_k \sin\vartheta)\} \\ \delta_1 = Lim\{r(\cos\vartheta - i_k \sin\vartheta)\}. \end{cases}$$

Die Unterscheidung zwischen dem Factor δ_o und δ_1 in μ_q ist unwesentlich; viel wichtiger ist die genaue Untersuchung der Abhängigkeit von μ_q bezüglich ϑ. Man wird bei richtiger Einführung der Functionen $\xi + r\cos\vartheta$ für x, $\eta + r\sin\vartheta$ für y im Integrale $\int_{(o_n)} F(z)\,dz$ nicht fehlen; bei solchen (meist verwendeten) Functionen, deren algebraischer Nenner zwischen den Integrationsgrenzen den Werth o erreicht, ist es gut zu bemerken, dass überhaupt nur vier verschiedene Fälle denkbar sind, wonach nämlich die Integration längs einer unendlich kleinen Kreisperipherie folgende vier Werthe liefern kann.

1. Integration nach $x + i_k y$:

$$\varphi(\xi + i_k\eta, \xi - i_k\eta) \int_0^{2\pi;\ \pi,\ \frac{1}{2}\pi} \frac{-\sin\vartheta + i_k\cos\vartheta}{\cos\vartheta + i_k\sin\vartheta}\, d\vartheta;$$

$$\varphi(\xi + i_k\eta, \xi - i_k\eta) \int_0^{2\pi;\ \pi,\ \frac{1}{2}\pi} \frac{-\sin\vartheta + i_k\cos\vartheta}{\cos\vartheta - i_k\sin\vartheta}\, d\vartheta =$$

$$+ \frac{1 - \sin\tau}{\cos\tau} . (2\pi . \varphi;\ \pi . \varphi), \frac{1 - 2\sin\tau}{\cos\tau} . \frac{\pi}{2}\varphi + \tau\tan\tau\,\varphi;\ \left(\tau \lesseqgtr \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Integration nach $x - i_k y$:

$$\varphi(\xi + i_k\eta, \xi - i_k\eta) \int_0^{2\pi;\ \pi,\ \frac{1}{2}\pi} \frac{-\sin\vartheta - i_k\cos\vartheta}{\cos\vartheta + i_k\sin\vartheta}\, d\vartheta =$$

$$- \frac{1 - \sin\tau}{\cos\tau} . (2\pi . \varphi;\ \pi . \varphi), - \frac{1 - 2\sin\tau}{\cos\tau} . \frac{\pi}{2}\varphi - \tau\tan\tau\,\varphi;\ \left(\tau \lesseqgtr \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\varphi(\xi + i_k\eta,\ \xi - i_k\eta)\int_0^{2\pi;\ \pi,\ \frac{1}{2}\pi}\frac{-\sin\vartheta - i_k\cos\vartheta}{\cos\vartheta - i_k\sin\vartheta}\,d\vartheta =$$

$$-2i\pi.\varphi,\ (-\pi.i.\varphi,\ \mp\tau.i.\varphi).$$

Zur Illustrirung dieser wenigen Elemente einer möglicherweise sehr verzweigten Theorie diene uns die einfachste discontinuirliche Function $F(z) = \frac{f(z)}{z}$, $f(o) \gtrless o$, welche wir somit den allgemeinen Formeln 15) und 16) anpassen: bezüglich der letzteren bestimmen wir $\frac{f(z)}{z} = \frac{f(x+iy)}{x-iy}$ und integriren dieselbe einmal nach $x+iy$, sodann nach $x-iy$; die Integrationsbasis bilde in diesen drei Fällen, wie bisher, das Parallelogramm, hier speciell das Rechteck mit den Seiten a und b und den Diagonaleckpunkten o und ab. Als Integrationsgrenzen nach ϑ sind o und $\frac{\pi}{2}$ einzuführen, wonach jetzt die Formeln 15) und 16) in die folgenden übergehen

$$\int_0^a \frac{f(x)}{x}\,dx + i\int_0^b \frac{f(a+iy)}{a+iy}\,dy = \int_0^b \frac{f(iy)}{y}\,dy + \int_0^a \frac{f(x+ib)}{x+ib}\,dx + \frac{\pi}{2}\,if(o), \tag{17}$$

$$\int_0^a \frac{f(x)}{x}\,dx + \int_0^b \frac{f(a+iy)}{a-iy}\,dy = -\int_0^b \frac{f(iy)}{y}\,dy + \int_0^a \frac{f(x+ib)}{x-ib}\,dx - f(o) + 2i\int_0^a\int_0^b \frac{f(x+iy)}{(x-iy)^2}\,dx\,dy,$$

$$\int_0^a \frac{f(x)}{x}\,dx - i\int_0^b \frac{f(a+iy)}{a-iy}\,dy = +\int_0^b \frac{f(iy)}{y}\,dy + \int_0^a \frac{f(x+ib)}{x-ib}\,dx - \frac{\pi}{2}\,if(o) - 2i\int_0^a\int_0^b \frac{f'_{x+iy}(x+iy)}{x-iy}\,dx\,dy.$$

Der erste und einzige Schritt, der sich mit Beibehaltung der Allgemeinheit dieser Gleichungen darbietet, ist die additive und subtractive Verbindung derselben, und zwar der ersten mit den beiden letzten, wie folgt:

$$\int_0^a \frac{f(x)}{x}\,dx + \frac{1}{2}f(o)\left(1-\frac{\pi}{2}i\right) = \int_0^a \frac{xf(x+ib)}{x^2+b^2}\,dx \tag{18}$$

$$-ia\int_0^b \frac{f(a+iy)}{a^2+y^2}\,dy + i\int_0^a\int_0^b \frac{f(x+iy)}{(x-iy)^2}\,dx\,dy,$$

$$\int_0^a \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_0^b \frac{f(iy)}{y}\,dy = \int_0^a \frac{xf(x+ib)}{x^2+b^2}\,dx$$

$$-\int_0^b \frac{yf(a+iy)}{a^2+y^2}\,dy - i\int_0^a\int_0^b \frac{f'(x+iy)}{x-iy}\,dx\,dy,$$

$$\int_0^b \frac{f(iy)}{y}\,dy + \frac{1}{2}f(o)\left(1+\frac{\pi}{2}i\right) = \int_0^a ib\frac{f(x+ib)}{x^2+b^2}\,dx$$

$$+\int_0^b \frac{yf(a+iy)}{a^2+y^2}\,dy + i\int_0^a\int_0^b \frac{f(x+iy)}{(x-iy)^2}\,dx\,dy,$$

$$a\int_0^b \frac{f(a+iy)}{a^2+y^2}\,dy + b\int_0^a \frac{f(x+ib)}{x^2+b^2}\,dx = \int_0^a\int_0^b \frac{f'(x+iy)}{x-iy}\,dx\,dy + \frac{\pi}{2}f(o).$$

Ein Musterbeispiel der Analyse liefert zu diesem System die Function $f(x+iy) = e^{-(x+iy)}$. Für $Lim\, a = \infty$ geht in diesem speciellen Falle die erste der Gleichungen 17) in den reellen Theil (siehe Anhang 5.)

$$\int_0^\infty \frac{b\sin b - x\cos b}{x^2+b^2}\, e^{-x}\,dx = C + \int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos y}{y}\,dy, \tag{19}$$

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-x}}{x}\, dx = -C = -0{\cdot}5772156649\ldots,$$

worin, wie in allen folgenden Fällen das Integral

$$\int_0^b \frac{\cos y}{y}\, dy$$

seinen sogenannten Hauptwerth besitzt, — und in den imaginären Theil über

$$\int_0^\infty \frac{b\cos b + x\sin b}{x^2+b^2}\, e^{-x} dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^b \frac{\sin y}{y}\, dy.$$

Die einzelnen Summanden unter den linksseitigen Integralzeichen lassen sich hier isoliren; es führt dies zu den Reductionen

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{x^2+b^2}\, dx = -C\cos b + \frac{\pi}{2}\sin b - \int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos(b-y)}{y}\, dy, \tag{20}$$

$$\int_0^\infty \frac{be^{-x}}{x^2+b^2}\, dx = C\,.\,\sin b + \frac{\pi}{2}\cos b + \int_{(0)}^{(b)} \frac{\sin(b-y)}{y}\, dy.$$

Die diesen Resultaten parallel laufenden Relationen aus den beiden letzten Formeln 17) sind die folgenden

$$\int_0^\infty \frac{b\sin b + x\cos b}{x^2+b^2}\, e^{-x} dx = 1 - C + \int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos y}{y}\, dy \tag{21}$$

$$+2\int_0^\infty\int_{(0)}^{(b)} \frac{2xy\cos y - (x^2-y^2)\sin y}{(x^2+y^2)^2}\, e^{-x} dx\,dy$$

$$= -C - \int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos y}{y}\, dy + 2\int_0^\infty\int_0^b \frac{y\cos y - x\sin y}{x^2+y^2}\, e^{-x} dx\,dy,$$

$$\int_0^\infty \frac{b\cos b - x\sin b}{x^2+b^2} e^{-x} dx = -\int_0^b \frac{\sin y}{y} dy$$

$$-2\int_0^\infty\int_0^b \frac{(x^2-y^2)\cos y + 2xy\sin y}{(x^2+y^2)^2} e^{-x} dx dy$$

$$= \frac{\pi}{2} + \int_0^b \frac{\sin y}{y} dy - 2\int_0^\infty\int_0^b \frac{x\cos y + y\sin y}{x^2+y^2} e^{-x} dx dy;$$

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{x^2+b^2} dx = \cos b\,(1-C) + \int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos(b-y)}{y} dy \tag{22}$$

$$+2\int_0^\infty\int_{(0)}^{(b)} \frac{2xy\cos(b-y) + (x^2-y^2)\sin(b-y)}{(x^2+y^2)^2} e^{-x} dx dy$$

$$= -C\cos b - \frac{\pi}{2}\sin b - \int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos(b-y)}{y} dy$$

$$+2\int_0^\infty\int_0^b \frac{y\cos(b-y) + x\sin(b-y)}{x^2+y^2} e^{-x} dx dy,$$

$$\int_0^\infty \frac{be^{-x}}{x^2+b^2} dx = \sin b\,(1-C) + \int_{(0)}^{(b)} \frac{\cos(b-y)}{y} dy$$

$$+2\int_0^\infty\int_{(0)}^{(b)} \frac{2xy\sin(b-y) - (x^2-y^2)\cos(b-y)}{(x^2+y^2)^2} e^{-x} dx dy$$

$$= -C\sin b + \frac{\pi}{2}\cos b - \int_{(0)}^{(b)} \frac{\sin(b-y)}{y} dy$$

$$+2\int_0^\infty\int_0^b \frac{y\sin(b-y) - x\cos(b-y)}{x^2+y^2} e^{-x} dx dy;$$

schliesslich können die Gleichungen 19) und 21) verbunden werden und liefern

$$\int_0^\infty \frac{x\cos b}{x^2+b^2}e^{-x}dx = -\frac{1}{2}(2C-1) \tag{23)}$$

$$+\int_0^\infty\int_{(0)}^{(b)} \frac{2xy\cos y-(x^2-y^2)\sin y}{(x^2+y^2)^2}e^{-x}dx\,dy$$

$$= -C-\int_{(0)}^{(b)}\frac{\cos y}{y}dy+\int_0^\infty\int_0^b\frac{y\cos y - x\sin y}{x^2+y^2}e^{-x}dx\,dy,$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin b}{x^2+b^2}e^{-x}dx = \frac{\pi}{4}$$

$$+\int_0^\infty\int_0^b \frac{(x^2-y^2)\cos y+2xy\sin y}{(x^2+y^2)^2}e^{-x}dx\,dy$$

$$= -\int_0^b\frac{\sin y}{y}dy+\int_0^\infty\int_0^b\frac{x\cos y+y\sin y}{x^2+y^2}e^{-x}dx\,dy;$$

$$\int_0^\infty \frac{b\cos b}{x^2+b^2}e^{-x}dx = \frac{\pi}{4}-\int_0^b\frac{\sin y}{y}dy$$

$$+\int_0^\infty\int_0^b \frac{(x^2-y^2)\cos y+2xy\sin y}{(x^2+y^2)^2}e^{-x}dx\,dy$$

$$= \frac{\pi}{2}-\int_0^\infty\int_0^b\frac{x\cos y+y\sin y}{x^2+y^2}e^{-x}dx\,dy,$$

$$\int_0^\infty \frac{b\sin b}{x^2+b^2}e^{-x}dx = \frac{1}{2}+\int_{(0)}^{(b)}\frac{\cos y}{y}dy$$

$$+\int_0^\infty\int_{(0)}^{(b)}\frac{2xy\cos y-(x^2-y^2)\sin y}{(x^2+y^2)^2}e^{-x}dx\,dy$$

$$=\int_0^\infty\int_0^b\frac{y\cos y-x\sin y}{x^2+y^2}e^{-x}dx\,dy.$$

Die Gleichungen 22) und 23) bilden den Apparat, der zur Kenntniss der einfachsten Reduction der acht rechtsseitigen Doppelintegrale, ja (im Falle $b=\infty$) ihres in endlichen Ausdrücken bestimmten Werthes führt — man hat nur die Integrale

$$\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{x^2+b^2}dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty\frac{xe^{-x}}{x^2+b^2}dx$$

aus 23) und 20), resp. 22) und 20) zu eliminiren. Danach bestimmen sich die Doppelintegrale in 23) in folgender Weise

$$\int_0^\infty\int_0^b\frac{x\cos y+y\sin y}{x^2+y^2}e^{-x}dx\,dy=\frac{\pi}{2}\sin^2 b-C.\cos b\sin b \tag{24}$$

$$+\cos^2 b\int_0^b\frac{\sin y}{y}dy-\sin b\cos b\int_{(0)}^{(b)}\frac{\cos y}{y}dy,$$

$$\int\int_0^b\frac{(x^2-y^2)\cos y+2xy\sin y}{(x^2+y^2)^2}e^{-x}dxdy=\frac{\pi}{2}\sin^2 b-C.\cos b\sin b$$

$$-\frac{\pi}{4}-\sin b\int_{(0)}^{(b)}\frac{\cos(b-y)}{y}dy,$$

$$\int_0^\infty\int_0^b\frac{y\cos y-x\sin y}{x^2+y^2}e^{-x}dx\,dy=C.\sin^2 b+\frac{\pi}{2}\sin b\cos b$$

$$+\sin b\int_{(0)}^{(b)}\frac{\sin(b-y)}{y}dy,$$

$$\int_0^\infty\int_{(0)}^{(b)}\frac{2xy\cos y-(x^2-y^2)\sin y}{(x^2+y^2)^2}e^{-x}dx\,dy=C.\sin^2 b+\frac{\pi}{2}\sin b\cos b$$

$$-\frac{1}{2}-\cos b\int_{(0)}^{(b)}\frac{\cos(b-y)}{y}dy.$$

Durch umgekehrte Integration gewinnt man für $b=\infty$ den Werth des ersten dieser Doppelintegrale

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{x\cos y+y\sin y}{x^2+y^2}e^{-x}dxdy=\frac{\pi}{2}$$

und zwar ist dabei das unendliche Anwachsen des b an keine specielle Bedingung gebunden.

Dasselbe gilt von dem in der ersten der vorhergehenden Gleichungen rechts vorkommenden Integrale

$$\int_0^b\frac{\sin y}{y}dy;$$

es ist

$$\int_0^\infty\frac{\sin y}{y}dy=\frac{\pi}{2}$$

und

$$\sin^2 b\frac{\pi}{2}+\cos^2 b\int_0^b\frac{\sin y}{y}dy$$

für $b=\infty$ dem Werth $\frac{\pi}{2}$ gleich. Demnach reducirt sich der übrig bleibende Theil der Gleichung, d. h.

$$Lim\left\{-\cos b\sin b\left[C+\int_{(0)}^{(b)}\frac{\cos y}{y}dy\right]\right\}$$

auf Null; und da b beliebig unendlich gross gedacht werden muss, findet sich

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{\cos y}{y}\, dy = -C.$$

Es ist dies der vorhin erwähnte Hauptwerth des linksseitigen Integrales, welcher somit dem Hauptwerthe von

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx$$

gleich kommt.

Nun führt aber dieser Hauptwerth auch zur endlichen Werthbestimmung der übrigen Doppelintegrale in 24) für $b=\infty$, nämlich

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(x^2-y^2)\cos y+2xy\sin y}{(x^2+y^2)^2}\, e^{-x}\, dx\, dy = \tag{25}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left\{x\frac{x\cos y+y\sin y}{(x^2+y^2)^2} - y\frac{y\cos y-x\sin y}{(x^2+y^2)^2}\right\} e^{-x} dx\, dy = -\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{y\cos y-x\sin y}{x^2+y^2}\, e^{-x}\, dx\, dy = 0,$$

$$\int_0^\infty\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{2xy\cos y-(x^2-y^2)\sin y}{(x^2+y^2)^2}\, e^{-x}\, dx\, dy =$$

$$\int_0^\infty\int_{(0)}^{(\infty)} \left\{y\frac{x\cos y+y\sin y}{(x^2+y^2)^2} + x\frac{y\cos y-x\sin y}{(x^2+y^2)^2}\right\} e^{-x} dx dy = \frac{1}{2}(2C-1).$$

Diejenigen Doppelintegrale, welche den Ausdruck x^2+y^2 in erster Potenz im Nenner enthalten, lassen eine bemerkenswerthe Transformation zu, wenn man die Integration nach x den Formeln 20) entsprechend ausführt; man erhält dann die Relationen

$$\int_0^\infty\int_0^b \frac{y\cos y - x\sin y}{x^2+y^2}e^{-x}dxdy = \frac{\sin b}{2}\left\{\pi\cos b + 2C.\sin b\right\}$$

$$+\int_0^b dy\int_{(0)}^{(y)}\frac{\sin(2y-z)}{z}dz\,,$$

$$\int_0^\infty\int_0^b \frac{x\cos y + y\sin y}{x^2+y^2}e^{-x}dxdy = \frac{\sin b}{2}\left\{\pi\sin b - 2C.\cos b\right\}$$

$$-\int_0^b dy\int_{(0)}^{(y)}\frac{\cos(2y-z)}{z}dz\,;$$

$$\int_0^\infty\int_0^b \frac{y\cos(b-y) + x\sin(b-y)}{x^2+y^2}e^{-x}dxdy = \frac{\pi}{2}\sin b$$

$$-\int_0^b dy\int_{(0)}^{(y)}\frac{\sin(b-2y+z)}{z}dz\,,$$

$$\int_0^\infty\int_0^b \frac{x\cos(b-y) - y\sin(b-y)}{x^2+y^2}e^{-x}dxdy = -C.\sin b$$

$$-\int_0^b dy\int_{(0)}^{(y)}\frac{\cos(b-2y+z)}{z}dz\,;$$

daraus

$$\int_0^b dy\int_{(0)}^{(y)}\frac{\sin(2y-z)}{z}dz = \sin b\int_{(0)}^{(b)}\frac{\sin(b-y)}{y}dy\,,$$

$$\int_0^b dy\int_{(0)}^{(y)}\frac{\cos(2y-z)}{z}dz = \cos b\int_{(0)}^{(b)}\frac{\sin(b-y)}{y}dy\,;$$

$$\int_0^b dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\sin(b-2y+z)}{z}\, dz = 0\,,$$

$$\int_0^b dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\cos(b-2y+z)}{z}\, dz = \int_{(0)}^{(b)} \frac{\sin(b-y)}{y}\, dy.$$

Die Annahme $Lim\, b = \infty$ leitet hier auf oscillirende Integrale; in den einfachsten Fällen

$$Lim\, b = m\pi \quad \text{und} \quad Lim\, b = \frac{2m+1}{2}\pi\,, \quad m = \infty$$

findet man leicht die respectiven Werthe

$$Lim \int_0^{m\pi} dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\sin(2y-z)}{z}\, dz = 0,$$

$$Lim \int_0^{m\pi} dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\cos(2y-z)}{z}\, dz = -\frac{\pi}{2}\,;$$

$$Lim \int_0^{\frac{2m+1}{2}\pi} dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\sin(2y-z)}{z}\, dz = C,$$

$$Lim \int_0^{\frac{2m+1}{2}\pi} dy \int_{(0)}^{(y)} \frac{\cos(2y-z)}{z}\, dz = 0.$$

Weniger Biegsamkeit als das eben behandelte Beispiel $f = e^{-z}$ besitzt die Function $f = e^{-z^2}$, wofür die erste der Formeln 17) die hauptsächlichsten Beziehungen liefert

$$\int_0^\infty \frac{b \sin 2bx - x \cos 2bx}{b^2 + x^2}\, e^{-x^2}\, dx = \frac{e^{-b^2}\, li(e^{+b^2})}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{b\cos 2bx + x\sin 2bx}{b^2+x^2}\, e^{-x^2} dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-b^2}.$$

Es käme eben auf die Isolirung der Summanden unter dem Integralzeichen linker Hand auch hier an, welche aber blos in einem Falle und auch da nur indirect und unvollständig gelingt. Aus der bekannten Doppelgleichung

$$\frac{e^{+b^2} li(e^{-b^2})}{2} = -\int_0^\infty \frac{ze^{-z^2}}{b^2+z^2} dz = -\int_0^\infty \frac{z\cos bz + b\sin bz}{b^2+z^2} dz$$

geht die Integralformel hervor

$$-\int_0^\infty \frac{e^{+b^2} li(e^{-b^2})}{2} db = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4};$$

dagegen hat man

$$\int_0^\infty db \int_0^\infty \frac{b\sin 2bx + x\cos 2bx}{b^2+x^2}\, e^{-x^2} dx = \pi \int_0^\infty e^{-3x^2} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\sqrt{\pi}.$$

Es würde also daraus durch einen Rückschluss

$$\int_0^\infty \frac{b\sin 2bx + x\cos 2bx}{b^2+x^2}\, e^{-x^2} dx = -\frac{e^{+b^2} li(e^{-b^2})}{2} + \varphi(b),$$

$$\int_0^\infty \varphi(b) db = \pi \int_0^\infty (e^{-3x^2} - e^{-4x^2}) dx$$

zu folgern und als wahrscheinlich

$$\varphi(b) = \frac{\pi}{2}\,(e^{-\frac{3}{4}b^2} - e^{-b^2})$$

anzunehmen sein. Die einzige brauchbare Formel, welche jetzt die übrigen Gleichungen 17) hiezu enthalten, und welche durch

ihre Analogie mit einer später zu gewinnenden Beziehung von Interesse ist, lautet

$$e^{-b^2}\int_0^\infty\int_0^b \frac{(x^2-y^2)\sin 2xy-2xy\cos 2xy}{x^2+y^2}e^{-x^2+y^2}dx\,dy=$$

$$\frac{1}{8}\left\{e^{-b^2}li(e^{+b^2})+e^{+b^2}li(e^{-b^2})\right\}-\frac{\varphi(b)}{4}$$

Um auch ein Beispiel der Anwendung der vierten Wurzel aus -1, wenn auch nur des Interesses wegen, das sich an die Transformation der Functionen und Integrale in diesem Falle knüpft, zu geben, betrachten wir im Folgenden noch die Functionen

$$\frac{e^{-z^p}}{a\mp z},\quad \frac{e^{-z^p}}{a^2+z^2},\quad \frac{ze^{-z^p}}{a^2+z^2}$$

für $p=1$ und $p=2$. Zur Vereinfachung der Resultate ist es hier von Vortheil, in der ersten der Gleichungen 17) blos die Integrale

$$\int_0^a \frac{f(x)}{x}dx \quad \text{und} \quad i'\int_0^b \frac{f(i'y)}{y}dy$$

für $a=b=\infty$ beizubehalten und den übrigen Theil des Rhomboids durch einen Bogen zu ersetzen, welcher durch die Substitution

$$z=R(\cos\vartheta+i'\sin\vartheta),\quad R=\infty$$

definirt ist, indem, wie leicht zu ersehen, die auf diesen Theil des Integrationsortes entfallende Integration (eine Integration nach ϑ zwischen o und $\frac{\pi}{2}$) den Werth o erhält. Da der Ausnahmepunkt hier auf einer Seitenlinie des Rhomboides liegt (Fall $\frac{e^{-z^p}}{a-z}$; die übrigen Functionen besitzen hier keinen Ausnahmepunkt), so hat das übrig bleibende Integral den Werth $i\pi e^{-a}$; wir bekommen somit $\left(p=1,\ f=\frac{e^{-z}}{a-z}\right)$

$$i'\int_0^\infty \frac{e^{-i'z}}{a-i'z}\,dz - \pi\, i\, e^{-a} = \int_0^{a-0} \frac{e^{-z}}{a-z}\,dz + \int_{a+0}^\infty \frac{e^{-z}}{a-z}\,dz,$$

sodann aus $f = \frac{e^{-z}}{a+z}$

$$i'\int_0^\infty \frac{e^{-i'z}}{a+i'z}\,dz = \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{a+z}\,dz.$$

Es ist hier nicht erlaubt, nach dem Schema

$$p + iq + i_1'' r + i i_1'' s = 0$$

die einzelnen Glieder p, q, r und s jeder dieser Gleichungen für sich gleich 0 zu setzen, sondern die gewünschten Resultate gehen hier erst aus der Verbindung der beiden Formeln hervor und lauten mit der Modification $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$\int_0^\infty \frac{b^2 z \sin z - z^3 \cos z}{b^4 + z^4}\, e^{-z} dz = \qquad 26\text{ a)}$$

$$\frac{1}{2}\left\{e^{+b\sqrt{2}}\, li\left(e^{-b\sqrt{2}}\right) + e^{-b\sqrt{2}}\, li\left(e^{+b\sqrt{2}}\right)\right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{b^2 z \cos z + z^3 \sin z}{b^4 + z^4}\, e^{-z} dz = \frac{\pi}{2} e^{-b\sqrt{2}},$$

$$\int_0^\infty \frac{b^2 \cos z + z^2 \sin z}{b^4 + z^4}\, e^{-z} dz =$$

$$\frac{\pi}{2b\sqrt{2}} e^{-b\sqrt{2}} + \frac{1}{2b\sqrt{2}}\left\{e^{-b\sqrt{2}}\, li\left(e^{+b\sqrt{2}}\right) - e^{+b\sqrt{2}}\, li\left(e^{-b\sqrt{2}}\right)\right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{z^2 \cos z - b^2 \sin z}{b^4 + z^4}\, e^{-z} dz =$$

$$\frac{\pi}{2b\sqrt{2}} e^{-b\sqrt{2}} - \frac{1}{2b\sqrt{2}}\left\{e^{-b\sqrt{2}}\, li\left(e^{+b\sqrt{2}}\right) - e^{+b\sqrt{2}}\, li\left(e^{-b\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

Hiezu correlative Integralformeln ergeben sich aus der Anwendung der Functionen

$$\frac{e^{-z}}{a^2+z^2} \text{ und } \frac{ze^{-z}}{a^2+z^2} \text{ statt } \frac{e^{-z}}{a\mp z};$$

aus den Grundgleichungen

$$i'\int_0^\infty \frac{e^{-i'z}}{a^2+iz^2}dz = \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{a^2+z^2}dz,$$

$$i\int_0^\infty \frac{ze^{-i'z}}{a^2+iz^2}dz = \int_0^\infty \frac{ze^{-z}}{a^2+z^2}dz$$

gewinnt man ohne Mühe

$$\int_0^\infty \frac{b^2\cos z - z^2\sin z}{b^4+z^4}e^{-z}dz = \int_0^\infty \frac{z^2\cos z + b^2\sin z}{b^4+z^4}e^{-z}dz = \qquad 26\text{ b)}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{2b^2+z^2}dz,$$

$$\int_0^\infty \frac{b^2 z\sin z + z^3\cos z}{b^4+z^4}e^{-z}dz = \int_0^\infty \frac{ze^{-z}}{2b^2+z^2}dz,$$

$$\int_0^\infty \frac{b^2 z\cos z - z^3\sin z}{b^4+z^4}e^{-z}dz = 0.$$

Die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{2b^2+z^2}dz \text{ und } \int_0^\infty \frac{ze^{-z}}{2b^2+z^2}dz$$

können hier den bekannten weiteren Reductionen (Formeln 20) unterworfen werden.

Bei der völlig gleichen Behandlung der Functionen

$$\frac{e^{-z^2}}{a-z}, \quad \frac{e^{-z^2}}{a+z}, \quad \frac{e^{-z^2}}{a^2+z^4}, \quad \frac{ze^{-z^2}}{a^2+z^2}$$

genügt es, die schliesslichen Bestimmungen der Werthe (resp. Hauptwerthe) anzugeben, die sich hier aus der wechselseitigen Verbindung der entsprechenden Grundformeln und mit Benützung der beiden leicht beweisbaren Beziehungen

$$\int_0^\infty \frac{ze^{-z^2}}{a^2+z^2}\,dz = -\frac{e^{+a^2}li(e^{-a^2})}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{ze^{-z^2}}{a^2-z^2}\,dz = +\frac{e^{-a^2}li(e^{+a^2})}{2}$$

ableiten lassen, speciell ausser den bekannten Formeln für

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{a^2+z^2}\,dz, \int_0^\infty \frac{z\sin z}{a^2+z^2}\,dz, \int_0^\infty \frac{\cos z}{a^2+z^2}\,dz, \int_0^\infty \frac{z\cos z}{a^2+z^2}\,dz$$

die folgenden Reductionen

$$\int_0^\infty \frac{\cos(z^2)}{a^4+z^4}\,dz = \frac{\pi}{4\sqrt{2}a^3}e^{-a^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{a^4-x^4}\,dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(z^2)}{a^4+z^4}\,dz = -\frac{\pi}{4\sqrt{2}a^3}e^{-a^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{a^4-x^4}\,dx;$$

$$\int_0^\infty \frac{z^2\cos(z^2)}{a^4+z^4}\,dz = \frac{\pi}{4\sqrt{2}a}e^{-a^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{x^2e^{-x^2}}{a^4-x^4}\,dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{z^2\sin(z^2)}{a^4+z^4}\,dz = \frac{\pi}{4\sqrt{2}a}e^{-a^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{x^2e^{-x^2}}{a^4-x^4}\,dx.$$

Man erkennt leicht, wie sich diese Ergebnisse bei Anwendung der 8. Wurzel aus -1, der 16. Wurzel aus -1, etc. in beliebigem Grade vermehren lassen; die beiden letzten Formeln 17) jedoch würden der allzu grossen Complication wegen zur Werthbestimmung der Doppelintegrale auf diesem Wege blosser Transformation zu keinem brauchbaren Resultate führen.

Schon die einfach scheinende Gleichung, die man z. B. aus der letzten der Formeln 17) unter der obigen Modification des Integrationsweges als Ergänzung zu den Gleichungen 25) erhält, nämlich

$$i_k\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-(r\cos\vartheta+i_k r\sin\vartheta)}}{a-(r\cos\vartheta-i_k r\sin\vartheta)}\,r\,dr\,d\vartheta=i_k\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-(x+i_k y)}}{a-(x-i_k y)}\,dx\,dy=$$

$$-\frac{\pi}{2}ie^{-a}+a\int_0^\infty\frac{e^{-z}}{a^2-z^2}\,dz,\quad i_k=\cos\tau+i\sin\tau$$

sowie andere ihr ähnliche sind höchstens für $i_k=i$ zu verwenden; man erhält so z. B.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{(a-x)\cos y-y\sin y}{(a-x)^2+y^2}\,e^{-x}\,dx\,dy=$$

$$-\int_{-a}^\infty\int_0^\infty e^{-a}.\frac{t\cos y+y\sin y}{t^2+y^2}\,e^{-t}\,dt\,dy=-\frac{\pi}{2}e^{-a},$$

was unmittelbar evident ist, ausserdem aber

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{y\cos y+(a-x)\sin y}{(a-x)^2+y^2}\,e^{-x}\,dx\,dy=$$

$$e^{-a}\int_{-a}^\infty\int_0^\infty\frac{y\cos y-t\sin y}{t^2+y^2}\,e^{-t}\,dt\,dy=a\int_0^\infty\frac{e^{-z}}{a^2-z^2}\,dz \qquad 27)$$

$$=\tfrac{1}{2}\{e^{-a}li(e^{+a})-e^{+a}li(e^{-a})\} = e^{-a}\int_0^a\int_0^\infty \frac{y\cos y+t\sin y}{t^2+y^2}e^t\,dt\,dy;$$

indessen haben alle diese Integralformeln nur mehr ein secundäres Interesse.

Die letzte Integralformel ist übrigens der folgenden, wie bereits bemerkt, analog:

$$e^{-b^2}\int_0^\infty\int_0^b \frac{(x^2-y^2)\sin 2xy-2xy\cos 2xy}{x^2+y^2}e^{-x^2+y^2}\,dx\,dy=$$

$$e^{-b^2}\int_0^\infty\int_0^b \left\{x\frac{x\sin 2xy-y\cos 2xy}{x^2+y^2}-y\frac{y\sin 2xy+x\cos 2xy}{x^2+y^2}\right\}\times$$

$$e^{-x^2+y^2}\,dx\,dy=$$

$$\frac{1}{8}\{e^{-b^2}li(e^{+b^2})+e^{+b^2}li(e^{-b^2})\}-\frac{\varphi(b)}{4},$$

$$\int_0^\infty \varphi(b)db=\pi\int_0^\infty (e^{-3x^2}-e^{-4x^2})\,dx.$$

Beachtet man die Beziehungen

$$\int_0^\infty \frac{e^{+b^2}li(e^{-b^2})}{2}\,db=-\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{ze^{-z^2}}{b^2+z^2}\,dz\,db=$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{z\cos bz+b\sin bz}{b^2+z^2}\,dz\,db=-\frac{\pi\sqrt{\pi}}{4},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-b^2}li(e^{+b^2})}{2}\,db=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{2}\,\frac{x\cos bx-b\sin bx}{b^2+x^2}\,dx\,db=$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{b\sin 2bx-x\cos 2bx}{b^2+x^2}e^{-x^2}dx\,db=0,$$

so erhält man

$$4\int_0^\infty\int_0^b\int_0^\infty \frac{(x^2-y^2)\sin 2xy - 2xy\cos 2xy}{x^2+y^2} e^{-x^2+y^2-b^2} dx dy db = -\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}}.$$

Alle diese Integrationen sind erlaubt, da sämmtliche discontinuirliche Integrale dem Sinne der Theorie gemäss durch ihre Hauptwerthe zu ersetzen sind; sie finden dann z. B. auch durch die folgende Congruenz eine weitere Bekräftigung:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-b^2} li(e^{+b^2})}{2} db = \int_0^\infty \left\{C + 2lb + \frac{b^2}{1.1!} + \frac{b^4}{2.2!} + \frac{b^6}{3.3!} + \dots\right\} \frac{e^{-b^2}}{2} db$$

$$= \int_0^\infty db \int_0^\infty \frac{ze^{-z^2}}{b^2-z^2} dz = 0.$$

Während der den letzten Ausführungen zu Grunde gelegte Integrationsweg eines Kreisquadranten mit unendlich grossem Radius zur Werthbestimmung von Doppelintegralen nach den Gleichungen 17) wenig verwendbar ist, bietet sich für diese Lücke insofern wieder ein Ersatz, dass die meisten der auf die bezeichnete Weise ermittelten, im Vorhergehenden enthaltenen einfachen Integralformeln nach der in denselbsn vorkommenden Constante noch einmal integrirt werden können. Es wird dies zum Theil ermöglicht durch die folgende, leicht beweisbare Relation

$$\int_0^\infty \{e^{-x} li(e^{+x}) + e^{+x} li(e^{-x})\} dx = 0, \qquad 28)$$

zu deren Kenntniss man sehr leicht durch die Benützung der Definitionen

$$\int_0^\infty e^{-x} li(e^{+x}) dx =$$

$$\int_0^\infty \left\{C + lx + \frac{1}{1}\cdot\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} + \dots\right\} e^{-x} dx,$$

$$-\int_0^\infty e^{+x} li(e^{-x}) dx = \int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{x+z} dz = \int_0^\infty dx \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t} dt$$

gelangt. Die Integralformeln 26 a) liefern jetzt die Doppelintegrale

$$\int_0^\infty db \int_0^\infty \frac{b^2 z \sin z - z^3 \cos z}{b^4 + z^4} e^{-z} dz = 0,$$

$$\int_0^\infty db \int_0^\infty \frac{b^2 z \cos z + z^3 \sin z}{b^4 + z^4} e^{-z} dz = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^\infty db \int_0^\infty \frac{b^3 z \cos z + z^3 b \sin z}{b^4 + z^4} e^{-z} dz = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^\infty db \int_{(0)}^{(\infty)} \left\{ \frac{b^2 \cos z + z^2 \sin z}{b^4 + z^4} + \frac{z^2 \cos z - b^2 \sin z}{b^4 + z^4} \right\} e^{-z} dz$$

$$= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(C + \frac{1}{2} l2 \right) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \,.\, 0{\cdot}9237892 \ldots,$$

$$\int_0^\infty db \int_0^\infty \left\{ \frac{b^3 \cos z + z^2 b \sin z}{b^4 + z^4} + \frac{z^2 b \cos z - b^3 \sin z}{{}^4 b + z^4} \right\} e^{-z} dz = \frac{\pi}{2},$$

zu denen die folgenden aus den Gleichungen 26) b) zu gewinnenden treten

$$\int_0^\infty \int_{(0)}^{(\infty)} \frac{b^2 \cos z - z^2 \sin z}{b^4 + z^4} e^{-z} dz\, db =$$

$$\int_0^\infty \int_{(0)}^{(\infty)} \frac{z^2 \cos z + b^2 \sin z}{b^4 + z^4} e^{-z} dz\, db = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(C + \frac{1}{2} l2 \right)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{b^2 z \sin z + z^3 \cos z}{b^4 + z^4} e^{-z} dz\, db = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{b^2 z \cos z - z^3 \sin z}{b^4 + z^4} e^{-z} dz\, db = 0,$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left\{ \frac{b^3 \cos z - z^2 b \sin z}{b^4 + z^4} e^{-z} dz\, db - \right.$$

$$\left. \frac{b^3 z \sin z + z^3 b \cos z}{b^4 + z^4} e^{-z} dz\, db \right\} = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left\{ \frac{z^2 b \cos z + b^3 \sin z}{b^4 + z^4} e^{-z} dz\, db - \right.$$

$$\left. \frac{b^3 z \sin z + z^3 b \cos z}{b^4 + z^4} e^{-z} dz\, db \right\} = \frac{1}{2}.$$

Durch umgekehrte Integration erhält man nun wieder rückwärts schliessend die Formeln (siehe Anhang 3 und 5).

$$\int_0^\infty lz\, e^{-z} \cos z dz = \frac{1}{2}\left(-C - \frac{1}{2} l2\right) - \frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^\infty lz\, e^{-z} \sin z dz = \frac{1}{2}\left(-C - \frac{1}{2} l2\right) + \frac{\pi}{8},$$

$$\int_0^\infty z lz\, e^{-z} \sin z dz = \frac{1}{2}\left(1 - C - \frac{1}{2} l2\right),$$

$$\int_0^\infty z lz\, e^{-z} \cos z dz = \frac{\pi}{8}, \int_0^\infty \frac{\sin z\, e^{-z}}{z} dz = \frac{\pi}{4},$$

sowie den Hauptwerth

$$\frac{1}{2}l2+\int_{(0)}^{(\infty)}\frac{\cos z\, e^{-z}}{z}dz=-C=\int_{(0)}^{(\infty)}\frac{e^{-z}}{z}dz=\int_{(0)}^{(\infty)}\frac{\cos z}{z}dz.$$

Anhang.

1.

Nach dem Satze, welcher in einer Gleichung die Sonderung des reellen und imaginären Theiles gestattet, ergibt sich aus

$$a+ib+i_1'c+ii_1'd=0,\quad i_1'=\frac{1+i}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

zunächst zur Bestimmung der vier Grössen a, b, c und d nur die Doppelgleichung

$$a+\frac{c-d}{\sqrt{2}}=0,\quad b+\frac{c+d}{\sqrt{2}}=0. \tag{2}$$

Dagegen lassen sich z. B. jene Ausdrücke bereits isoliren, wenn vorkommenden Falles in der Gleichung 1) auch die Einführung von $i_2'=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ statthaft ist, denn dann ist nach demselben Satze wie früher auch

$$a+\frac{c+d}{\sqrt{2}}=0,\quad b-\frac{c-d}{\sqrt{2}}=0 \tag{3}$$

und aus der Verbindung der Gleichungen 2) und 3) erhält man jetzt die Werthe der einzelnen reellen Ausdrücke a, b, c, d; man erfährt, dass die Gleichung 1) neben 2) nur durch den gemeinschaftlichen Nullwerth dieser Ausdrücke befriedigt werden kann.

Es entsteht hieraus von selbst die Frage nach der Summe der eventuellen Fälle, in welchen die Annahme

$$a=b=c=d=0 \tag{4}$$

geboten ist. Das Natürlichste ist, von den Gleichungen 2) und 3) auszugehen und die Ergänzungen derselben aufzusuchen; man bemerkt bald, dass die verschiedenen Wege zur Annahme 4) zu gelangen, sich zur vierfachen Gleichung vereinigen lassen

$$a+\frac{c+d}{\sqrt{2}}=a+\frac{c-d}{\sqrt{2}}=a-\frac{c+d}{\sqrt{2}}=a-\frac{c-d}{\sqrt{2}}=0 \tag{5}$$

womit der Reihe nach die Gleichungen

$$b-\frac{c-d}{\sqrt{2}}=b+\frac{c+d}{\sqrt{2}}=b+\frac{c-d}{\sqrt{2}}=b-\frac{c+d}{\sqrt{2}}=0 \tag{6}$$

coincidiren. Um von diesem System den Rückschluss auf die zugehörigen Formeln nach dem Schema 1) zu bewerkstelligen, hat man jetzt nur jeden einzelnen Theil der Gleichung 6) mit i zu multipliciren und mit dem unmittelbar oberhalb desselben befindlichen Theil der Gleichung 5) durch Subtraction oder Addition zu verbinden; es liefert dies zufolge den Definitionen von i''_1 und i'_2 folgende sechs Bedingungen, deren jede zu der Annahme 4) führt:

$$a+ib+i'_1c+ii'_1d=a-ib+i''_1c-ii'_1d=$$
$$a-ib-i'_1c+ii''_1d=a+ib-i''_1c-ii''_1d=0,$$

$$a-ib+i''_1c-ii''_1d=$$
$$a-ib-i''_1c+ii''_1d=a+ib-i''_1c-ii''_1d=0,$$
$$a-ib-i''_1c+ii''_1d=a+ib-i''_1c-ii''_1d=0;$$

$$a-ib+i''_2c-ii''_2d=a+ib+i''_2c+ii''_2d=$$
$$a+ib-i''_2c-ii''_2d=a-ib-i''_2c+ii''_2d=0,$$

$$a+ib+i''_2c+ii''_2d=$$
$$a+ib-i''_2c-ii''_2d=a-ib-i''_2c+ii''_2d=0,$$
$$a+ib-i''_2c-ii''_2d=a-ib-i''_2c+ii''_2d=0.$$

2.

Um in dem Schema

$$F(x+iy+i'z+ii't)=f(x,y,z,t)+if_1+i'f_2+ii'f_3, \tag{0}$$

das der Gleichung

$$F(x+iy)=\Phi(x,y)+i\Psi(x,y) \tag{1}$$

nachgebildet ist, die Functionen f, f_1, f_2, f_3 zu bestimmen, hat man zunächst gemäss 1)

$$F(x+iy+i''_1 z+ii''_1 t)=F\left\{\left(x+\frac{z-t}{\sqrt{2}}\right)+i\left(y+\frac{z+t}{\sqrt{2}}\right)\right\} \tag{2}$$

$$=\Phi(a,c)+i\Psi(a,c),$$

$$F(x+iy+i''_2 z+ii''_2 t)=F\left\{\left(x+\frac{z+t}{\sqrt{2}}\right)+i\left(y-\frac{z-t}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$=\Phi(b,d)+i\Psi(b,d),$$

wobei

$$a=x+\frac{z-t}{\sqrt{2}},\ b=x+\frac{z+t}{\sqrt{2}};$$

$$c=y+\frac{z+t}{\sqrt{2}},\ d=y-\frac{z-t}{\sqrt{2}}$$

zur Abkürzung gesetzt ist. Den zwei demgemäss zur Ermittlung von f, f_1, f_2, f_3 vorliegenden Gleichungen müssen zwei andere willkürlich zu wählende zur Seite gestellt werden. Der einfachste Gedanke nun ist hier derjenige, bezüglich der Formel 0) auch die negativen vierten Wurzeln aus —1 oder

$$-i''_1=-\frac{1+i}{\sqrt{2}},\ -i''_2=-\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

als statthaft anzusehen; d. h.

$$F(x+iy-i'z-ii't)=f(x,y,z,t)+if_1-i'f_2-ii'f_3$$

anzunehmen. In den Ausdrücken Φ und Ψ gehen dadurch die Argumente a, b, c und d in

$$a' = x - \frac{z-t}{\sqrt{2}},\quad b' = x - \frac{z+t}{\sqrt{2}};$$

$$c' = y - \frac{z+t}{\sqrt{2}},\quad d' = y + \frac{z-t}{\sqrt{2}}$$

über und aus der additiven und subtractiven Verbindung der jetzigen modificirten mit den Gleichungen 2) resultiren die Definitionen von f, f_1 etc., je nachdem

$$i' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \text{oder} \quad i' = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

ist, nach folgenden Formeln

a) $i' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$$2f = \Phi(a, c) + \Phi(a', c'),$$

$$2f_1 = \Psi(a, c) + \Psi(a', c');$$

$$2\sqrt{2}f_2 = \Phi(a, c) - \Phi(a', c') + \Psi(a, c) - \Psi(a', c'),$$

$$2\sqrt{2}f_3 = -\Phi(a, c) + \Phi(a', c') + \Psi(a, c) - \Psi(a', c');$$

b) $i' = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$$2f = \Phi(b, d) + \Phi(b', d'),$$

$$2f_1 = \Psi(b, d) + \Psi(b', d');$$

$$2\sqrt{2}f_2 = \Phi(b, d) - \Phi(b', d') - \Psi(b, d) + \Psi(b', d'),$$

$$2\sqrt{2}f_3 = \Phi(b, d) - \Phi(b', d') + \Psi(b, d) - \Psi(b', d').$$

Wie eine Vergleichung der Ausdrücke b und d mit a und c, resp. b' und d' mit a' und c' zeigt, gehen die Formeln b) aus den Formeln a) einfach durch Substitution von t für z, $-z$ für t und

entsprechend ii_2' für i_1', $-i_2'$ für ii_1' hervor. Nachstehend die Berechnungen der Gleichung 0) für die zumeist verwendeten Functionen $\frac{1}{z}$, e^z und lz.

A.

$$\frac{1}{x+iy+i_1'z+ii_1't}=$$

$$\frac{x(x^2+y^2)-y(z^2-t^2)+2xzt}{(x^2+y^2)^2+(z^2+t^2)^2-4xy(z^2-t^2)+4zt(x^2-y^2)}$$

$$+i\,\frac{x(z^2-t^2)-y(x^2+y^2)+2yzt}{(x^2+y^2)^2+(z^2+t^2)^2-4xy(z^2-t^2)+4zt(x^2-y^2)}$$

$$+i_1'\,\frac{-z(x^2-y^2)-t(z^2+t^2)-2xyt}{(x^2+y^2)^2+(z^2+t^2)^2-4xy(z^2-t^2)+4zt(x^2-y^2)}$$

$$+ii_1'\,\frac{-t(x^2-y^2)-z(z^2+t^2)+2xyz}{(x^2+y^2)^2+(z^2+t^2)^2-4xy(z^2-t^2)+4zt(x^2-y^2)}$$

B.

$$2e^{x+iy+i_1'z+ii_1't}=$$

$$e^{x+\frac{z-t}{\sqrt{2}}}\cos\left(y+\frac{z+t}{\sqrt{2}}\right)+e^{x-\frac{z-t}{\sqrt{2}}}\cos\left(y-\frac{z+t}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+i\left\{e^{x+\frac{z-t}{\sqrt{2}}}\sin\left(y+\frac{z+t}{\sqrt{2}}\right)+e^{x-\frac{z-t}{\sqrt{2}}}\sin\left(y-\frac{z+t}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$+i_1'\left\{e^{x+\frac{z-t}{\sqrt{2}}}\cos\left(y+\frac{z+t}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)-e^{x-\frac{z-t}{\sqrt{2}}}\cos\left(y-\frac{z+t}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$+ii_1'\left\{e^{x+\frac{z-t}{\sqrt{2}}}\sin\left(y+\frac{z+t}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)-e^{x-\frac{z-t}{\sqrt{2}}}\sin\left(y-\frac{z+t}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

C.

$$2l(x+iy+i_1'z+ii_1t)=$$

$$\frac{1}{2}l\{(x^2+y^2)^2+(z^2+t^2)^2-4xy(z^2-t^2)+4zt(x^2-y^2)\}$$

$$+i\left\{arctan\frac{2xy-z^2+t^2}{2zt+x^2-y^2}+p\pi\right\}$$

$$+\frac{i_1'}{\sqrt{2}}\left[l\frac{x^2+z^2+y^2+t^2+\sqrt{2}x(z-t)+\sqrt{2}y(z+t)}{x^2+z^2+y^2+t^2-\sqrt{2}x(z-t)-\sqrt{2}y(z+t)}\right.$$

$$\left.+arctan\sqrt{2}\frac{x(z+t)-y(z-t)}{(x^2+y^2)-(z^2+t^2)}+q\pi\right]$$

$$+\frac{ii_1'}{\sqrt{2}}\left[l\frac{x^2+z^2+y^2+t^2-\sqrt{2}x(z-t)-\sqrt{2}y(z+t)}{x^2+z^2+y^2+t^2+\sqrt{2}x(z-t)+\sqrt{2}y(z+t)}\right.$$

$$\left.+arctan\sqrt{2}\frac{x(z+t)-y(z-t)}{(x^2+y^2)-(z^2+t^2)}+q\pi\right],$$

a) $2zt+x^2>y^2$

1) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{2}x+z>t,\ \sqrt{2}x+t>z\\ \sqrt{2}x+z<t,\ \sqrt{2}x+t<z\end{array}\right\}p=\begin{array}{c}\pm 4k\\ \pm(4k+2)\end{array}\Big\}q=0,$

2) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{2}x+z>t,\ \sqrt{2}x+t<z\\ \sqrt{2}x+z<t,\ \sqrt{2}x+t>z\end{array}\right\}p=\pm(4k+1)\Big\}q=\begin{array}{c}\mp 1\\ \pm 1\end{array};$

b) $2zt+x^2<y^2$

1) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{2}x+z>t,\ \sqrt{2}x+t>z\\ \sqrt{2}x+z<t,\ \sqrt{2}x+t<z\end{array}\right\}p=\begin{array}{c}1\pm 4k\\ 1\pm(4k+2)\end{array}\Big\}q=0,$

2) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{2}x+z>t,\ \sqrt{2}x+t<z\\ \sqrt{2}x+z<t,\ \sqrt{2}x+t>z\end{array}\right\}p=1\pm(4k+1)\Big\}q=\begin{array}{c}\mp 1\\ \pm 1\end{array}.$

3.

Die Untersuchungen über Integrale asynektischer Functionen werden zurückgeführt auf die Betrachtung eines einzigen Integrationsortes, der durch die Gleichung bestimmt ist

$$f = Lim\,\{r(\cos\vartheta + \sin\vartheta)\},\quad Lim\, r = 0;$$

die allgemeine Formel der Integration lautet dann

$$\int_{(0_n)} F(z)dz = 2i\pi(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n),$$

wo der Grenzwerth $\lambda_p = Lim\,[\delta F(\zeta_p + \delta)]$ für $Lim\,\delta = 0$ von ϑ unabhängig ist, der Index (o_n) aber einen Integrationsweg mit n Ausnahmepunkten $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$ andeutet. Man kann sich nun die Aufgabe stellen, Orte wie $f = Lim\,\{r(\cos\vartheta + i'\sin\vartheta)\}$, $f = Lim\,\{r(\cos\vartheta + i''\sin\vartheta)\}$ etc. für $Lim\, r = 0$ zu untersuchen; die analoge Integrationsformel, welche hiebei meistentheils anwendbar ist, lautet sofort

$$\int_{(0_n)} F(z)dz = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)\int_0^{2\pi} \frac{-\sin\vartheta + i'\cos\vartheta}{\cos\vartheta + i'\sin\vartheta}\,d\vartheta; \qquad \dagger)$$

und zwar ist hierin

$$\lambda_p = Lim\,\{r(\cos\vartheta + i'\sin\vartheta)\,F(\zeta_p + r(\cos\vartheta + i'\sin\vartheta)\}$$

und von ϑ unabhängig — statt i' ist im gegebenen Falle i'' etc. einzuführen. Hier möge von der Beschaffenheit des Integrationsweges linker Hand in †) abstrahirt und nur der Auswerthung des rechts stehenden Inregrales und zwar des allgemeineren Integrales

$$\int_0^{\frac{k\pi}{2}} \frac{-\sin\vartheta + (\cos\tau \pm i\sin\tau)\cos\vartheta}{\cos\vartheta + (\cos\tau \pm i\sin\tau)\sin\vartheta}\,d\vartheta$$

unter k eine positive ganze Zahl verstanden, mit einigen Worten gedacht werden.

Zertheilt man auf die gewöhnliche Art die complexe Function unter dem Integralzeichen in einen reellen und imaginären Theil, so erhält unser Integral I die Gestalt

$$I=\int_0^{\frac{k\pi}{2}}\frac{(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta)\cos\tau}{\cos^2\vartheta+2\cos\tau\sin\vartheta\cos\vartheta+\sin^2\vartheta}d\vartheta$$

$$\pm i\int_0^{\frac{k\pi}{2}}\frac{(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta)\sin\tau}{\cos^2\vartheta+2\cos\tau\sin\vartheta\cos\vartheta+\sin^2\vartheta}d\vartheta$$

Der reelle Theil desselben oder

$$\int_0^{\frac{k\pi}{2}}\frac{\cos 2\vartheta\sin\tau}{1+\cos\tau\sin 2\vartheta}d\vartheta$$

gibt integrirt den Logarithmus des Ausdruckes $1+\cos\tau\sin 2\vartheta$ und reducirt sich zwischen den Grenzen o und $\frac{k\pi}{2}$ genommen auf 0; der imaginäre Theil lässt sich in der Form schreiben

$$\pm i\int_0^{\frac{k\pi}{2}}\frac{(1+tan^2\vartheta)\sin\tau}{1+2\cos\tau\, tan\,\vartheta+tan^2\vartheta}d\vartheta;$$

es führt demnach hier die Substitution $tan\,\vartheta=z$ zum Ziele, wobei jedoch zu unterscheiden, ob k gerade oder ungerade. Bei gerader k findet auf die unbestimmte Integralformel

$$\pm i\int_0^{\frac{k\pi}{2}}\frac{(1+tan^2\vartheta)\sin\tau}{1+2\cos\tau\, tan\,\vartheta+tan^2\vartheta}d\vartheta=$$

$$\pm i\Big|_0^{\frac{k\pi}{2}} arc\,tan\left(\frac{2\,tan\,\vartheta+\cos\tau}{\sin\tau}\right)$$

der Satz Anwendung, wonach

$$\Big|_0^{p\pi} arc\,tan(a+b\,tan\,\vartheta) = p\pi$$

bei ganzen p so zu nehmen ist; im Falle ungerader k und zwar speciell für $\frac{k\pi}{2} = p\pi + \frac{\pi}{2}$ ist

$$\pm i \Big|_0^{\frac{k\pi}{2}} arc\,tan(a+b\,tan\,\vartheta) = \pm i \Big\{ \Big|_0^{p\pi} arc\,tan(a+b\,tan\,\vartheta) +$$

$$\Big|_{p\pi}^{p\pi+\frac{\pi}{2}} arc\,tan(a+b\,tan\,\vartheta)\Big\}$$

$$= \pm i \left\{p\pi + \frac{\pi}{2} - arc\,tan\,a\right\}$$

$$= \pm i \{p\pi + arc\,cot\,a\}.$$

Für unser Integral I ergibt sich aus dem bisherigen bei positiver oder negativer Amplitude τ $I = \pm p\pi i$, zwischen o und $p\pi$ genommen, dagegen $I = \pm(p\pi + \tau)i$, wenn der auf $p\pi$ folgende Quadrant mit in die Integration einbezogen wird.

Es ist hier der Ort, dieselbe Frage wenigstens bezüglich der Amplituden $\frac{\pi}{1}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{16}$, etc. inductiv zu lösen, einestheils des Interesses halber, das sich an den Integrationsort $f = tan\,\vartheta$ knüpft, sodann um mit dem gewonnenen Parallelschlusse einige allgemeinere Bemerkungen zu verbinden.

Indem wir jene Amplituden der Einfachheit wegen als positiv voraussetzen, verwandeln wir vor allem das Differential unter dem Integralzeichen oder den Ausdruck

$$\frac{i^{(n)} - tan\,\vartheta}{1 + i^{(n)}\,tan\,\vartheta}\,d\vartheta$$

in eine nach Potenzen von $i^{(n)} = (-1)^{\frac{1}{2^{n+1}}}$ fortschreitende Summe von Gliedern. Für $n = 1$ liefert hiezu die Formel A) der vorigen Nummer

$$\int_0^{p\pi} \frac{i' \tan \vartheta}{1+i' \tan \vartheta} d\vartheta =$$

$$\int_0^{p\pi} \frac{\tan^3 \vartheta - \tan \vartheta - (1+\tan^2 \vartheta)\{i \tan \vartheta - i' - ii' \tan^2 \vartheta\}}{1+\tan^4 \vartheta} d\vartheta,$$

$$\int_0^{p\pi} \frac{i'' - \tan \vartheta}{1+i'' \tan \vartheta} d\vartheta = \int_0^{p\pi} \frac{\tan^7 \vartheta - \tan \vartheta}{1+\tan^8 \vartheta} d\vartheta +$$

$$\int_0^{p\pi} \frac{-i \tan^3 \vartheta - i' \tan^3 \vartheta - ii' \tan^5 \vartheta}{1+\tan^8 \vartheta} (1+\tan^2 \vartheta) d\vartheta$$

$$\frac{+i'' + ii'' \tan^4 \vartheta + i'i'' \tan^2 \vartheta + ii'i'' \tan^6 \vartheta}{1+\tan^8 \vartheta} (1+\tan^2 \vartheta) d\vartheta.$$

Eine ähnliche Sonderung in ein erstes reelles Glied

$$\left(\frac{\tan^{2^n-1} \vartheta - \tan \vartheta}{1+\tan^{2^n} \vartheta}\right)$$

und in ein zweites, welches die übrigen (negativ ungeraden und positiv geraden) Potenzen von $\tan \vartheta$ im Zähler enthält und mit $1+\tan^2 \vartheta$ multiplicirt ist, findet in allen nachfolgenden Fällen statt; das constante Auftreten des Factors $1+\tan^2 \vartheta$ in allen diesen letzteren Gliedern ermöglicht nun aber eine bedeutende Vereinfachung. Schreibt man nämlich für $\tan \vartheta$ einfach z, so läuft die ganze Untersuchung bezüglich des überwiegenden Theiles der Integration hinaus auf die Ermittlung des Integralwerthes der asynektischen Function

$$\frac{z^r}{1+z^{2^n}},$$

allgemeiner gefasst

$$\frac{z^r}{1+z^{2q}}$$

für den eigenthümlichen Integrationsort $z = \tan \vartheta$.

Die Auswerthung des ersten Gliedes

$$\int_0^{p\pi} \frac{\tan^{2n-1}\vartheta - \tan\vartheta}{1+\tan^{2n}\vartheta}\, d\vartheta$$

könnte auf ähnlichem Wege geschehen und würde auf die Function

$$\frac{z^r}{(1+z^{2q})(1+z^2)}$$

führen, welche noch die Ausnahmepunkte $z = \pm i$ mehr besitzt, fällt aber dabei, wie sich bald zeigt, ganz hinweg.

Die Einführung des Integrationsortes $z = \tan\vartheta$ in die Rechnung bietet vorerst die Schwierigkeit, dass er nicht geschlossen ist; zudem muss man ihn, sofern er sich auf eine ganze Peripherie und mehr erstrecken sollte, auf einen doppelten reduciren. Man integrirt nun zunächst von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$ und ersetzt den Sprung $\tan\frac{\pi}{2}$ von $+\infty$ nach $-\infty$ durch den Integralwerth

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^r}{1+z^{2q}}\, dz\,;$$

sodann von $\vartheta = \pi$ bis $\vartheta = 2\pi$ etc. mit der nämlichen Einschaltung. Der erstere (analytische) Contour entspricht der Wirkung nach dem Contour $Lim\{r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\}$, $r = o$ von $\vartheta = o$ bis $\vartheta = 2\pi$, wobei blos die Ausnahmepunkte mit positivem imaginären Theile in Betracht kommen, weil diese allein im ersten und zweiten Quadranten liegen; der letztere Contour von π bis 2π (sammt seiner Einschaltung) entspricht dem nämlichen Integrationsort für o bis 2π mit Rücksicht auf die übrigen negativ imaginären Ausnahmepunkte; der letztere ist aber, gemäss der entgegengesetzten Richtung, welche er einschlägt, mit negativem Zeichen zu versehen. Nach bekannten Auseinandersetzungen ist nun

$$\int_{z_0=0}^{z_1=\tan p\pi} \frac{z^r}{1+z^{2q}}\, dz = p\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^r}{1+z^{2q}}\, dz.$$

Indem wir die Differentiale

$$\frac{z^r}{1-z^{2q}}\,dz,\quad \frac{z^r}{1+z^{2q+1}}\,dz \text{ und } \frac{z^r}{1-z^{2q+1}}\,dz$$

der gleichen Integration auf die nämliche Weise unterziehen, erhalten wir nach den gewöhnlichen Formeln

$$\int_{z_0=0}^{z_1=\tan p\pi} \frac{z^{2r}}{1+z^{2q}}\,dz = \frac{p\pi}{q}\csc\frac{(2r+1)\pi}{2q},$$

$$\int_{z_0=0}^{z_1=\tan p\pi} \frac{z^{2r}}{1-z^{2q}}\,dz = \frac{p\pi}{q}\cot\frac{(2r+1)\pi}{2q},$$

$$\int_{z_1=0}^{z_1=\tan p\pi} \frac{z^{2r-1}}{1+z^{2q}}\,dz = \int_{z_0=0}^{z_1=\tan p\pi} \frac{z^{2r-1}}{1+z^{2q}}\,dz = 0\,;$$

$$\int_{z_0=0}^{z_1=\tan p\pi} \frac{z^{2r}}{1+z^{2q+1}}\,dz = \frac{p\pi}{2q+1}\cot\frac{(2r+1)\pi}{2(2q+1)},$$

$$\int_{z_0=0}^{z_1=\tan p\pi} \frac{z^{2r-1}}{1+z^{2q+1}}\,dz = \frac{p\pi}{2q+1}\tan\frac{r\pi}{2q+1},$$

$$\int_{z_0=0}^{z_1=\tan p\pi} \frac{z^{2r}}{1-z^{2q+1}}\,dz = \frac{p\pi}{2q+1}\cot\frac{(2r+1)\pi}{2(2q+1)},$$

$$\int_{z_0=0}^{z_1=\tan p\pi} \frac{z^{2r-1}}{1-z^{2q+1}}\,dz = -\frac{p\pi}{2q+1}\tan\frac{r\pi}{2q+1}$$

Die Potenz des Zählers der Differentiale muss hiebei um zwei Grade niedriger sein, als die des betreffenden Nenners. Zur Vollständigkeit des vorstehenden Systemes gehört noch die Angabe des Werthes der Integration längs eines Quadranten:

der Fall erledigt sich hier nach den bekannten für ganze positive q und $r<q+1$ geltenden Formeln [1].

$$\int_0^\infty \frac{z^r}{1+z^q}\,dz=\frac{\pi}{q}\csc\frac{(r+1)\pi}{q},\quad \int_0^\infty \frac{z^r}{1-z^q}\,dz=\frac{\pi}{q}\cot\frac{(r+1)\pi}{q}.$$

Kehren wir nunmehr zu den Integralen I zurück, so haben wir

$$\int_0^{p\pi}\frac{i'-\tan\vartheta}{1+i'\tan\vartheta}\,d\vartheta=\int_0^{p\pi}\frac{\tan^3\vartheta-\tan\vartheta}{1+\tan^4\vartheta}\,d\vartheta$$

$$+\left\{i'\frac{p\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}}+ii'\frac{p\pi}{2\sin\frac{3\pi}{4}}=i'\frac{1+i}{\sqrt{2}}p\pi=ip\pi\right\},$$

$$\int_0^{p\pi}\frac{i''-\tan\vartheta}{1+i''\tan\vartheta}\,d\vartheta=\int_0^{p\pi}\frac{\tan^7\vartheta-\tan\vartheta}{1+\tan^8\vartheta}\,d\vartheta$$

$$+\left\{i''\frac{p\pi}{4\sin\frac{\pi}{8}}+ii''\frac{p\pi}{4\sin\frac{5\pi}{4}}+i'i''\frac{p\pi}{4\sin\frac{3\pi}{8}}+ii'i''\frac{p\pi}{4\sin\frac{7\pi}{8}}=ip\pi\right\};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{i'-\tan\vartheta}{1+i'\tan\vartheta}\,d\vartheta=\frac{\pi}{4}i+\int_0^\infty\frac{\tan^3\vartheta-\tan\vartheta}{1+\tan^4\vartheta}\,d\vartheta,$$

---

[1] Der Zusammenhang der unbestimmten Integrationen rationaler gebrochener Functionen von der Form $\frac{z^r}{1\pm z^q}$ mit den Wurzeln der Gleichung $1\pm z^{4m}=0$ erhellt aus den folgenden Formeln

$$\int\frac{z^{2r}}{1\pm z^{4q}}\,dz=\frac{(-1)^r}{4q}\sum\left\{(\zeta_h)^{2r+1}\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{z}{\zeta_h}\right)\right\}_{h=1}^{h=4q},$$

$$\int\frac{z^{2r+1}}{1\pm z^{4q}}\,dz=\frac{(-1)^r}{4q}\sum\left\{(\zeta_h)^{2r+2}\,l\left(1+\left(\frac{z}{\zeta_h}\right)^2\right)\right\}_{h=1}^{h=4q}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{i''-tan\vartheta}{1+i''tan\vartheta} d\vartheta = \frac{\pi}{8} i + \int_0^{\infty} \frac{tan^7\vartheta - tan\vartheta}{1+tan^8\vartheta} d\vartheta \text{ etc.}$$

$$\left(i'' = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

und erhalten somit bereits Kenntniss von dem Nullwerthe des übrigbleibenden Integrales; ja wir schliessen, dass überhaupt

$$\int_0^{\frac{p\pi}{2}} \frac{tan^{4q-1}\vartheta - tan\vartheta}{1+tan^{4q}\vartheta} d\vartheta = p \int_0^{\infty} \frac{z^{4q-1}-z}{(1+z^{4q})(1+z^2)} dz = 0 \qquad \odot)$$

Die Ermittlung des Minuends, sowie des Subtrahends der betreffenden Differenzen ist dabei von derselben Leichtigkeit, wie bei der folgenden früher abgeleiteten Differenz

$$\int_0^{\infty} \frac{1-z^2}{(1+2\cos\tau z+z^2)(1+z^2)} dz = 0;$$

wie bezüglich dieser letzteren sofort aus der Verbindung derselben mit der correlativen Formel

$$\int_0^{\infty} \frac{1+z^2}{(1+2\cos\tau z+z^2)(1+z^2)} dz = \frac{\pi}{2\sin\tau}$$

der Doppelwerth hervorgeht

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+2\cos\tau z+z^2)(1+z^2)} = \int_0^{\infty} \frac{z^2 dz}{(1+2\cos\tau z+z^2)(1+z^2)} = \frac{\pi}{4\sin\tau};$$

so leitet man analog aus der Verbindung der bekannten Werthe

$$\int_0^{\infty} \frac{z(z^2+1)}{(1+z^4)(1+z^2)} dz = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^\infty \frac{z(1-z^2+z^4)(1+z^2)}{(1+z^8)(1+z^2)}dz = \int_0^\infty \frac{z(1+z^6)}{(1+z^8)(1+z^2)}dz = \frac{\pi}{8}(\sqrt{2}-1),$$

$$\int_0^\infty \frac{z(z^8-z^6+z^4-z^2+1)(z^2+1)}{(1+z^{12})(1+z^2)}dz = \int_0^\infty \frac{z(1+z^{10})}{(1+z^{12})(1+z^2)}dz =$$

$$\pi\frac{5\sqrt{3}-4}{12\sqrt{3}}, \text{ etc.}$$

mit den Gleichungen ⊙) die Folgerung ab, dass der Reihe nach

$$\int_0^\infty \frac{z}{(1+z^4)(1+z^2)}dz = \int_0^\infty \frac{z^3}{(1+z^4)(1+z^2)}dz = \frac{\pi}{8},$$

$$\int_0^\infty \frac{z}{(1+z^8)(1+z^2)}dz = \int_0^\infty \frac{z^7}{(1+z^8)(1+z^2)}dz = \frac{\pi}{16}(\sqrt{2}-1); \quad \text{etc.}$$

endlich allgemein

$$\int_0^\infty \frac{z}{(1+z^{4q})(1+z^2)}dz = \int_0^\infty \frac{z^{4q-1}}{(1+z^{4q})(1+z^2)}dz =$$

$$\frac{\pi}{8q}\sum\left\{(-1)^{r+1}csc\frac{r\pi}{2q}\right\}_{r=1}^{r=2q-1}.$$

Es ist dies die nächste Nutzanwendung, die aus solchen inductiven Schlüssen gezogen werden kann; eine weitere besteht z. B. darin, die Differentiale mit i''

$$\left(\frac{i''-tan\,\vartheta}{1+i''tan\,\vartheta}d\vartheta\right),$$

ferner mit

$$i'''=\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16} \quad \text{etc.} \ldots$$

so zu transformiren, dass i'', i'''... in Function von i' und ii' ausgedrückt und danach jene Differentiale nach Potenzen von i' und ii' entwickelt werden, wodurch Integralformeln mit der 6. Potenz von $z = tan\,\vartheta$ im Nenner gewonnen werden. Von der Betrachtung der Integration

$$\int_0^{\frac{p\pi}{2}} \frac{\zeta_k - tan\vartheta}{1+\zeta_k tan\vartheta}\,d\vartheta, \quad \zeta_k = \cos k + i \sin k$$

lässt sich der Übergang bewerkstelligen zu den ähnlichen Beispielen

$$\int_0^{\frac{p\pi}{2}} \frac{\zeta_k - tan\,\vartheta}{1-\zeta_k tan\,\vartheta}\,d\vartheta, \quad \int_0^{\frac{p\pi}{2}} \frac{\zeta_k + tan\,\vartheta}{1+\zeta_k tan\,\vartheta}\,d\vartheta, \quad \int_0^{\frac{p\pi}{2}} \frac{\zeta_k + tan\,\vartheta}{1-\zeta_k tan\,\vartheta}\,d\vartheta, \text{ etc.,}$$

die auf dem nämlichen Wege blosser Transformation zu neuen Resultaten führen müssen. Es genüge hier, angedeutet zu haben, wie man inductiv zur Kenntniss der allgemeinen Integralformel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = \pi \sum \frac{b - Aa}{\sqrt{B^2 - A^2}},$$

$$F(x) = \sum \frac{ax+b}{x^2+2Ax+B}$$

für den Fall blos complexer Wurzeln der einzelnen Gleichungen $x^2+2Ax+B=0$ gelangen, oder wenigstens specielle Fälle derselben schneller erledigen kann, als es mit Hilfe dieser complicirten Formel möglich wäre.

4.

Den Gegenstand des vorliegenden Absatzes bildet die Anwendung eines Satzes aus der Theorie der Fourier'schen Doppelintegrale auf die Lehre von der Integration längs geschlossener Curven oder blosser Theile derselben. In den Grundformeln für die Fourier'schen Integrale, nämlich

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu du \int_a^b \cos ut f(t) dt, \quad a < x < b$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin xu du \int_a^b \sin ut f(t) dt, \quad a < x < b$$

substituiren wir für die Function $f(x)$ das Product zweier Functionen $\varphi(x) . \psi(x)$; dadurch gehen jene Formeln in die folgenden über

$$\varphi(x).\psi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \cos, \sin xu \int_a^b \cos, \sin ut \varphi(t) \;.\; \psi(t) dt,$$

welche wir nunmehr mit dx multipliciren und von a bis b integriren. Die neue Gleichung

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \int_a^b \cos, \sin ux\, dx \int_a^b \cos, \sin ut \varphi(t)\psi(t) dt$$

besitzt eine merkwürdige Eigenschaft; sie erlaubt nämlich, wie man sich leicht überzeugt, in einer der Functionen φ oder ψ rechter Hand x statt t einzuführen und statt nach t nach x zu integriren — man kann also auch

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \int_a^b \cos, \sin ux \varphi(x) dx \int_a^b \cos, \sin ut \psi(t) dt$$

oder besser

$$\int_a^b \varphi(z)\psi(z)dz = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \int_a^b \cos, \sin ux \varphi(x) dx \int_a^b \cos, \sin uy \psi(y) dy, \quad \text{A)}$$

setzen. Denn, schreibt man die rechte Seite der vorstehenden Formel in der folgenden geänderten Weise

$$\int_0^\infty du \int_a^b \varphi(x) \int_a^b \cos, \sin xu \cos, \sin uy\psi(y) dx dy =$$

$$\int_a^b \varphi(x) \int_0^\infty \cos, \sin xu\, du \int_a^b \cos, \sin uy\psi(y) dy dx\,,$$

so vereinigt sich das Integral

$$\int_0^\infty \cos, \sin xu du \int_a^b \cos, \sin uy\psi(y) dy$$

zur Function $\frac{\pi}{2}\psi(x)$ und man hat identisch

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx = \int_a^b \varphi(z)\psi(z) dz.$$

Ein paar allgemeinere Substitutionen in A) sind die folgenden

1) $\varphi(x) = \psi(x)$

$$\int_a^b [\varphi(z)^2] dz = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \,[\int_a^b \cos, \sin ux\varphi(x) dx]^2, \qquad \text{Aa)}$$

2) $\varphi(x) = \frac{1}{\psi(x)}$

$$b - a = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \int_a^b \cos, \sin ux\varphi(x) dx \int_a^b \cos, \sin uy \frac{1}{\varphi(y)} dy\,,$$

3) $\psi(x) = x$

$$\int_a^b z\varphi(z) dz =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \left\{\frac{a\cos ua - b\cos ub}{u} + \frac{\sin ub - \sin ua}{u^2}\right\} \int_a^b \sin ux\varphi(x) dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty du\cdot\left\{\frac{b\sin bu-a\sin au}{u}+\frac{\cos bu-\cos au}{u^2}\right\}\int_a^b\cos ux\varphi(x)dx,$$

4) $\psi(x)=\sin x,\ \cos x$

$$\int_a^b\sin z\varphi(z)dz=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty du\left\{\frac{u(\sin b\cos bu-\sin a\cos au)}{1-u^2}\right.$$

$$\left.\frac{-\cos b\sin bu-\cos a\sin au}{1-u^2}\right\}\int_a^b\sin ux\varphi(x)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty du\left\{\frac{\cos a\cos au-\cos b\cos bu}{1-u^2}\right.$$

$$\left.\frac{-u(\sin b\sin bu-\sin a\sin au)}{1-u^2}\right\}\int_a^b\cos ux\varphi(x)dx,$$

$$\int_a^b\cos z\varphi(z)dz=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty du\left\{\frac{\sin b\sin bu-\sin a\sin au}{1-u^2}\right.$$

$$\left.\frac{-u(\cos a\cos au-\cos b\cos bu)}{1-u^2}\right\}\int_a^b\sin ux\varphi(x)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty du\left\{\frac{\sin b\cos bu-\sin a\cos au}{1-u^2}\right.$$

$$\left.\frac{-u(\cos b\sin bu-\cos a\sin au)}{1-u^2}\right\}\int_a^b\cos ux\varphi(x)dx.$$

Ähnlich wie in diesen Fällen eine Integration von a bis b, lässt sich irgend eine andere Integrationsbasis (0_n) in die Gleichung 1) substituiren; man hat überhaupt

$$\int_{(0_n)} \varphi(z)\,\psi(z)\,dz = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du \int_{(0_n)} \cos,\sin ux\varphi(x)\,dx \int_{(0_n)} \cos,\sin uy\,\psi(y)\,dy$$

unter den unerlässlichen Bedingungen der Endlichkeit und Stetigkeit der Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ auf der Integrationsbasis (0_n). So liesse sich die Formel für den kreisförmigen Contour

$$\int_{(0_n)} F(z)dz = \int_0^{2\pi} F(r\{\cos\vartheta + i\sin\vartheta\})\,[-r\sin\vartheta + ir\cos\vartheta]d\vartheta$$

für

$$\varphi = F\{r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\},\quad \psi = -r(\sin\vartheta - i\cos\vartheta)$$

verwenden; nimmt man

$$F = \frac{1}{r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)},$$

sodann nach A) a) noch

$$\varphi(z) = \psi(z) = \cos\vartheta \pm i\sin\vartheta,$$

und integrirt von 0 bis ϑ, so erhält man durch Combination der Resultate die nämlichen Integralformeln, die sich aus den früheren Gleichungen für

$$\int_a^b \cos,\sin z\varphi(z)\,dz$$

unter den Voraussetzungen

$$\varphi(z) = \cos,\sin z \quad \text{oder} \quad \varphi(z) = \sin,\cos z$$

ergeben, nämlich

$$\int_0^\infty \left\{\frac{\cos\vartheta\cos\vartheta u - 1 + u\sin\vartheta\sin\vartheta u}{1-u^2}\right\}^2 du$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2\vartheta - \sin 2\vartheta}{2},$$

$$\int_0^\infty \left\{\frac{u(\cos\vartheta\cos\vartheta u - 1) + \sin\vartheta\cos\vartheta u}{1-u^2}\right\}^2 du$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2\vartheta + \sin 2\vartheta}{2};$$

$$\int_0^\infty \left\{\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta u - u\cos\vartheta\sin\vartheta u}{1-u^2}\right\}^2 du$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2\vartheta + \sin 2\vartheta}{2},$$

$$\int_0^\infty \left\{\frac{\cos\vartheta\sin\vartheta u - u\sin\vartheta\cos\vartheta u}{1-u^2}\right\}^2 du$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2\vartheta - \sin 2\vartheta}{2};$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos\vartheta u - \cos\vartheta}{1-u^2}\, du = \frac{\pi}{2}\cdot\sin\vartheta,$$

$$\int_0^\infty \frac{(1+u^2)(\sin 2\vartheta\cos 2\vartheta u - 2\sin\vartheta\cos\vartheta u)}{(1-u^2)^2}\, du$$

$$+ \int_0^\infty \frac{-2u(\cos 2\vartheta\sin 2\vartheta u - 2\cos\vartheta\sin\vartheta u)}{(1-u^2)^2}\, du = 0.$$

Zum Beschlusse mögen hier noch einige Specialisirungen der Gleichung A) a) Platz finden; es betrifft dies die Functionen

$$\varphi(z) = \psi(z) = z^{\mu-1}.e^{-az}$$

und

$$\varphi(z) = \psi(z) = z^{\mu-1}.lze^{-az}, \quad 0 < \mu.$$

1) $\varphi(x) = z^{\mu-1} e^{az}$

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2\left(\mu \, arc\tan \frac{z}{a}\right)}{(a^2+z^2)^\mu} dz = \int_0^\infty \frac{\sin^2\left(\mu \, arc\tan \frac{z}{a}\right)}{(a^2+z^2)^\mu} dz =$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(2\mu-1)(2a)^{2\mu-1}} \cdot \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu).\Gamma(\mu)}.$$

2) $\psi(z) = z^{\mu-1} lze^{-az}$

$$\int_0^\infty \left\{\left(arc\tan\frac{z}{a}\right)^2 + \left(\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu} - \frac{1}{2}\, l\{a^2+z^2\}\right)^2\right\}\frac{dz}{(a^2+z^2)^\mu} =$$

$$\pi \cdot \frac{1}{(2\mu-1)\,(2a)^{\mu-1}} \cdot \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu).\Gamma(\mu)} \cdot \left\{\left(\frac{dl\Gamma\,(2\mu-1)}{d(2\mu-1)} - l2a\right)^2\right.$$

$$\left. + \frac{d^2 l\Gamma\,(2\mu-1)}{d(2\mu-1)^2}\right\} ;$$

$$\int_0^\infty \left\{\left(arc\tan\frac{z}{a}\right)^2 + \frac{1}{4}\, l^2[e^{2C}(a^2+z^2)]\right\}\frac{dz}{a^2+z^2} = \frac{\pi}{2a}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{4} l^2 2ae^{\lambda C}\right).$$

$$\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{l^2(a^2+z^2)}{a^2+z^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(l\sec\vartheta + la)}{a} d\vartheta = \frac{\pi^3}{24a} + \frac{\pi}{2a}(l2a)^2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (l\cos\vartheta)^2 d\vartheta = 2\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5^3} + \dots\right) = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{2}(l2)^2.$$

3) $\varphi(z) = e^{-az}$

$$\int_0^\infty \frac{a^2}{(a^2+z^2)^2} dz = \int_0^\infty \frac{z^2}{(a^2+z^2)^2} dz = \frac{\pi}{4a},$$

4) $\varphi(z) = ze^{-az}$

$$\int_0^{\infty} \frac{(a^2-z^2)^2}{(a^2+z^2)^4} dz = \int_0^{\infty} \frac{4a^2z^2}{(a^2+z^2)^4} dz = \frac{\pi}{8a^3},$$

5) $\varphi(z) = z^2e^{-az}$

$$\int_0^{\infty} \frac{a^2(a^2-3z^2)^2}{(a^2+z^2)^6} dz = \frac{3\pi}{32a^5}, \quad \int_0^{\infty} \frac{z^2(3a^2-z^2)^2}{(a^2+z^2)^6} dz = \frac{3\pi}{32a^5},$$

6) $\varphi(z) = z^{p-1} e^{-az}$

$$\int_0^{\infty} \frac{(a^p-(p)_2 a^{p-2} z^2 + (p)_4 a^{p-4} z^4 - \dots)^2}{(a^2+z^2)^{2p}} dz =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{((p)_1 a^{p-1} z - (p)_3 a^{p-3} z^3 + \dots)^2}{(a^2+z^2)^{2p}} dz$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(2p-1)(2a)^{2p-1}} \cdot \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(p)},$$

$$a^{\mu}-(\mu)_2 a^{\mu-2} z^2 + (\mu)_4 a^{\mu-4} z^4 - \dots = (a^2+z^2)^{\frac{\mu}{2}} \cos\left(\mu \, arc\,tan \frac{z}{a}\right),$$

$$(\mu)_1 a^{\mu-1} z - (\mu)_3 a^{\mu-3} z^3 + \dots = (a^2+z^2)^{\frac{\mu}{2}} \sin\left(\mu \, arc\,tan \frac{z}{a}\right).$$

5.

Es erübrigt hier noch, eine kleine Bemerkung über die in Nr. 3 des Textes vorkommende Hauptwerthsdefinition, wie sie in der Formel auftritt

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_{(0)}^{(\infty)} \frac{\cos x}{x} dx = \int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-x}\cos x}{x} dx + \frac{1}{2} l2 =$$

$$-C = -0{\cdot}5772156649\dots$$

nachzutragen. Eine Relation aus der Lehre von den Gammafunctionen zeigt nämlich, dass diese gegenwärtige Definition von der gewöhnlichen abweicht. Aus der Gleichung

$$\int_0^\infty \left\{ e^{-x} - \frac{x e^{-\mu x}}{1-e^{-x}} \right\} \frac{dx}{x} = \frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu},$$

erhält man für $\mu = 1$

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \right\} dx = -C$$

und hieraus geht sogleich hervor, dass bei der willkürlichen Annahme

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-x}}{x} dx = -C$$

als unbestimmter, unendlich grosser Werth des Integrales die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \textit{ in inf.}$$

vernachlässigt wird. Dieselbe Vernachlässigung findet nun auch bei den übrigen Integralen

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x}\cos x}{x} dx + \frac{1}{2} l2 =$$

statt, deren Gleichwerthigkeit mit

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$$

die Analyse der Integrationswege (Rechteck oder Rhomboid mit unendlich grosser Seite, Kreisquadrant mit unendlich grossem Radius) lehrt.

Es ist daher die Hauptwerthsformel

$$\int_{(0)}^{(\infty)} \frac{e^{-x}}{x} dx = -C$$

identisch mit der folgenden Beziehung

$$\frac{e^{-\delta}}{1} + \frac{e^{-2\delta}}{2} + \frac{e^{-3\delta}}{3} + \dots$$

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) = -C$$

und ebenso würde sich finden

$$Lim\left\{\frac{\cos\delta}{1} + \frac{\cos 2\delta}{2} + \frac{\cos 3\delta}{3} + \dots\right\} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) =$$

$$Lim\left\{\frac{e^{-\delta}\cos\delta}{1} + \frac{e^{-2\delta}\cos 2\delta}{2} + \frac{e^{-3\delta}\cos 3\delta}{3} + \dots\right\} + \frac{1}{2} l2$$

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) = -C.$$

Die Summen der mit *Lim* bezeichneten Reihen lauten gemäss bekannten Formeln

$$\frac{e^{-\delta}}{1} + \frac{e^{-2\delta}}{2} + \frac{e^{-3\delta}}{3} + \dots = -l(1 - e^{-\delta}),$$

$$\frac{\cos\delta}{1} + \frac{\cos 2\delta}{2} + \frac{\cos 3\delta}{3} + \dots = -l(2\sin\tfrac{1}{2}\delta),$$

$$\frac{e^{-\delta}\cos\delta}{1} + \frac{e^{-2\delta}\cos 2\delta}{2} + \frac{e^{-3\delta}\cos 3\delta}{3} + \dots =$$

$$-\frac{1}{2} l(1 - 2e^{-\delta}\cos\delta + e^{-2\delta});$$

man hat daher übereinstimmend

$$\frac{1}{2}l\frac{1-2e^{-\delta}\cos\delta+e^{-2\delta}}{1-2e^{-\delta}+e^{-2\delta}}=\frac{1}{2}l\frac{1-2e^{-\delta}\cos\delta+e^{-2\delta}}{4\sin^2\frac{1}{2}\delta}=\frac{1}{2}l2.$$

Der Integrallogarithmus $li(e^{+x})$, wie er in der bekannten Gleichung definirt wird, ist dagegen selbst ein Hauptwerth von der gewöhnlichen Bedeutung; er ist

$$li(e^{+x})=-\int_{-x}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx,$$

und wird auf ähnliche Art durch Vernachlässigung eines unbestimmten Werthes $0\cdot\infty$ gewonnen wie der Hauptwerth

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\vartheta u}{1-u^2}du=\frac{\pi}{2}\sin\vartheta$$

dessen zugehörige continuirliche Integralformel

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\vartheta u-\cos\vartheta}{1-u^2}du=\frac{\pi}{2}\sin\vartheta$$

lautet; den Nutzen auch dieser Hauptwerthe mag das einfache Beispiel zeigen

$$\int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{2(1-u^2)}+\frac{\cos 2\vartheta u}{2(1-u^2)}-\frac{\cos\vartheta u\cos\vartheta}{1-u^2}\right\}du$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\vartheta u(\cos\vartheta u-\cos\vartheta)}{1-u^2}du=0,$$

welches wieder eine continuirliche Formel ist, und durch subtractive Verbindung zweier früheren Integralformeln leicht erhärtet wird.

Auf die nämliche Weise, wie die sehr speciellen Beispiele

$$\int_0^\infty \frac{\cos \vartheta u - \cos \vartheta}{1-u^2}\, du \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\cos \vartheta u (\cos \vartheta u - \cos \vartheta)}{1-u^2}\, du$$

lässt sich die Integralformel

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{1-u^2}\, du$$

jederzeit ihrem Werthe nach bestimmen, sobald $\varphi(u)$ in endliche oder unendliche Reihen

$$a_0 + a_1 \cos \alpha_1 u + a_2 \cos \alpha_2 u + \ldots$$

$$a_0 + u(a_1 \sin \alpha_1 u + a_2 \sin \alpha_2 u + \ldots)$$

entwickelbar ist, die für $u=1$ verschwinden und von $u=0$ bis $u=\infty$ gelten.

Es möge hier noch eines Mittels zur Gewinnung continuirlicher Integralformeln aus discontinuirlichen gedacht werden, welches sich direct an die entsprechenden Werthe der letzteren wendet. Handelt es sich um eine Integration von der Form

$$\int f(\mu, a, b, c, \ldots u)\, du = \varphi(\mu) . \psi(\mu, a, b, c \ldots)$$

und beachtet man blos rechter Hand die beiden Functionen φ und ψ, so zeigt sich bald der Fall von Interesse, wo $\varphi(\mu)$ für irgend einen Werth μ_1 unendlich gross, dagegen eine beliebige Differenz

$$\varphi(\mu_1, a, b, c \ldots) - \psi(\mu_1, a', b', c' \ldots)$$

unendlich klein wird. Man kann nämlich dann den Grenzfall $0 \cdot \infty$ nach der bekannten Methode bestimmen und hat

$$Lim \{\varphi(\mu) . [\psi(\mu, a, b, c, \ldots - \psi(\mu, a', b', c' \ldots)]\} =$$

$$Lim \left\{ \frac{\psi(\mu, a, b, c, \ldots) - \psi(\mu, a', b', c' \ldots)}{\frac{1}{\varphi(\mu)}} \right\} =$$

$$Lim \left\{ \frac{\psi'_\mu(a, b, c \ldots \mu) - \psi'_\mu(a', b', c' \ldots \mu)}{-\frac{\varphi'_\mu(\mu)}{\varphi(\mu)^2}} \right\}; \; Lim\, \mu = \mu_1.$$

Linker Hand entspricht diesem Vorgange die Integralformel

$$Lim \int [f(a, b, c, \ldots \mu, u) - f(a', b', c' \ldots \mu, u)]\, du,$$

so dass schliesslich die Beziehung aufgestellt werden darf

$$Lim \int [f(a, b, c, \ldots \mu, u) - f(a', b', c' \ldots \mu, u)]\, du =$$

$$Lim \left\{ - \frac{[\psi'_\mu(a, b, c, \ldots \mu) - \psi'_\mu(a', b', c' \ldots \mu)]\, \{\varphi(\mu)\}^2}{\varphi'_\mu(\mu)} \right\}. \qquad 1)$$

Im Folgenden sei stets $\varphi(\mu) = \Gamma(\mu)$, also $Lim\, \mu = 0$. Die Relation 1) verlangt zunächst blos die Kenntniss des Grenzwerthes

$$\frac{d\left(\frac{1}{\Gamma(\mu)}\right)}{d\mu}$$

für $\mu = 0$ oder die Entwicklung von

$$Lim \frac{\Gamma'(\mu)}{\Gamma(\mu)^2}.$$

Aus

$$\Gamma'(\mu) = \Gamma(\mu) \left\{ \int_0^1 \frac{1 - t^{\mu-1}}{1-t}\, dt - C \right\} \quad C = 0{\cdot}5772156649\ldots$$

erhält man

$$Lim\, \Gamma'(\mu)_0 = \Gamma(0) \left\{ - \int_0^1 \frac{1}{t}\, dt - C \right\} = \Gamma(0) \left\{ -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - C \right\};$$

anderseits ist

$$\Gamma(0) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots - C,$$

wonach nunmehr der Grenzwerth $\frac{d\left(\frac{1}{\Gamma(\mu)}\right)_0}{d\mu}$ die folgende Gestalt annimmt

$$Lim \frac{d\left(\frac{1}{\Gamma(\mu)}\right)}{d\mu} = -\frac{-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots in\ inf.\right) - C}{+\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots in\ inf.\right) - C}.$$

Hier sind rechts im Zähler und Nenner Zahlen, die in übereinstimmender Weise unendlich anwachsen; dividirt man durch dieselben Zähler und Nenner, so ergibt sich sogleich das Resultat

$$Lim \frac{d\left(\frac{1}{\Gamma(\mu)}\right)}{d\mu} = 1, \quad \mu = 0.$$

Auf analoge sehr einfache Weise gelangt man zur Kenntniss der Beziehungen

$$Lim\, D_p \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = Lim\, D_q \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = 1, \quad p=0, \quad q=0,$$

$$Lim\, D_k \frac{\Gamma(k+l+m+n+\ldots)}{\Gamma(k)\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots} = \frac{\Gamma(l+m+n+\ldots)}{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots};$$

Dieselben bilden den ziemlich ergiebigen Apparat, continuirliche Integralformeln zu erhalten, wofür zum Schlusse einige Beispiele folgen mögen.

1. $$f(u) = u^{\mu-1} e^{-(p+iq)u};$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(p+iq)x} - e^{-(p'+iq')x}}{x}\, dx = l\, \frac{p'+iq'}{p+iq},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\cos qx - e^{-rx}\cos sx}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{r^2+s^2}{p^2+q^2},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\sin qx}{x}\,dx = arc\,tan\,\frac{q}{p}.$$

2. $$f(u) = u^{\mu-1} lu\, e^{-au}\sin\left(\mu\, arc\,tan\,\frac{b}{a} - bu\right);$$

$$\int_0^\infty lx\,\frac{arc\,tan\,\frac{b'}{a'}\,e^{-ax}\sin bx - arc\,tan\,\frac{b}{a}\,e^{-a'x}\sin b'x}{x}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\,arc\,tan\,\frac{b}{a}\,arc\,tan\,\frac{b'}{a'}\;.\;l\frac{a'^2+b'^2}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^\infty lx\,\frac{e^{-ax}\sin ax - e^{-bx}\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}\,l\,\frac{b}{a} = \frac{1}{2}\int_0^\infty lx\,\frac{\sin ax - \sin bx}{x}\,dx.$$

3. $$f(u) = \frac{u^{p-1}}{(au+b)^{p+q}};$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\left\{\frac{b^p}{(ax+b)^p} - \frac{b'^p}{(a'x+b')^p}\right\}dx =$$

$$\int_0^\infty x^{p-1}\left\{\frac{b^p}{(a+bx)^p} - \frac{b'^p}{(a'+b'x)^p}\right\}dx = l\,\frac{a'}{a},$$

$$\int_0^\infty \frac{(Mx+n)^{p-1}}{[(mx+n)\,(m'x+n)]^p}\,dx =$$

$$\int_0^\infty x^{p-1}\,\frac{(M+nx)^{p-1}}{[(m+nx)\,(m'+nx)]^p}\,dx = \frac{1}{n^p}\,.\,\frac{lm - lm'}{m - m'},$$

$$\sum\left[M_q\right]_{q=1}^{q=p-1}=\sum\left[\frac{m^q+m^{q-1}m'+m^{q-2}m'^2+\ldots+m'^q}{q+1}\right]_{q=1}^{q=p-1}, M_0=1.$$

4. $$f(u)=\frac{u^\mu}{b^2+2bu\cos\beta+u^2}, -\frac{\pi}{2}\leqq\beta\leqq+\frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(b^2+2bx\cos\alpha+x^2)(b^2+2bx\cos\beta+x^2)}=$$

$$\frac{1}{2b^3}\cdot\frac{\alpha\cot\alpha-\beta\cot\beta}{\cos\alpha-\cos\beta},$$

$$\int_0^\infty\frac{xdx}{(b^2+2bx\cos\alpha+x^2)(b^2+2bx\cos\beta+x^2)}=$$

$$-\frac{1}{2b^2}\cdot\frac{\alpha\csc\alpha-\beta\csc\beta}{\cos\alpha-\cos\beta},$$

$$\int_0^\infty\frac{x^2dx}{(b^2+2bx\cos\alpha+x^2)(b^2+2bx\cos\beta+x^2)}=$$

$$\frac{1}{2b}\cdot\frac{\alpha\cot\alpha-\beta\cot\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}, \alpha\lesseqqgtr\beta.$$

5. $$f(u)=u^{\mu-1}(1-u)^{a-\mu-1}F(\alpha u), a>0.$$

$$F(\alpha)=A_0+A_1\alpha+A_2\alpha^2+A_3\alpha^3+\ldots, \alpha\leqq1,$$

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(\mu)\Gamma(a-\mu)}\int_0^1 u^{\mu-1}(1-u)^{a-\mu-1}F(\alpha u)du=$$

$$A_0+\frac{\mu}{a}A_1\alpha+\frac{\mu(\mu+1)}{a(a+1)}A_2\alpha^2+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{a(a+1)(a+2)}A_3\alpha^3+\ldots;$$

I.
$$\int_0 \frac{(1-x)^{a-1}}{x}\{F(\alpha_1 x)-F(\alpha_0 x)\}\,dx=$$

$$\frac{A_1}{a}(\alpha_1-\alpha_0)+\frac{1!A_2}{a(a+1)}(\alpha_1^2-\alpha_0^2)$$

$$+\frac{2!A_3}{a(a+1)(a+2)}(\alpha_1^3-\alpha_0^3)+\ldots,$$

$$\int_0^{\arcsin\alpha}\tau\cot\tau d\tau=\frac{\alpha}{1}+\frac{1}{2}\frac{\alpha^3}{3^2}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\alpha^5}{5^2}+\ldots,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\arctan\alpha}\tau\csc\tau d\tau=\frac{\alpha}{1}-\frac{\alpha^3}{3^2}+\frac{\alpha^5}{5^2}-\ldots.$$

II.
$$\int_0^1\frac{1}{x}\{(1-x)^{a_1-1}F(\alpha_1 x)-(1-x)^{a_0-1}F(\alpha_0 x)\}\,dx=$$

$$A_0\int_0^1\frac{(1-x)^{a_1-1}-(1-x)^{a_0-1}}{x}dx$$

$$+A_1\left(\frac{\alpha_1}{a_1}-\frac{\alpha_0}{a_0}\right)+1!A_2\left(\frac{\alpha_1^2}{a_1(a_1+1)}-\frac{\alpha_0^2}{a_0(a_0+1)}\right)$$

$$+2!A_3\left(\frac{\alpha_1^3}{a_1(a_1+1)(a_1+2)}-\frac{\alpha_0^3}{a_0(a_0+1)(a_0+2)}\right)+\ldots$$

$$F(\alpha)=(1-\alpha)^{-c},\quad A_k=(c+k-1)_k,$$

$$\int_0^1\frac{(1-x)^{a-1}\{(1-\alpha x)^{-c}-1\}}{x}\,dx=$$

$$\frac{1}{1}\frac{c}{a}\alpha+\frac{1}{2}\frac{c(c+1)}{a(a+1)}\alpha^2+\frac{1}{3}\frac{c(c+1)(c+2)}{a(a+1)(a+2)}\alpha^3+\ldots,\quad a>c,\ c>0$$

$$\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{b-1} l(1-\alpha x)\,dx =$$

$$\frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)} \int_0^1 \frac{(1-x)^{b+c-1}\{1-(1-\alpha x)^{-c}\}}{x}\,dx.$$

$$F(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}(1-\alpha y^r)^{-c}\,dy,$$

$$A_k = \frac{(c+k-1)_k}{(p+kr)(p+kr+1)\,.\,.(p+kr+q+1)}$$

$$\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{b-1} \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}\, l(1-\alpha x y^r)\,dy\,dx =$$

$$\frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)} \int_0^1 \frac{(1-x)^{b+c-1}}{x} \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}\{1-(1-\alpha x y^r)^{-c}\}\,dy\,dx,$$

$$p>0,\ q>0;$$

$$\int_0^1 x^{p-r-1}(1-x)^{q-1}(1-\alpha x^r)\,l(1-\alpha x^r)\,dx =$$

$$-\alpha\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} + \alpha^2 \int_0^1 (1-x) \int_0^1 \frac{y^{p+r-1}(1-y)^{q-1}}{1-\alpha x y^r}\,dy\,dx,$$

$$\int_0^1 x^{c-2}(1-x)^{b-1} \int_0^1 y^{p-r-1}(1-y)^{q-1}(1-\alpha x y^r)\,l(1-\alpha x y^r)\,dy\,dx =$$

$$-\alpha\frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)}\cdot\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$+\alpha^2 \int_0^1 (1-x) \int_0^1 y^c(1-y)^{b-1} \int_0^1 \frac{z^{p+r-1}(1-z)^{q-1}}{1-\alpha x y z^r}\,dz\,dy\,dx.$$

6. $$f(u,v)=\frac{u^{\mu-1}v^{\nu-1}(1-u-v)^{\varkappa-1}}{(\rho+\alpha u+\beta v)^{\mu+\nu+\varkappa}},\quad \varkappa=1;$$

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{2\rho+x(\alpha'+\alpha)+y(\beta'+\beta)}{(\rho+\alpha x+\beta y)(\rho+\alpha' x+\beta y)(\rho+\alpha x+\beta' y)(\rho+\alpha' x+\beta' y)}dxdy=$$

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{l(\rho+\alpha')-l(\rho+\alpha)}{\alpha'-\alpha}\cdot\frac{l(\rho+\beta')-l(\rho+\beta)}{\beta'-\beta}.$$

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Schreiben des Herrn Eugen Bloek, Astronomen zu Pulkowa, an die kaiserliche Akademie der Wissenschaften.

„Pulkowa, 10. October 1871.

In dem XXII. Bande der Sitzungsberichte der Wiener Akademie ist ein von Dr. Ami Boué verfasster Nordlicht-Katalog veröffentlicht, der späterhin von Wolff und Anderen ergänzt, vielen neueren Arbeiten über die Perioden des Nordlichts zur Grundlage gedient hat. In diesen Katalog haben sich jedoch Fehler eingeschlichen, die wohl geeignet sind die Vertrauenswürdigkeit desselben in Zweifel zu ziehen.

Wie aus den citirten Quellen ersichtlich ist, hat nämlich Herr Dr. Boué vielfach die im Laufe eines Monats beobachtete Anzahl von Nordlichtern für das Datum einer beobachteten Erscheinung gehalten und dadurch Fehler begangen, die von wesentlichem Einfluss auf die Berechnung der Nordlichtperioden sein können.

Für das Jahr 1747 z. B. finden sich bei Boué folgende Tage notirt, an denen das Nordlicht beobachtet worden:

3. und 6. Jänner; 4. Februar; 7. und 19. März; 4. und 31. August; 4., 10. und 27. September; 4. October; 4. November; 3. und 24. December.

Diese Daten sind zum Theile entnommen aus den Beobachtungen von Hjorter zu Upsala, veröffentlicht in den „Bulletins de l'Académie Royale de Bruxelles“ 1854. In der citirten Quelle findet sich pag. 300 eine Tabelle mit der Überschrift:

„Nombre de jours pendant lesquels l'aurore boréale s'est montrée à Upsal dans les années 1739 à 1756 et 1759 à 1762“ und für das Jahr 1747 folgende Anzahl von Nordlichtern für die einzelnen Monate notirt:

Jänner: 3; Februar: 4; März: 7; August: 4; September: 4; October: 4; November: 4; December: 3. Dr. Boué hat, wie ersichtlich, die Anzahl der Erscheinungen für das Datum derselben gehalten und dadurch für das Jahr 1747 statt 33 nur 14 Nordlichter notirt; ebenso für 1760 nur 12 statt 53.

Diese Fehler sind nun von Boué nicht nur bei den Beobachtungen zu Upsala, von 1739—1762, sondern ebenso bei den Beobachtungen zu Christiania, von 1837—1852 (Bull. del' Acad. Brux. 1854) und zu Dunse in Neu-Britannien 1838—1847 (Stevenson: Lond. Roy. Soc. 1853) begangen worden. Ob diese Irrthümer sich auch sonst finden, habe ich nicht genauer untersucht, doch scheint es wohl der Fall zu sein, denn für 1820 bis 1821 sind nach Boué's Katalog in Cumberland house nur 10 Nordlichter beobachtet, während ich in meinem Kataloge 106 notirt habe.

Da, so viel mir bekannt ist, diese Fehler des Nordlicht-Kataloges von Dr. Ami Boué, bisher nicht veröffentlicht worden, so halte ich es für meine Pflicht, dieses der Akademie der Wissenschaften zu Wien, von der der Nordlicht-Katalog publicirt worden, mitzutheilen, mit der Bitte es veröffentlichen zu wollen[1]).

Eugen Bloek,
Astronom zu Pulkowa.

[1] Herr Dr. A. Boué hat sich mit Schreiben vom 25. October ganz ausser Stande erklärt, schon jetzt eine Verificirung seines Kataloges vorzunehmen.

Analyse der Mineralquellen des Hercules-Bades nächst Mehadia.

Unter Mitwirkung des Herrn Dr. **J. Köttsdorfer,**
Professors an der Marine-Akademie zu Fiume,

ausgeführt von Dr. **F. C. Schneider.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. October 1871.)

Lage und geognostische Verhältnisse des Bädergebietes.

Die Quellen des Hercules-Bades — auch die Bäder von Mehadia genannt — liegen nahe der walachischen Grenze im Gebiete des 13. Grenzregimentes, eine Meile vom Dorfe Mehadia, 3¹/₄ Meilen vom Donau-Städtchen Alt-Orsova entfernt, 168 Meter über der Meeresfläche in einem von den Ausläufern der Karpaten engbegrenzten Thale, das die aus Rumänien kommende Cserna bewässert.

Von den zahlreichen heissen Quellen entspringen nur zwei am linken, alle übrigen am rechten Ufer des Flusses. Vom Curorte eine Wegstunde flussaufwärts trifft man an beiden Flussufern abermals warme Quellen, die jedoch bezüglich der Menge ihrer Bestandtheile jenen des Hercules-Bades weit nachstehen.

Die sichtbare Grundlage der Thalsohle besteht zumeist aus grauweissem Liaskalk, der an einigen Stellen etwa 3000 Fuss emporsteigt und entweder senkrecht aufstrebende Wände oder über einander gethürmte Blöcke bildet. Oberhalb der höchstgelegenen Thermen bis zu den vorerwähnten flussaufwärts gelegenen warmen Quellen besteht die Thalsohle und die Gebirgslehne an beiden Ufern aus grobkörnigem Granit, in dessen Masse in schwachen Gängen Basalt, Eisenkies, Eisenoker und Rotheisenstein eingestreut vorkommen. Den Granit überlagert Grauwackenschiefer, diesen Liasschiefer und Mergel. Zwischen dem Schiefer und der Kalkschichte finden sich kleinere Lager von

Grauwacke, Grünstein, Kalk und Feldspath, in den Bergriesen Quarz und Bergkrystall. Flussabwärts von den höchstgelegenen Thermen des Hercules-Bades besteht die Thalsohle aus grauem Thonschiefer, der sich von SO. nach NW. quer durch das Flussbett bis zur Grenze des Laubholzes ausdehnt, und von dichtem horizontal geschichtetem, mit schmalen Quarzgängen durchsetzten Liaskalk bedeckt wird. Weiter abwärts, nahe an der Grenze des Quellengebietes tritt ein bedeutendes Lager von Glimmerschiefer zu Tage.

Der Gebirgsstock, an dessen Fusse die Thermen entspringen, zeigt in seinen oberen Regionen mannigfache Zerklüftungen und birgt viele Höhlen. Die besuchteste, aber trotzdem in ihren letzten Verzweigungen noch unerforschte ist die Räuberhöhle. Sie liegt 57 Meter über der Thalsohle nächst der Herculesquelle. Eine zweite Höhle befindet sich gerade über der Herculesquelle etwa 320 Meter davon entfernt. Ihr Boden klingt hohl, ihre Temperatur ist stets einige Grade höher als die der äusseren Luft, ungeachtet letztere durch die portalartige Öffnung ungehindert Zutritt hat. Man vernimmt in derselben fortwährendes Getöse, dem vergleichbar, das beim Einströmen gespannter Wasserdämpfe in kaltes Wasser bewirkt wird. Unterhalb dieser Höhle treten aus dem zerklüfteten Gestein heisse Wasserdämpfe hervor. Ihre Menge hält mit der Temperatur der Herculesquelle gleichen Schritt; nach länger andauerndem Regen und zur Zeit der Schneeschmelze versiegen sie gänzlich. Der ausströmende Dampf liefert in erkälteten Glasglocken verdichtet ein geruch- und geschmackloses Wasser, das Bleipapier nicht schwärzt und mit Salzsäure befeuchtetes Curcumapapier unverändert lässt.

Geschichte der Quellen.

Die Thermen der Herculesbäder waren schon den Römern bekannt. Zeugniss dafür geben die Statuen, Votivtafeln, Inschriften und die Überreste von Mauerwerken, welche bei Neu- und Umbauten aufgefunden werden. Nach dem Verfall des Römerreiches blieben diese Quellen Jahrhunderte lang unbeachtet, erst als unter Kaiser Karl VI. das Banat in den Besitz der österreichischen Krone gelangte, wurden diese Quellen durch den

commandirenden General Graf Hamilton dem Curgebrauche wieder zugänglich gemacht.

Die ersten literarischen Berichte über diese Quellen lieferte der Rechtsgelehrte Paschalis Caryophilus[1]. Sie geben jedoch über die physikalischen und chemischen Verhältnisse keinen Aufschluss.

Die erste chemische Analyse führte 1772 Crantz[2] aus. Er liess sich die Thermalwässer nach Wien senden. Sebastian Helbing, der die Füllung besorgte, notirte auch in Graden des Reaumur'schen Thermometers die Temperatur der damals benützten Quellen.

Nahezu gleichzeitig beschäftigte sich im Auftrage der Kaiserin Maria Theresia der Provincial-Medicus Dr. J. M. Stadler[3] mit der Untersuchung dieser Thermen. Er hatte in den Jahren 1773, 1774 und 1775 einen längeren Aufenthalt in den Herculesbädern genommen, und zahlreiche Temperaturmessungen sowie chemische Reactionen ausgeführt.

1776 lieferte Griselini[4] einige Notizen über die Herculesbäder. Dr. Kitaibel[5] erhielt 1800 von der Regierung den Auftrag, die chemische Analyse dieser Quellen vorzunehmen. Zu diesem Zwecke hatte er in den Jahren 1800 und 1805 die Herculesbäder besucht und sich noch im Jahre 1810 Thermalwässer nach Pest zusenden lassen. Trotzdem kam er mit seinen Analysen nicht zu Ende. Deren Resultate sind nur fragmentarisch veröffentlicht. Sie geben über die chemischen Verhältnisse der Thermen weniger verwerthbare Aufschlüsse als die Analysen von Crantz und Stadler. Kitaibel fand die chemische Untersuchung der Herculesquellen für so schwierig, dass er 1809 an Stabsarzt Schlosser

---

[1] Dissertatio epistolaris de thermis Herculanis nuper in Dacia detectis. Viennae 1737. — De usu et praestantia thermarum Herculanarum dissertatio epistolaris altera Mantuae 1739.

[2] Analyses thermarum Herculanarum Daciae Trajani 1773. — Gesundbrunnen der österr. Monarchie. 1777, pag. 193 ff.

[3] Versuche über die uralten römischen Herculesbäder. Wien 1776.

[4] Versuch einer politischen und natürlichen Geschichte des Temesvárer Banates. Bd. I, p. 263. Bd. II, p. 206.

[5] Hydrographica Hungaricae edid. Schuster 1829. Tom. II, p. 311.

darüber schrieb: „Aquarum harum investigationem esse rem difficilimam, ingratam, laborem plurium mensium, semper a se cum timore contemplatam ab eo tempore quo aquas has nosset.“

Im Jahre 1817 entsendete der damalige Hofkriegsrath den Professor Dr. Zimmermann und 1847 den Professor Dr. Ragsky nach den Herculesquellen mit dem Auftrage, dieselben einer gründlichen Erforschung zu unterziehen. Die Resultate von Zimmermann's Untersuchungen finden sich in Hietzinger's Statistik der Militärgrenze [1]. Ragsky [2] veröffentlichte seine Analysen im Jahrbuche der geologischen Reichsanstalt.

Bei der Darlegung der Resultate unserer im Auftrage des Kriegsministeriums ausgeführten Analyse wird sich die passende Gelegenheit finden, diese älteren Untersuchungen zu berücksichtigen in soweit sie geeignete Anhaltspunkte zur Beantwortung der Frage bieten: ob die thermischen und chemischen Verhältnisse der Quellen des Hercules-Bades innerhalb der letzten hundert Jahre eine erhebliche Veränderung erfahren haben. Vorläufig möge nur im allgemeinen angedeutet sein, dass die Temperatur bei den meisten Quellen nahe constant geblieben ist, und dass auch in der chemischen Zusammensetzung nur geringe Veränderungen eingetreten sein dürften.

Örtliche und physikalische Verhältnisse der einzelnen Quellen.

Die Zahl der Thermen, welche innerhalb des Curgebietes entspringen, ist bedeutend. Man verzeichnet ihrer 14 bis 22, könnte jedoch selbst die letztere Zahl noch erhöhen, wenn die im Flussbette der Cserna zu Tage tretenden Quellen und alle kleineren heissen Wasserläufe mitgezählt würden.

Alle diese Quellen, nur jene ausgenommen, welche das Herculesbad speist, enthalten Schwefelverbindungen, die auf Jod wirken und um so reichlicher auftreten je tiefer flussabwärts die Quellen entspringen. Für den Curgebrauch sind gegenwärtig

---

[1] II. Th. II. Abth. p. 426.

[2] II. Jahrgang 1851. 2. Vierteljahr pag. 93.

11 Quellen verfügbar, 9 derselben werden benützt. Sie sind folgende:

1. Die Herculesbadquelle — in älteren Schriften das Räuberbad genannt. — Sie ist die höchstgelegene und ergiebigste, und hat es wohl nur ihrem Namen und ihrer Mächtigkeit zu danken, dass sie vom heilsuchenden Publicum auch für die wirksamste erklärt wird. Sie stürzt im mannesdicken Strahle aus einer Felskluft in eine Kalksteinhöhle ab. Bei anhaltend trockenem Wetter liefert sie in der Stunde über 160 Cubik-Meter (2800 Eimer) Wasser; bei andauerndem Regenwetter, sowie zur Zeit des Schneeschmelzens beträgt ihre Ergiebigkeit das dreifache der angegebenen Menge. Im Zusammenhange damit zeigen sich Temperaturschwankungen zwischen 21° und 56°. Mit dem Wasserreichthum mindert sich die Menge der festen Bestandtheile. Ihr Wasser ist klar, geruchlos, von schwach bittersalzigem Geschmack. Schon Stadler führt an, dass diese Quelle nichts vom Schwefel und Brennbaren mit sich führt, Kitaibel und alle nachfolgenden Analytiker bestätigen, entgegen der Behauptung von Crantz, dass die Herculesquelle frei von Schwefelverbindungen und Schwefelwasserstoff ist.

Bezüglich der Temperatur dieser Quelle beobachtete schon Stadler, dass nach anhaltendem Regen ihr Wasser selbst in den wärmsten Monaten ganz kalt werde; die höchste Temperatur 50° beobachtete er im September 1774, die niederste 32·8° im April 1775, im Jänner desselben Jahres betrug sie 48·8°. Nach Crantz war am 2. Juli 1776 die Temperatur dieser Thermen 47·4°, nach Griselini's Messungen betrug sie am 16. August

Anmerkung. Des bequemeren Vergleiches wegen sind die von einzelnen Autoren in Fahrenheit'schen oder in Reaumur'schen Graden angegebenen Temperaturmessungen in Centigraden ausgedrückt. Die bei der Umrechnung sich ergebenden Bruchtheile sind nur auf die erste Decimale beschränkt, weil mit Grund vorausgesetzt werden darf, dass die Thermometer, deren sich die einzelnen Experimentatoren bedienten, wohl nicht unter einander übereinstimmten, weshalb auch auf Differenzen, die ein und selbst zwei Grade betragen, kein zu grosses Gewicht gelegt werden dürfte. Stadler benützte ein Fahrenheit'sches, die übrigen Forscher ein Réaumur'sches Thermometer. Wir haben uns eines Celsius'schen Normalthermometers mit $^1/_{10}$ Grad-Theilung bedient.

desselben Jahres 44·4°. Kitaibel will entgegen den Wahrnehmungen aller anderen Beobachter die Temperatur constant bei 52·2° gefunden haben. Zimmermann's Beobachtungen beziehen sich auf die Zeit vom 8. Juni bis 2. Juli 1817. Die tiefste Temperatur, die er beobachtete, war 32·5°, die höchste 40°. Nach Ragsky's Erfahrungen schwankte die Temperatur zwischen 21·2°—51·2°. Wir beobachteten nach anhaltend trockenem Wetter die Temperatur 47·2°, konnten uns jedoch auch überzeugen, dass nach einem starken Regengusse die Temperatur um einen Grad schon nach wenigen Stunden gesunken war. Nach den Aufzeichnungen des Badearztes Dr. Munk erreichte vom 1. Nov. bis 5. Dec. 1867 die Temperatur der Therme 58·7°, im December sank dieselbe unter häufigem Schwanken bis 20°, hielt sich im Jänner 1868 zwischen 31·6° und 38·7°, und erreichte am 1. März die niederste Temperatur: 16·2°. Das spec. Gewicht variirt nach Ragsky zwischen 1·0010 und 1·0027. Wir fanden dasselbe im August 1868 = 1·002 bei 23·5°.

2. Die Karlsquelle. Etwa 23 Meter flussabwärts von der Herculesquelle tritt eine schwach nach Schwefelwasserstoff riechende Therme zu Tage, deren Ergiebigkeit etwa 0·7 Cub. Meter per Stunde beträgt. In älteren Schriften wird sie als „unbenannte" bezeichnet. Einst diente sie zu Fussbädern, jetzt wird sie als Trinkquelle benützt. Von Witterungsverhältnissen wird sie wenig beeinflusst, ihre Temperatur schwankt innerhalb enger Grenzen. Stadler gibt dieselbe zu 39°, Crantz zu 41·2°, Kitaibel zu 43·7° an. Zimmermann notirte die Temperatur 42·5°, Ragsky fand sie zwischen 41·2 und 41·8° schwankend. Nach Munk's Beobachtungen zeigte das Thermometer innerhalb der Monate November—Februar constant 41·2°. Im August 1868 hatten auch wir die Temperatur 41·2° beobachtet. Nach Ragsky zeigt das Wasser das spec. Gewicht 1·0017, bisweilen aber erhebt es sich bis 1·0021 (?). Wir haben dasselbe bei dem auf 23·8° abgekühlten Wasser = 1·00157 gefunden.

3. Das Ludwigsbad. Von der Karlsquelle 600 Schritte flussabwärts tritt hart am Cserna-Ufer, nur wenige Fuss über dem Wasserspiegel des Flusses, eine in zwei Arme getheilte Quelle zu Tage, welche 1735 zuerst dem Curgebrauche zugänglich gemacht, durch ein Schindeldach geschützt und deshalb Schindel-

badquelle genannt wurde. Die beiden Quellenarme sind 1·2 Meter von einander entfernt und liefern in der Stunde über 30 Cub. Meter, etwa 550 Eimer Wasser von nahezu constanter Temperatur. Diese fand Stadler im Ursprunge = 43·3, im Bassin = 41·7°. Crantz gibt dieselbe offenbar zu hoch = 53·7° an, denn Griselini, der gleichfalls nahezu in derselben Zeit wie Helbing die Temperatur der Herculesquellen ermittelte, gibt die Temperatur der Ludwigsquelle zu 43·7° an. Nach Kitaibel's Messungen ist dieselbe 46·2—47·5°, nach Zimmermann 46·2°, nach Ragsky 45—45·5°. Wir beobachteten im Oct. 1867 und im Aug. 1868 die Temperatur 45°, und nach Munk's fünfmonatlichen Beobachtungen Nov. 1867—März 1868, lagen die äussersten Schwankungen zwischen 45—46·5°. Das spec. Gewicht dieser Therme ist bei 24° ermittelt = 1·0020.

4. Die Carolinenquelle, von Stadler, Crantz und Griselini das Geschwulstbad, von Kitaibel das neue oder kalte Gliederbad genannt, wurde 1770 gelegentlich des Baues der über die Cserna führenden steinernen Brücke aufgeschlossen, hat indess im Laufe der Zeit und insbesondere in Folge des im Frühjahre 1868 vorgenommenen Umbaues des Quellenbeckens in ihrem thermischen und chemischen Bestande wesentliche Einbusse erlitten. Stadler beschreibt 2 Quellen, die in geringer Entfernung von einander nahe dem Brückenkopf hervorbrechen. Die eine zeigt die Temperatur 40—42·7° (nach Crantz und Griselini 42·5), die andere nur 34·4°. Kitaibel beschreibt drei Quellen, von welchen die mindest ergiebige, aber wärmste (47·8°) am Grunde des Bassins entspringt, die zweite etwa vier Meter über dem Bassin hervorbricht, 2·2 Meter von der Brücke entfernt in eine oberflächliche Aushöhlung sich ergiesst und constant 43·7° warm ist. Die dritte, nahe dem Brückenkopf, aber gleichfalls höher gelegene zeigte nur die Temperatur 32·5°. Zimmermann erwähnt zwei Quellen, von denen die heissere (41·2°) 3·65 Cub. Meter, die kältere (27·2°) 5·7 Cub. Meter Wasser lieferte. Ragsky beobachtete namhafte Schwankungen, sowohl bezüglich der Temperatur, als auch bezüglich des Salzgehaltes; erstere bewegte sich zwischen 24·5—30·5°. Das spec. Gewicht variirte zwischen 1·0018 und 1·0035. Derzeit bemerkt man in dem Bassin nur eine Ursprungsstelle, im November 1867 zeigte

das Wasser am Ursprung die Temperatur 37·4°, im August 1868 war letztere auf 28·4° herabgesunken. Zu verschiedenen Tageszeiten vorgenommene Wärmemessungen ergeben Abweichungen bis zu 1°. Das spec. Gewicht des im November geschöpften Wassers war 1·003, im August 1868 geschöpftes hatte bei 23°: 1·0017.

5. Die Elisabethquelle wird in den älteren vor 1854 publicirten Schriften über die Herculesbäder nicht erwähnt. Sie tritt durch ein Brunnenrohr zu Tage und scheint eine Abzweigung der Kaiserbadquelle zu sein. Ihre Temperatur variirt zwischen 44·6 und 45·2. Das spec. Gewicht des auf 19° abgekühlten Wassers ist: 1·0051.

6. Die Kaiserbadquelle liegt etwa 130 Schritte unterhalb der steinernen Brücke, wurde ehedem das heisse, auch das alte Gliederbad genannt. Sie ergiesst ihr Wasser mit dem der Ferdinandsquelle, welche 25 Schritte flussabwärts entspringt, in ein gemeinsames Becken. Aus der Mündung beider Quellenausflüsse treten reichlich Gasblasen auf, die in einem Recipienten gesammelt und entzündet mit blassbläulicher Flamme verbrennen und Bleipapier nur schwach bräunen. Die Ergiebigkeit der Kaiserbadquelle wird per Stunde auf 2·8 Cub. Meter (89 Cub. Fuss) geschätzt. Stadler fand die Temperatur des heissen Gliederbades = 48·8 bis 54·4°, Crantz = 52·5°, Griselini = 48·3°, Kitaibel gibt an, das Gliederbad werde durch zwei Quellen gespeist, von welchen die eine 55°, die andere 56·2—57·5° heiss gefunden wurde. Nach Zimmermann liegt die Temperatur dieser Quelle bei 55°, auch Ragsky fand sie ziemlich constant bei 55—55·8°. Bei unseren Messungen zeigte das Thermometer im Novemb. 1867: 56·6°, im August 1868: 56·8°. Das spec. Gewicht des Wassers fand Ragsky 1·0052, wir 1·00537 bei 19·1°.

Hart am Flussufer der Cserna und mit dem Niveau des Flusses in nahezu gleicher Höhe treten in einer nur bei sehr niederem Wasserstande zugänglichen Höhle drei Quellen springbrunnenartig hervor. Ihre Temperatur wird zu 62·7°, 63·7° und 55·6° angegeben.

7. Die Ferdinandsquelle, früher Kalkbadquelle genannt, entspringt in geringer Entfernung von der Kaiserquelle in einer reichlich mit Gypskrystallen ausgekleideten Höhle. Stadler

berichtet, dass diese Quelle wenige Fuss über der Thalsohle armesdick aus einer Felskluft hervorbreche und ihr trübes, milchweisses Wasser in einen von der Natur beckenartig ausgehöhlten Fels, der als Badebassin benützt werde, ergiesse. Kitaibel beschreibt ein künstlich angelegtes Reservoir, in das zwei Quellen, die ungefähr drei Klafter von einander entfernt sind, geleitet werden. Der Fels besteht aus Kalkstein, der aber wenige Schritte unterhalb des Bades von schwarzgrauem Mergelschiefer überlagert wird. Nach Zimmermann's Beobachtungen lieferte diese Quelle im Jahre 1817 per Stunde nur mehr 2·4 Cub. Meter Wasser. Im April 1821 war der Ausfluss noch schwächer und am 12. Mai desselben Jahres versiegte die Quelle gänzlich. Eine genauere Untersuchung führte zur Entdeckung einer geräumigen Höhle, aus deren Wölbung eine grosse Masse von Gestein und Erdreich herabgestürzt war; letzteres verstopfte die Mündung der Quelle. Die benachbarten kleineren Quellen, die bis dahin unbenützt in die Cserna abflossen, sprudelten nach diesem Ereigniss reichlicher. Die ergiebigste lieferte 2·8 Cub. Meter Wasser, sie wurde statt der verschütteten Kalkbadquelle benützt; ihre Temperatur fand Zimmermann zwischen 48·7—51·2° schwankend, Ragsky notirt dieselbe zu 53·7°, wir fanden sie im November 1867 = 54·6°, im August 1868 = 54·8°. Stadler fand die Kalkbadquelle im Juni 1774 bis 38·8°, im Jänner 1775: 39°; innerhalb der Monate März—Mai beobachtete er Schwankungen zwischen 34·4—38·3°; Crantz notirt die Temperatur 43·7°, Griselini 37·5, Kitaibel für die eine Quelle 37·5, für die andere 47·5 bis 48·7°.

Das spec. Gewicht des Wassers der Ferdinandsquelle ist nach Ragsky 1·0047—1·0055; wir fanden es bei 18·4° = 1·0057.

In der Nähe der Kaiser- und Ferdinandsquelle befand sich nach Stadler's Beschreibung im Kalkgebirge eine geräumige Höhle, die mit warmem Wasserdunst erfüllt, das Schwitzloch, auch das Tropfbad, genannt wurde. Die Wandung der Höhle war mit Krystallen bedeckt, die wie Vitriolsäure sauer schmeckten. Eine im armdicken Strahle aus dem Kalkgestein hervorbrechende Quelle zeigte im August und September 1774 die Temperatur 51°, im Jänner 1775 bei einer Lufttemperatur von — 11° sogar

56·6°. Kitaibel fand 1800 diese Höhle wesentlich verändert, kleiner, ihre Wände mit Gyps und Stalaktiten überdeckt. Aus den rissigen Wandungen quillt eine Flüssigkeit, die weissen geschmacklosen Schlamm mit sich führt. Aus dem Boden der Höhle dringt Wasser hervor, das durch einen Spalt ins Innere des Berges abfliesst, ohne das Kalkbad zu speisen. Die Temperatur der Höhle war nach Stadler 28·8°, nach Kitaibel 32·5°, nach Zimmermann 27·5°. Letzterer fand am Grunde der Höhle 3 spärlich fliessende Quellen, deren Temperatur verschieden 53·7°, 41·2 und 40° war. Zwischen centnerschweren Massen von Selenit und kohlensaurem Kalk quoll eine dickflüssige Schwefelleberlösung hervor. Ragsky erwähnt diese Höhle nicht. Wir konnten über ihren Bestand keine befriedigende Auskunft erhalten.

8. Die Augenbadquellen. Eine Viertelstunde Wegs flussabwärts vom Kaiserbade entspringen aus grauem, von Kalkspathadern durchsetzten Mergelschiefer vier Quellen, von welchen zwei höher gelegene wenig ergiebig sind und deshalb unbenützt bleiben. Die wasserreichere kommt wenige Fuss über dem Thalweg an der Berglehne hervor, wird in einem ausgemauerten, offenen Behälter gesammelt, aus dem das Wasser in ein kleines Marmorbecken abfällt und dann in die Cserna geleitet wird. Aus dem Boden des ausgemauerten Behälters entwickeln sich in mässiger Menge Gasblasen von derselben Beschaffenheit, wie sie aus der Kaiser- und Ferdinandsquelle hervorsprudeln. Das der Einwirkung der Luft ungeschützt preisgegebene Thermalwasser riecht nach Schwefelwasserstoff und zeigt eine schwachgelbliche Färbung. Stadler fand im Winter und Frühling die Temperatur 40—43·3°, in den Sommermonaten zwischen 46·6—51·6°, Griselini im August 1776 = 44·4°, Kitaibel 50·6° (im Ursprung 52·2—53.7°), Zimmermann notirte die Temperatur 52·5°. Ragsky 53·5°, wir fanden das Wasser im Behälter 51·2—51·8° warm. Das spec. Gewicht ist nach Ragsky 1·0056, nach unseren Bestimmungen besitzt das auf 26·8° abgekühlte Wasser das spec. Gewicht 1·0044.

Die tiefst gelegene Augenbadquelle ist die gasreichste, sie kommt hart am Flussufer zu Tage, wird durch ein Auslaufrohr in ein kleines Marmorbecken geleitet, von wo das Wasser in die Cserna abfliesst. In letzterer Zeit hat man dieser Quelle den Namen

Josefsbrunnen gegeben. In älteren Schriften wird unter diesem Namen eine am linken Cserna-Ufer hervorbrechende Quelle beschrieben, die jedoch gegenwärtig nicht mehr vorhanden ist. Die Temperatur des Josefsbrunnen fanden wir innerhalb der Auslaufsröhre ermittelt = 55·7°, Ragsky gibt dieselbe zwischen 55·2—56·1° an, in älteren Schriften wird sie mit 50—53·7° notirt. Ihr spec. Gewicht beträgt bei 26·8°: 1·00443.

9. Am linken Cserna-Ufer gegenüber den Augenbadquellen trifft man zwei Thermen, von welchen die dem Ufer nächstliegende gegenwärtig den Namen Fussbadquelle führt; Ragsky nennt sie schwarze Quelle. Die zweite etwas höher gelegene entspringt am Fusse des gewaltigen Berges Domoglet; sie speist das Franzensbad, welches in den älteren Schriften unter den Namen Franzosenbad beschrieben und insbesondere gegen syphilitische Affectionen gerühmt wird. Die Franzensbadquelle liefert per Stunde 2·9 Cub. Meter Wasser, die Fussbadquelle ist minder ergiebig. Sie ist nach unseren Messungen 44·2°—44·4° warm, Ragsky notirte für die schwarze Quelle die Temperatur 43·7°—47·7°; Zimmermann gibt an, er habe diese Quelle stets um einen Grad wärmer als die Franzensquelle gefunden. Letztere fand Stadler 37·7°, Crantz 37·5, Griselini 35·5, Kitaibel 39·7, Zimmermann 40°, Ragsky 42·2°—42·5°, wir 42·4° warm. Die älteren Schriften geben über die Fussbadquelle keine Auskunft, dagegen findet man eine Fieberbadquelle beschrieben, die am linken Cserna-Ufer dem alten Gliederbade gegenüber hervorkam, nach Stadler zur Sommerzeit 52·7°, im Frühjahr aber nur 36° warm gefunden wurde. Crantz gibt ihre Temperatur = 48·7°, Griselini 47·5, Kitaibel 37·5° an. Im Jahre 1816 war diese Quelle versumpft, sie wurde hierauf in ein Sandsteinbecken gefasst als Josefsbad verzeichnet. Zimmermann notirte ihre Temperatur = 48·7°; gegenwärtig finden sich in dieser Richtung keine Thermen.

Oberhalb dem Herculesbade ist das Bett der Cserna durch steil vorspringende Granitfelsen beträchtlich eingeengt, das rechte Ufer unwegsam, vom linken aus gelangt man zu einer aus den Spalten eines Granitfelsens dreiarmig hervordringenden spärlich fliessenden Quelle, die 43·6° und 44·4° warm ist, schwach hepatisch riecht, und bezüglich der Menge an festen Bestandtheilen

den Thermen des Herculesbades weit nachsteht. Auch am rechten Cserna-Ufer bricht in einer Entfernung von einer halben Stunde flussaufwärts eine schwefelführende Quelle aus grauem Kalkstein hervor, die mit dem Wasserspiegel des Flusses nivellirt, ihrer schweren Zugänglichkeit wegen lange unbekannt geblieben ist.

Chemische Untersuchung der Thermen.

1. Qualitative.

Wie bereits erwähnt, zeigt das Wasser der Herculesquelle ein abweichendes Verhalten von dem der übrigen Thermen; es ist geruchlos und erzeugt weder mit einer alkalischen Bleioxydlösung noch mit Nitroprussidnatrium eine Schwefelreaction. Die übrigen Thermalwässer enthalten dagegen Schwefelverbindungen, die auf Jodlösungen entfärbend wirken; am Ursprung geschöpft sind sie farblos, klar, riechen schwach nach Schwefelwasserstoff, schmecken salzig bitter, reagiren alkalisch; der Luft preisgegeben werden sie erst trübe, klären sich jedoch alsbald, indem sie eine gelbe Färbung annehmen, die bei weiterem Zutritt der Luft wieder verblasst, indem sich Schwefel in Form eines weissen, zarten Pulvers ausscheidet.

Die schwefelführenden Thermalwässer werden durch essigsaure Manganlösung gefällt, und wirken — die Karls- und Ludwigsquelle ausgenommen — auch noch auf Chlorcadmiumlösungen nach Entfernung des Manganniederschlages fällend, sie enthalten sonach Sulfhydrate. Durch Auspumpen lassen sich nur geringe Mengen Gas austreiben, das ausgepumpte Gas färbt Bleipapier nur an der vom Gasstrom zunächst betroffenen Stelle braun; freier Schwefelwasserstoff ist sonach nur spurenweise vorhanden.

Die mit Chlorcadmiumlösungen vermischten und bis zur vollständigen Abscheidung des Schwefelcadmiums vor dem Luftzutritt verwahrten Wässer wirken noch auf Jodlösungen entfärbend; sie erfordern von einer Jodlösung, die in einem Cubikcentimeter 0·987 Milligr. Jod enthielt, 2·5—5 CC., um die zu 500 CC. dieser Wässer gesetzte Stärkelösung bleibend blau zu färben.

Die Gesammtheit der angeführten Reactionen erweist, dass der auf Jod wirkende Schwefel in verschiedener Bindung in den Thermalwässern vorkommt, dass freier Schwefelwasserstoff nur

spurenweise in ihnen enthalten ist, die Hydrosulfurete in vorwiegender Menge auftreten, dass aber auch sauerstoffhältige Schwefelverbindungen, die auf Jod wirken, nicht fehlen. Die Anwesenheit schwefligsaurer Verbindungen ist aus dem Grunde nicht wahrscheinlich, weil der durch Einwirkung der Luft ausgeschiedene Schwefel zur Bildung von Polysulfureten verwendet wird, schwefligsaure Salze aber den Bisulfureten Schwefel zur Bildung unterschwefligsaurer Salze entziehen, sonach die Abscheidung elementaren Schwefels verhindern. Es gab auch die von Baedecker anempfohlene Reaction auf schwefligsaure Salze ein negatives Resultat. Die grosse Menge von Chlorverbindungen, welche in den Thermalwässern vorkommen, macht die sonst so empfindliche Reaction der unterschwefligen Säure auf Silberlösungen unsicher. Es bleibt auch fraglich, ob die unterschwefligsaure Verbindung aus den Sulfureten durch die Einwirkung des atmosphärischen Sauerstoffes in den Bassins erst entstanden ist oder ob sie den ursprünglichen Thermalwässern angehört.

Zum Nachweise der übrigen in den Thermalwässern auftretenden Bestandtheile benützten wir die allgemein gebräuchlichen Methoden. Wir erachten jedoch die Bemerkung nicht für überflüssig, dass für das Aufsuchen einzelner Bestandtheile nicht theoretische Reflexionen massgebend waren. Simmler gibt an, dass im Stachelberger Mineralwasser, welches Alkalisulfurete enthält, Kupfer und Eisen vorkomme. Es wurde daher in den Abdampfrückständen von 10 Litres der einzelnen Wässer gleichfalls nach den durch alkalische Schwefelmetalle fällbaren Metallen gesucht; aber mit negativem Erfolge.

Ragsky gibt an, dass die Quellwässer der Herculesbäder weder Kalium-, noch Lithiumverbindungen enthalten und dass nur in der Karolinenquelle geringe Mengen von Magnesia auftreten, in allen anderen Quellwässern auch diese Base fehle. Wir haben in den sämmtlichen Quellwässern des Herculesbades alle drei genannten Basen gefunden. Das Kalium in dem alkoholischen Auszuge der Abdampfrückstände mittelst Platinchlorid und durch die Spectral-Analyse, welche auch die Anwesenheit des Lithium erkennen liess; das Magnesium nach der gewöhnlich üblichen Fällung mit phosphorsaurem Natron, wozu jedoch nicht blos das Filtrat vom oxalsauren Kalk benutzt wurde, es wurde auch letzterer noch-

mals in Salzsäure gelöst und abermals mit oxalsaurem Ammoniak unter Zusatz von Ammoniak gefällt. Die von dieser Fällung abfiltrirte Flüssigkeit wurde mit dem Filtrat der ersten Fällung vereinigt, in Platinschälchen zur Trockene verdunstet, der Trockenrückstand behufs Entfernung der Ammoniaksalze geglüht, sodann in salzsäurehältigem Wasser gelöst. Diese Lösung wurde zunächst mit oxalsaurem Ammoniak, und nachdem keine Fällung eintrat, mit phosphorsaurem Natron versetzt.

Zur Entdeckung der in sehr geringer Menge vorhandenen Bestandtheile wurden aus 10—20 Litres der einzelnen Quellwässer Abdampfrückstände bereitet, diese mit 90°/₀ Alcohol ausgezogen, die erhaltenen Lösungen zur Trockene verdunstet. Die wässerige Lösung dieser Rückstände schied nach Zusatz von verdünnter Schwefelsäure und salpetrigsaurem Kali Jod aus, das mittelst Schwefelkohlenstoff entfernt wurde. Die jodfreie Lösung färbte sich nach vollständiger Entfernung des Jod nach Zusatz von Chlorwasser gelbroth, das ausgeschiedene Brom wurde gleichfalls mit Schwefelkohlenstoff von der wässerigen Lösung getrennt, sodann an chlorfreie Kalilösung übertragen und mit Silbersalpeter gefällt. Wir überzeugten uns, dass sämmtliche Quellen der Herculesbäder nebst Chlor beide Haloide enthalten und zwar Brom in etwas grösserer Menge als Jod.

Der in Wasser ungelöste Theil der Abdampfrückstände besteht fast nur aus Kieselerde; Fluor und Strontiumverbindungen sind nicht vorhanden. Dagegen wurde aus der chlorwasserstoffsauren Lösung nach Zusatz von Ammoniak und Salmiak eine sehr geringe Menge eines gallertigen Niederschlages erhalten, der in salpetersaurer Lösung mit molybdänsaurem Ammoniak die Phosphorsäurereaction lieferte.

In den Abdampfrückständen von 10—20 Litres der Thermalwässer — zur Bereitung grösserer Mengen fehlten die Behelfe — konnte Caesium und Rubidium spectral-analytisch nicht nachgewiesen werden.

2. Quantitative Bestimmung.

Bezüglich der Methoden, nach welchen die aufgefundenen Bestandtheile quantitativ bestimmt wurden, sei folgendes bemerkt.

Das zur Analyse verwendete Wasser wurde im November 1867 den Quellen entnommen, in Glasflaschen, die 8—10 Litres fassten, gefüllt; zum Verschlusse derselben wurden Kautschukstopfen benützt, die mit Sodalösung ausgekocht und dann mit einer Mischung aus Wachs und Talg imprägnirt waren. Der auf Jodlösungen wirkende Schwefel wurde direct an der Quelle, sodann in Wien im Laboratorium geprüft. Der Verschluss der Flaschen war so vollständig, dass nur bei der an Schwefelverbindungen ärmsten Karlsquelle sich eine erhebliche Einbusse bemerkbar machte.

Um Vergleichungspunkte zu gewinnen, wurden von den wichtigeren Quellen auch Wasserproben im August 1868 und im März 1869 geschöpft und der Analyse unterzogen.

Die Bestimmung des Sulfurete bildenden Schwefels geschah auf directem und indirectem Wege; gemessene Mengen der Thermalwässer wurden durch Chlorcadmiumlösungen gefällt. Das hiedurch erhaltene Schwefelcadmium wurde in rothe rauchende Salpetersäure eingetragen, durch Erwärmen vollständig in schwefelsaures Cadmium verwandelt, sodann die Schwefelsäure mit Chlorbaryumlösung niedergeschlagen. Aus der Menge des schwefelsauren Baryum berechnet sich die äquivalente Menge Schwefelwasserstoff, welche auf die Sulfurete entfällt, sowie die Menge Jod, die bei der Gesammtbestimmung von ihnen in Anspruch genommen wird. Die mehr verbrauchte Jodlösung ist auf Rechnung der unterschwefligsauren Verbindung zu setzen, welche bei der Jodprobe in Tetrathionsäure verwandelt wird.

Nach Ermittlung der in den einzelnen Quellwässern vorhandenen Schwefelsäure wurden abgemessene Mengen derselben mit luftfreiem Chlorgas gesättigt. Die anfänglich durch ausgeschiedenen Schwefel opalescirende Flüssigkeit klärte sich sehr bald, gelindes Erwärmen reichte hin, den sämmtlichen Schwefel in Schwefelsäure zu verwandeln, welche aus der durch anhaltendes Erwärmen chlorfrei gewordenen Lösung mittelst Chlorbaryum gefällt wurde. In gleicher Weise wurden die Thermalwässer behandelt, aus welchen durch Chlorcadmium der in den Sulfureten gebundene Schwefel entfernt war. Nach Abzug der ursprünglich in den Wässern gefundenen Schwefelsäure ergibt

der Rest die Menge, welche aus den Sulfureten und aus den unterschwefligsauren Salzen durch Oxydation gebildet wurde.

Kohlensäure findet sich in den Quellen des Hercules-Bades theils gar nicht (Elisen-, Kaiser-, Ferdinandsquelle), theils in nur sehr geringer Menge. Behufs ihrer Bestimmung wurden die Niederschläge verwendet, welche sich in 500—600 CC. des unmittelbar am Ursprung der Quellen geschöpften Wassers nach Zusatz von ammoniakalischer Chlorbaryumlösung, theils auf dem Boden, theils an den Wandungen der mit Kautschuckstopfen verschlossenen Flaschen abgesetzt hatten. Sie wurden bis zum Verschwinden der alkalischen Reaction mit heissem Wasser gewaschen, in gemessenen Mengen $^1/_{10}$ Normalsalpetersäure gelöst, die saure Flüssigkeit mit $^1/_{10}$ Normalnatron rücktitrirt. Um so viel weniger Natron verbraucht wurde, als die verwendete Salpetersäure für sich in Anspruch nimmt, kommt auf Rechnung der an Baryt gebunden gewesenen Kohlensäure.

Die Gesammtmenge der Alkalien, welche an Chlor gebunden den vorwiegendsten Bestandtheil des Abdampfrückstandes der sämmtlichen Quellwässer bilden, wurde in folgender Weise ermittelt. Aus abgewogenen Wassermengen wurde der Kalk und die Magnesia durch alkalifreies Barytwasser gefällt, der überschüssige Baryt aus den Filtraten durch Zusatz von Kleesäure, Eindampfen und schwaches Glühen des Trockenrückstandes entfernt, die Lösung des letztern auf die Anwesenheit alkalischer Erden geprüft und nachdem sie frei davon befunden wurde, unter Zusatz von Salzsäure wieder zur Trockene gebracht, das Gesammtgewicht des auf 160° erhitzten Abdampfrückstandes und sodann dessen Chlorgehalt mittelst salpetersaurer Silberlösung bestimmt und aus den hierdurch erhaltenen Zahlen die Menge von Kalium- und Natriumchlorid berechnet. Um auch für diese Bestimmung eine Controle zu erhalten, wurden in abgewogenen Wassermengen die Alkalien als Sulfate bestimmt.

Die Bestimmung des Kalks, der Magnesia, der Schwefelsäure, des Chlors geschah nach den allgemein gebräuchlichen Methoden.

Wegen der sehr geringen Mengen, in welchen das Lithium, das Aluminium und die Phosphorsäure vorhanden sind, unterblieb deren quantitative Bestimmung.

Der Brom- und Jodgehalt wurde nur im Wasser der Ludwigs- und der Augenbadquelle quantitativ ermittelt. Da die erstgenannte Therme an der obern, die letztgenannte an der untern Grenze des Quellengebietes zu Tage tritt, so darf wohl vorausgesetzt werden, dass auch der Jod- und Bromgehalt der dazwischen liegenden und der benachbarten Quellen nicht erheblich davon abweichen werde.

Analytische Ergebnisse.

1. Die Herculesquelle. Wasser geschöpft im Nov. 1867, Temperatur 56° C., spec. Gewicht 1·002.

Schwefelsäure. 1015·5 Gr. Wasser geben 0·3314 schwefelsaures Baryum = 0·1137 SO_3,

591·0 Gr. Wasser geben 0·1945 schwefelsaures Baryum = 0·0666 SO_3.

Somit sind in 10.000 Theilen enthalten:

a) 1·119
b) 1·126 } Mittel 1·122 SO_3.

Chlor. 134·4 Gr. Wasser fordern 42·5 CC. Silberlösung à 10 Mllgr. NaCl = 0·2579 Cl.

93·56 Gr. Wasser fordern 29·55 CC. Silberlösung à 10 Mllgr. NaCl = 0·1793 Cl.

In 10.000 Theilen sind enthalten:

a) 19·18
b) 19·16 } Mittel: 19·17 Cl.

Kohlensäure. Der Barytniederschlag aus 600 CC. Wasser fordert:

a) 18·0 CC. 1/10 Normalsalpetersäure = 0·0396 Gr. CO_2, in 10.000 Theilen 0·660
b) 17·7 CC. 1/10 Normalsalpetersäure = 0·0389 Gr. CO_2, in 10.000 Theilen 0·649
} Mittel: 0·654.

Kieselerde. 499·9 Gr. Wasser geben 0·020 Gr. SiO_2, in 10.000 Theilen 0·400
513·4 Gr. Wasser geben 0·0199 Gr. SiO_3, in 10.000 Theilen 0·388
} Mittel: 0·394.

Kalk. 499·9 Gr. Wasser geben 0·582 $CaCO_3$ mit 0·3259 CaO, in 10.000 Theilen 6·51, 513·4 Gr. Wasser geben 0·6032 $CaO.CO_3$ mit 0·3378 CaO, in 10.000 Theilen 6·57, — Mittel: 6·54.

Magnesia. 499·9 Gr. Wasser geben 0·0112 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·004 MgO, in 10.000 Theilen 0·080, 513·4 Gr. Wasser geben 0·111 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·003 MgO, in 10.000 Theilen 0·077, — Mittel: 0·078.

Alkalichloride. 500 Gr. Wasser geben 1·0325 NaCl + KCl mit 2·488 AgCl = 0·6155 Chlor,

2519 Gr. Wasser geben 0·5189 NaCl + KCl mit 1·251 AgCl = 0·3094 Chlor.

In 10.000 Theilen sind also enthalten:

a) 20·65 mit 12·31 Chlor — 18·97 NaCl, 1·68 KCl

b) 20·59 mit 12·28 Chlor — 19·00 NaCl, 1·58 KCl.

Abdampfrückstand. 150·56 Gr. Wasser geben 0·518, somit 10.000 Theile 34·41, 151·0 Gr. Wasser geben 0·5195, somit 10.000 Theile 34·40, — Mittel: 34·405.

150·56 Gr. Wasser geben mit Schwefelsäure verdunstet 0·6226 Rückstand,

151·0 Gr. Wasser geben mit Schwefelsäure verdunstet 0·6235 Rückstand,

somit 10.000 Theile 41·35, 41·29 — Mittel: 41·32 schwefelsaure Salze.

Das Thermalwasser von 1868 enthielt 28·78 feste Bestandtheile mit 16·55 Alkalichloriden.

2. Karlsquelle. Wasser geschöpft November 1867, Temp. 41·2° C. — spec. Gewicht 1·0016.

Schwefelsäure. 1023·1 Gr. Wasser geben 0·245 $BaSO_4$ mit 0·0839 SO_3, in 10·000 Theilen 0·820, 1024 Gr. Wasser geben 0·242 $BaSO_4$, mit 0·0831 SO_3 in 10.000 Theilen 0·813, — Mittel: 0·816.

Auf Jod wirkende Schwefelverbindungen.

250 CC. Wasser an der Quelle bestimmt fordern 17·3 CC. Jodlösung (à 1·22 Mllgr. Jod) = 2·825 Mllgr. H_2S,

250 CC. Wasser an der Quelle bestimmt fordern 17·2 CC. Jodlösung (à 1·22 Mllgr. Jod) = 2·809 Mllgr. H_2S,

400 CC. Wasser im Laboratorium bestimmt fordern 19·45 CC. Jodlösung (à 1·08 Mllgr. Jod) = 2·082 Mllgr. H_2S,

451 CC. Wasser im Laboratorium bestimmt fordern 22·5 CC. Jodlösung (à 0·8 Mllgr. Jod) = 2·409 Mllgr. H_2S.

Als Schwefelwasserstoff berechnet ergibt sich für 10.000 Theile Wasser:

an der Quelle 0·113, 0·112 } Mittel: 0·1125 H_2S,

im Laboratorium 0·052, 0·053 } Mittel: 0·0525 H_2S.

504·3 Gr. Wasser geben nach dem Einleiten von Chlorgas 0·138 Gr. $BaSO_4$ = 0·0473 SO_3,

502·1 Gr. Wasser geben nach dem Einleiten von Chlorgas 0·136 Gr. $BaSO_4$ = 0·0467 SO_3,

somit 10.000 Theile 0·938, 0·931 } Mittel: 0·934 SO_3, somit bleibt nach Abzug der in 10.000

0·934
Theilen Wasser vorhandenen 0·816 SO_3
0·118, die 0·050 H_2S entsprechen.

Das aus 1023·1 Gr. Wasser erhaltene und oxydirte Schwefelcadmium gibt 0·040 Gr. $BaSO_4$ = 0·0058 H_2S, in 10.000 Theilen also: 0·0569 H_2S.

Wie aus diesen Zahlen ersichtlich ist, hat das Wasser der Karlsquelle bis zur Zeit, wo es der Analyse unterzogen worden war, bereits die Hälfte des Sulfuret bildenden Schwefels verloren. Am Boden der Flasche war abgeschiedener Schwefel deutlich wahrnehmbar. Ob die im Wasser vorhandene Schwefelsäure nicht zum — allerdings kleinsten — Theil durch Oxydation aus dem Sulfuret bildenden Schwefel entstanden ist, muss unentschieden bleiben.

Chlor. 40·0 Gr. Wasser fordern 9·25 CC. Silberlösung à 5·947 Chlor = 0·055 Chlor,

40·1 Gr. Wasser fordern 9·3 CC. Silberlösung à 5·947 Chlor = 0·055 Chlor,

somit sind in 10.000 Theilen enthalten 13·79 Chlor.

Kohlensäure. Der Barytniederschlag aus 550·8 Gr. Wasser neutralisirte 14·5 CC. $^1/_{10}$ Normalsalpetersäure = 0·0319 CO_2:

der Barytniederschlag aus 550·8 Gr. Wasser neutralisirte 13·45 CC. $^1/_{10}$ Normalsalpetersäure = 0·0296 CO_2;

somit sind in 10.000 Theilen enthalten:

0·549 }
0·538 } Mittel: 0543 CO_2.

Kieselerde. 500 Gr. Wasser geben 0·0170 SiO_2, in 10.000 Theilen 0·340,
500·4 Gr. Wasser geben 0·0174 SiO_2, in 10.000 Theilen 0·3476, } Mittel: 0·343.

Kalk. 500 Gr. Wasser geben 0·413 $CaCO_3$ = 0·231 CaO, in 10.000 Theilen 4·62,
500·4 Gr. Wasser geben 0·419 $CaCO_3$ = 0·235 CaO, in 10.000 Theilen 4·69, } Mittel: 4·65.

Magnesia. 500 Gr. Wasser geben 0·0109 $Mg_2P_2O_7$ = 0·0038 MgO, in 10.000 Theilen 0·077,
500·4 Gr. Wasser geben 0·0100 $Mg_2P_2O_7$ = 0·0036 MgO, in 10.000 Theilen 0·072, } Mittel: 0·074.

Alkalichloride. 132·0 Gr. Wasser geben 0·206 NaCl + KCl mit 0·4877 AgCl = 0·1206 Chlor,

121·2 Gr. Wasser geben 0·1885 NaCl + KCl mit 0·4458 AgCl = 0·1103 Chlor,

somit geben 10.000 Theile Wasser:

15·62 NaCl + KCl mit 9·140 Chlor, { 13·05 NaCl, 2·57 KCl.

15·55 NaCl + KCl mit 9·100 Chlor, { 13·00 NaCl, 2·55 KCl.

130 Gr. Wasser geben 0·2519 Na_2SO_4 + K_2SO_4, somit 10.000 Theile 19·34. Aus den Alkalichloriden berechnen sich 18·84 Sulfate.

Abdampfrückstand. 100·4 Gr. Wasser geben 0·253 Rückstand und 0·302 schwefelsaure Salze,

130·3 Gramm Wasser geben 0·328 Rückstand und 0·392 schwefelsaure Salze,

somit 10.000 Theile:

25·180 Rückstand und 30·07 schwefelsaure Salze
25·172 „ „ 30·16 „ „

Im August 1868 geschöpftes Wasser gab 25·05 Rückstand, 15·79 Alkalichloride und 0·0997 Schwefelwasserstoff.

3. Ludwigsquelle. Wasser geschöpft im November 1867, Temperatur 45°, spec. Gewicht 1·0020.

Schwefelsäure. 997·0 Gr. Wasser geben 0·201 $BaSO_4$ mit 0·069 SO_3, also 0·692 SO_3 in 10.000 Theilen,

997·2 Gr. Wasser geben 0·203 $BaSO_4$ mit 0·0696 SO_3, also 0·698 SO_3 in 10.000 Theilen.

Somit im Mittel 0·695.

Auf Jod wirkende Schwefelverbindungen.

250 CC. Wasser an der Quelle geprüft fordern 23 CC. Jodlösung (à 1·22 Mllgr. Jod) = 3·76 Mllgr. H_2S,

250 CC. Wasser an der Quelle geprüft fordern 22·9 CC. Jodlösung (à 1·22 Mllgr. Jod) = 3·71 Mllgr. H_2S,

150 CC. Wasser im Laboratorium geprüft fordern 21·0 Jodlösung (à 0·8 Mllgr. Jod) = 2·24 Mllgr. H_2S.

Somit ergibt sich als H_2S berechnet für 10.000 Theile Wasser an der Quelle: 0·150 H_2S
0·149
im Laboratorium: 0·149.

1001·4 Gr. Wasser geben nach der Oxydation mit Chlor 0·291 $BaSO_4$ = 0·099 SO_3 = 1·011 in 10.000 Theilen,

1005·0 Gr. Wasser geben nach der Oxydation mit Chlor 0·295 $BaSO_4$ mit 0·101 SO_3 = 1·010 in 10.000 Theilen.

Das Schwefelcadmium aus 997 Gr. Wasser gibt 0·097 $BaSO_4$, dem 0·0141 H_2S = 0·142 H_2S in 10.000 Theilen entsprechen.

1463 Gr. Wasser geben nach der Ausfällung des H_2S und nach der Oxydation 0·320 $BaSO_4$ mit 0·1098 SO_3,

1579 Gr. Wasser geben nach der Ausfällung des H_2S und nach der Oxydation 0·350 $BaSO_4$ mit 0·1201.

Sonach 10.000 Theile: 0·750, 0·760 } Mittel: 0·755 SO_3,

der nach Abzug der im Wasser ursprünglich vorhandenen Schwefelsäure 0·036 unterschweflige Säure entsprechen. Da diese zur Oxydation in Tetrathionsäure 0·0476 Jod in Anspruch nimmt, so berechnet sich hiernach die vom Jod oxydirte Schwefelwasserstoffmenge zu 0·1435.

Chlor. 20·3 Gr. Wasser fordern 58 CC. Silberlösung (à 0·618 Mllgr. Chlor) = 0·0358 Cl. = 17·67 in 10.000 Theilen,
20·08 Gr. Wasser fordern 57 CC. Silberlösung (à 0·618 Mllgr. Chlor) = 0·0352 Cl. = 17·62 in 10.000 Theilen,
also im Mittel: 17·64.

Jod. Das aus 8100 Gr. Wasser durch NO_2 freigemachte Jod forderte 3 CC. unterschwefligsaures Natron à 0·712 Mllgr. Jod, beträgt somit 0·002136 oder in 10.000 Theilen 0·0026 Jod.

Brom. Aus dem alkoholischen Auszug derselben Wassermenge wurde nach Entfernung des Jod 0·956 Gr. Silberniederschlag erhalten, der in Chlorgas sein Gewicht auf 0·953 verminderte, somit sind in 10.000 Theilen Wasser 0·0053? Brom enthalten.

Kohlensäure. Der Barytniederschlag aus 581·2 Gr. Wasser erfordert 9·85 CC. $^1/_{10}$ Normalsalpetersäure.
Der Barytniederschlag aus 521·0 Gr. Wasser fordert 9·85 CC. $^1/_{10}$ Normalsalpetersäure.

Es enthielt sonach I. 0·0216 od. 10.000 Theile 0·372 Kohlensäure,
II. 0·0209 oder 10.000 Theile 0·379 Kohlens., } Mittel: 0·375.

Kieselerde. 500 Gr. Wasser hinterlassen 0·0214 SiO_2, also 10.000 Theile 0·429,
499·8 Gr. Wasser hinterlassen 0·0218 SiO_2, also 10.000 Theile 0·436, } Mittel 0·432.

Kalk. 500 Gr. Wasser geben 0·470 $CaCO_3$ mit 0·263 CaO, also 10.000 Theile 5·264 CaO,
499·8 Gr. Wasser geben 0·474 $CaCO_3$ mit 0·265 CaO, also 10.000 Theile 5·310 CaO, } Mittel: 5·284.

Magnesia. 500 Gr. Wasser geben 0·008 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0028 MgO, also 10.000 Theile 0·057,
499·8 Gr. Wasser geben 0·0083 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0029 MgO, also 10.000 Theile 0·059, } Mittel: 0·058.

Alkalichloride. 120 Gr. Wasser geben 0·2457 NaCl + KCl und 0·5862 AgCl mit 0·145 Chlor,
131·63 Gr. Wasser geben 0·268 NaCl + KCl und 0·6378 AgCl mit 0·1578 Chlor,
sonach enthalten 10.000 Theile:

20·47 NaCl+KCl mit 12·083 Chlor { 17·88 NaCl, 2·59 KCl

20·36 NaCl + KCl mit 11·999 Chlor { 17·58 NaCl, 2·78 KCl.

140 Gr. Wasser geben 0·3454 Na_2SO_4 + K_2SO_4, also 10.000 Theile 24·67. Aus den Chloriden berechnen sich 24·57 Sulfate.

Abdampfrückstand. 100·49 Gr. Wasser geben 0·316 Rückstand und 0·379 schwefelsaure Salze,
100·5 Gr. Wasser geben 0·317 Rückstand und 0·379 schwefelsaure Salze,
somit 10.000 Theile I. 31·44 Rückstand und 37·76 Sulfate
II. 31·54 „ „ 37·71 „

Im Jahre 1868 wurde mittelst Jod an der Quelle dieselbe Menge von Schwefelverbindungen wie im Jahre 1867 gefunden.

4. Kaiserquelle. Wasser im November 1867 geschöpft, Temperatur 56·6°, spec. Gewicht 1·0053.

Schwefelsäure. 1145·0 Gr. Wasser geben 0·0534 $BaSO_4$ mit 0·0183 SO_3, in 10.000 Theilen 0·160 SO_3,
1185·0 Gr. Wasser geben 0·0548 $BaSO_4$ mit 0·0188 SO_3, in 10.000 Theilen 0·159 SO_3.

Auf Jod wirkende Schwefelverbindungen.

200 CC. Wasser an der Quelle geschöpft fordern 65 CC. Jodlösung à 1·221 Mllgr. J. = 10·621 Mllgr. H_2S,

200 CC. Wasser an der Quelle geschöpft fordern 64·8 CC. Jodlösung à 1·221 Mllgr. J. = 10·542 Mllgr. H_2S,

200 CC. Wasser im Laboratorium geprüft fordern 98·9 CC. Jodlösung à 0·8 Mllgr. J. = 10·60 Mllgr. H_2S.

Somit ergibt sich als H_2S berechnet für 10.000 Theile Wasser:

an der Quelle: { 0·530 H_2S, 0·529 „

im Laboratorium: 0·530 „

1001·5 Gr. Wasser geben nach der Oxydation mit Chlor 0·419 $BaSO_4$ mit 0·144 SO_3 = 1·437 in 10.000 Theilen,

1001·8 Gr. Wasser geben nach der Oxydation mit Chlor 0·425 $BaSO_4$ mit 0·146 SO_3 = 1·457 in 10.000 Theilen.

Das Schwefelcadmium aus: I. 1005 Gr. Wasser gibt 0·350 $BaSO_4$ = 0·051 H_2S = 0·507 H_2S in 10.000 Theilen,

II. 1005 Gr. Wasser gibt 0·354 $BaSO_4$ = 0·0514 H_2S = 0·511 H_2S in 10.000 Theilen.

2010 Gr. des nach Ausfällung des H_2S oxydirten Wassers geben 0·196 $BaSO_4$ mit 0·067 SO_3, also 10.000 Theile Wasser 0·335 SO_3, der nach Abzug von 0·160 im Wasser vorhandener SO_3 = 0·105 unterschweflige Säure entsprechen. Auf 200 CC. Wasser entfallen sonach 2·116 Mllgr. unterschweflige Säure, die zur Bildung von Tetrathionsäure 2·8 Mllgr. Jod erfordern, sonach berechnet sich aus dem weiter verbrauchten Jod die Menge des H_2S = 0·511; aus dem Schwefelcadmium = 0·509 im Mittel und aus der Schwefelsäure-Differenz der oxydirten Wässer = 0·475.

Chlor. 10·142 Gr. Wasser fordern 5·8 CC. Aglösung (à 6·068 Chlor) = 0·03519 Cl = 34·70 in 10.000 Theilen,

20·084 Gr. Wasser fordern 11·5 CC. Aglösung (à 6·068 Chlor) = 0·0697 Cl = 34·74 in 10·000 Theilen,

also im Mittel: 34·72.

Kieselerde. 1001·6 Gr. Wasser geben 0·044 SiO_2, in 10.000 Theilen also 0·438,

1015·0 Gr. Wasser geben 0·045 SiO_2, in 10.000 Theilen also 0·443,

} Mittel: 0·440.

Kalk. 1001·6 Gr. Wasser geben 1·952 $CaCO_3$, mit 1·093 CaO, somit 10.000 Theile 10·91 CaO, 1015·0 Gr. Wasser geben 1·962 $CaCO_3$ mit 1·098 CaO, somit 10.000 Theile 10·84, } Mittel: 10·87.

Magnesia. 1001·6 Gr. Wasser geben 0·0325 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0117 MgO, somit 10.000 Theile 0·117,

1015·0 Gr. Wasser geben 0·0363 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·013 MgO, somit 10.000 Theile 0·128,

also im Mittel 0·122.

Alkalichloride. 107·26 Gr. Wasser geben 0·3945 NaCl+KCl mit 0·9297 AgCl mit 0·230 Chlor,

109·5 Gr. Wasser geben 0·4021 NaCl + KCl 0·9479 AgCl mit 0·2345 Chlor,

somit enthalten 10.000 Theile:

36·77 NaCl + KCl mit 21·44 Chlor { 30·21 NaCl, 6·56 KCl.

36·72 „ „ „ „ 21·42 „ { 30·16 NaCl, 6·56 KCl.

150 Gr. Wasser geben 0·6653 Na_2SO_4+K_2SO_4 = 44·35 in 10.000 Theilen; aus den Chloriden berechnen sich 44·32 Sulfate.

Abdampfrückstand. 251·7 Gr. Wasser geben 1·480 Rückstand und 1·802 schwefelsaure Salze,

151·96 Gr. Wasser geben 0·893 Rückstand,

somit 10.000 Theile:

I. 58·97 und 71·50 schwefelsaure Verbindungen,

II. 58·76.

Das im August 1868 geschöpfte Wasser enthielt 59·43 festen Rückstand, 37·07 Alkalichloride, 10·42 Kalk und 0·538 als H_2S berechnete, auf Jod wirkende Schwefelverbindungen. Wasser vom März 1869 enthielt nur 57·94 feste Bestandtheile mit 36·29 Alkalichloriden.

5. Ferdinandsquelle. Wasser geschöpft im November 1867, Temperatur 51·6° Cels., spec. Gewicht 1·0057.

Schwefelsäure. 563·0 Gr. Wasser geben 0·0125 $BaSO_4$ mit 0·00428 SO_3, in 10.000 Theilen 0·076,

563·0 Gr. Wasser geben 0·0119 $BaSO_4$ mit 0·00408 SO_3, in 10.000 Theilen 0·072,

also im Mittel 0·074.

Auf Jod wirkende Schwefelverbindungen.

300 CC. Wasser an der Quelle geprüft fordern 108·8 CC. Jodlösung à 1·20 Mllgr. Jod = 17·782 Mllgr. H_2S,

200 CC. Wasser an der Quelle geprüft fordern 73·8 CC. Jodlösung à 1·20 Mllgr. Jod = 11·931 Mllgr. H_2S,

150 CC. Wasser im Laboratorium geprüft fordern 84 CC. Jodlösung à 0·8 Mllgr. Jod = 8·99 Mllgr. H_2S.

Somit entfällt für 10.000 Theile als H_2S berechnet an der Quelle: 0·593
0·597

im Laboratorium: 0·595.

1003·5 Gr. Wasser mit Chlor oxydirt geben 0·437 $BaSO_4$ = 0·149 SO_3, in 10.000 Theilen 1·495,

1030·5 Gr. Wasser mit Chlor oxydirt geben 0·454 $BaSO_4$ = 0·155 SO_3, in 10.000 Theilen 1·504.

Das Schwefelcadmium aus 922 Gr. Wasser gibt 0·373 $BaSO_4$, dem für 10.000 Theile 0·590 H_2S entsprechen.

922 Gr. Wasser geben nach Fällung des H_2S und Oxydation 0·030 $BaSO_4$ = 0·010 SO_3, in 10.000 Theilen 0·114. Wird von 0·114 die im Wasser ursprünglich vorhandene SO_3 = 0·074 abgezogen, so ergibt sich als Rest 0·040, dem 0·024 unterschweflige Säure entsprechen. Aus der Differenz der Schwefelsäuremengen in den vor und nach der Ausfällung des H_2S oxydirten Wässern ergibt sich $\left(\begin{array}{c}1{\cdot}499\\ 0{\cdot}114\\ \hline 1{\cdot}385\end{array}\right)$ der H_2S-gehalt zu 0·588.

Chlor. 10·052 Gr. Wasser fordern 5·9 CC. Silberlösung à 6·068 Mllgr. Chlor = 0·0358 Cl, in 10.000 Theilen 35·642,

10·057 Gr. Wasser fordern 5·9 CC. Silberlösung à 6·068 Mllgr. Chlor = 0·0358 Cl, in 10.000 Theilen 35·637,

somit im Mittel 35·634.

Kieselerde. 1002·7 Gr. Wasser geben 0·0416 SiO_2, somit 10.000 Theile 0·414,
511·5 Gr. Wasser geben 0·021 SiO_2, somit 10.000 Theile 0·412,
} Mittel: 0·413.

Kalk. 1002·7 Gr. Wasser geben 2·043 $CaCO_3$ mit 1·140 CaO, also 10.000 Theile 11·44,
511·5 Gr. Wasser geben 1·057 $CaCO_3$ mit 0·5919 CaO, also 10.000 Theile 11·57,
} Mittel: 11·50.

Magnesia. 1002·7 Gr. Wasser geben 0·019 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0069 MgO, in 10.000 Theilen 0·069,

511·5 Gr. Wasser geben 0·010 $Mg_2P_2O_2$ mit 0·0036 MgO, in 10.000 Theilen 0·070.

Alkalichloride. 515·2 Gr. Wasser geben 1·930 NaCl + KCl und 4·567 AgCl mit 1·1299 Chlor,

500·4 Gr. Wasser geben 1·874 NaCl + KCl und 4·439 AgCl mit 1·0958,

somit enthalten 10.000 Theile:

37·46 Alkalichloride mit 21·93 Chlor { 31·36 NaCl, 6·10 KCl

37·43 „ „ 21·90 „ { 31·16 NaCl, 6·29 KCl.

Abdampfrückstand. 100·6 Gr. Wasser geben 0·615 Rückstand und 0·740 schwefelsaure Salze,

100·6 Gr. Wasser geben 0·616 Rückstand und 0·739 schwefelsaure Salze,

somit enthalten 10.000 Theile:

61·13 Rückstand und 73·55 schwefelsaure Salze,
61·19 „ „ 73·45 „ „

Im August 1868 geschöpftes Wasser gab 61·64 Rückstand mit 37·47 Alkalichloriden (21·80 Chlor) und 0·613 H_2S.

Im März 1869 geschöpftes Wasser enthält 63·82 Rückstand mit 38·20 Alkalichloriden (22·612 Chlor).

6. Franzensquelle. Wasser geschöpft im November 1867, Temperatur 42·2°, spec. Gewicht 1·0059.

Schwefelsäure. 1005 Gr. Wasser geben 0·0034 $BaSO_4$ mit 0·00117 SO_3, in 10.000 Theilen 0·011,

1005·5 Gr. Wasser geben 0·0030 $BaSO_4$ mit 0·00103 SO_3, in 10.000 Theilen 0·010.

Auf Jod wirkende Schwefelverbindungen.

200 CC. Wasser an der Quelle geprüft fordern 80·7 CC. Jodlösung à 1·22 Mllgr. Jod = 13·18 H_2S,

200 CC. Wasser an der Quelle geprüft fordern 80·5 CC. Jodlösung à 1·22 Mllgr. Jod = 13·15 H_2S.

150 CC. Wasser im Laboratorium geprüft fordern 90·0 CC. Jodlösung à 0·8 Mllgr. Jod = 9·637 H_2S,

sonach entfällt für 10.000 Theile:

als H_2S berechnet: an der Quelle: 0·655
0·653
im Laboratorium: 0·638,

1003·4 Gr. mit Chlor oxydirtes Wasser geben 0·466 $BaSO_4$ mit 0·160 SO_3, in 10.000 Theilen 1·590,

1003·2 Gr. mit Chlor oxydirtes Wasser geben 0·463 $BaSO_4$ mit 0·159 SO_3, in 10.000 Theilen 1·584.

Das Schwefelcadmium aus 1004 Gr. Wasser gibt 0·440 $BaSO_4$, dem für 10.000 Theile 0·638 H_2S entsprechen.

1004 Gr. Wasser geben nach Fällung des H_2S und nach der Oxydation 0·178 $BaSO_4$ = 0·061 SO_3, dem nach Abzug der im Wasser vorhandenen Schwefelsäure (0·060 — 0·011 = 0·049) 0·029 unterschweflige Säure entsprechen.

Aus der Differenz der Schwefelsäuremengen der vor und nach Ausfällung des H_2S oxydirten Wässer berechnet sich die Menge H_2S für 10.000 Theile = 0·648.

Chlor. 47·65 Gr. Wasser fordern 33·9 CC. Silberlösung à 6·068 Mllgr. Cl = 0·2057 Cl, in 10.000 Theilen 43·16,

51·56 Gr. Wasser fordern 36·5 CC. Silberlösung à 6·068 Mllgr. Cl = 0·2215 Cl, in 10.000 Theilen 43·11,

sonach im Mittel 43·13.

Kohlensäure. Der Barytniederschlag von 605 Gr. Wasser fordert 38·2 CC. $^1/_{10}$ Normalsalpetersäure = 0·084 CO_2, somit in 10.000 Theilen 0·1389.

Für 603·5 Gr. Wasser sind 25·6 CC. $^1/_{10}$ Normalsäure = 0·078 CO_2 nöthig, somit enthalten 10.000 Theile 0·136 CO_2.

Kieselerde. 263·5 Gr. Wasser geben 0·0139 SiO_2, somit 10.000 Theile 0·527,
512·4 Gr. Wasser geben 0·0275 SiO_2, somit 10.000 Theile 0·536,
} Mittel: 0·531.

Kalk. 263·5 Gr. Wasser geben 0·6607 $CaCO_3$ mit 0·370 CaO, sonach 10.000 Theile 14·04,
512·4 Gr. Wasser geben 1·284 CaO_3 mit 0·719 CaO, sonach 10.000 Theile 14·03.

Magnesia. 263·5 Gr. Wasser geben 0·009 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0032 MgO, sonach 10.000 Theile 0·121,
512·4 Gr. Wasser geben 0·016 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0058 MgO, sonach 10.000 Theile 0·011,
im Mittel: 0·118.

Alkalichloride. 168 Gr. Wasser geben 0·7338 NaCl + KCl mit 1·7612 AgCl = 0·4357 Chlor,
100·8 Wasser geben 0·440 NaCl + KCl mit 1·057 AgCl = 0·2615 Chlor,
sonach entfällt auf 10.000 Theile:

an Alkalichloriden 43·67 mit 25·93 Chlor { 39·33 NaCl, 4·34 KCl
43·65 „ 25·98 „ { 39·47 NaCl, 4·16 KCl

133·26 Gr. Wasser geben 0·7035 Alkalisulfate = 52·64 in 10.000 Theilen.

Aus den Chloriden berechnen sich 52·804.

Abdampfrückstand. 151 Gr. Wasser geben 1·0864 Rückstand.
151 Gr. Wasser geben 1·087 Rückstand und 1·329 schwefelsaure Salze,
somit 10.000 Theile 71·94 und 71·99 Rückstand und 88·01 schwefelsaure Salze.

Wasser von August 1867 gab 72·06 feste Bestandtheile mit 43·63 Alkalichloriden (20·05 Chlor) und 0·667 H_2S.

Um die Kenntniss über die chemische Zusammensetzung sämmtlicher im Thermalgebiet der Herculesbäder zu Tage tre-

tenden Quellen zu vervollständigen, war es geboten, auch die nachverzeichneten Thermalwässer — unbeachtet sie nur beschränkte Anwendung finden — der quantitativen Analyse zu unterziehen. Es blieben hierbei die in sehr geringer Menge vorkommenden Bestandtheile unberücksichtigt. Es ist schon früher erwähnt worden, dass der Gehalt an Chlor und an Schwefelverbindungen in den tiefer gelegenen Quellen zunimmt, und dass Jod und Brom in allen Thermen vorkomme. Um zu erfahren, ob diese beiden Haloide in den flussabwärts gelegenen Quellen mit der Zunahme der Chloride gleichfalls in vermehrter Menge auftreten, wurde der Brom- und Jodgehalt im Wasser der Augenbadquelle, die am rechten Cserna-Ufer das Thermalgebiet abschliesst, ermittelt.

Die Analyse dieser Quellen hat Professor Dr. Köttsdorfer ausgeführt.

7. Karolinenquelle. Durch den im Jahre 1868 vorgenommenen Umbau hat diese Quelle sowohl rücksichtlich ihrer Ergiebigkeit als ihres chemischen Bestandes wesentliche Veränderungen erlitten, es wurde deshalb eine vollständige Analyse des Wassers dieser Quelle vor und nach dem Umbau durchgeführt.

Das Wasser im November 1867 geschöpft zeigte das spec. Gewicht 1·0031 und die Temperatur 37·4°. Im August 1868 war die Temperatur dieser Quelle auf 28·4° C. gesunken. Die Menge der festen Bestandtheile hatte sich um ein Dritttheil vermindert.

Die Analyse ergab für:

Schwefelsäure. 1867. 250·5 Gr. Wasser geben 0·022 $BaSO_4$ mit 0·0075 SO_3 = 0·301 in 10.000 Theilen,
250·8 Gr. Wasser geben 0·023 $BaSO_4$ mit 0·0079 SO_3 = 0·314 in 10.000 Theilen, } Mittel 0·307,

1868. 200·3 Gr. Wasser geben 0·032 $BaSO_4$ mit 0·011 SO_3 = 0·549 in 10.000 Theilen,
200·3 Gr. Wasser geben 0·032 $CaSO_4$ mit 0·011 SO_3 = 0·549 in 10.000 Theilen, } 0·549.

Auf Jod wirkende Schwefelverbindungen.

1867, an der Quelle 300 CC. Wasser fordern 68 CC. Jodlösung à 1·22 Mllgr. Jod = 0·0111 H_2S = 0·371 in 10.000 Theilen,

1868, an der Quelle 150 CC. Wasser fordern 31·5 CC. Jodlösung à 0·76 Mllgr. Jod = 0·003 H_2S = 0·214.

Chlor. 1867. 14·930 Gr. Wasser fordern 4·85 CC. Aglösung à 10 Mllgr. NaCl = 0·024 Cl = 19·71 14·970 Gr. Wasser fordern 4·85 CC. Aglösng. à 10 Mllgr. NaCl = 0·024 Cl = 19·66	Mittel 19·68,
1868. 63·09 Gr. Wasser fordern 12·03 CC. Aglsng. à 10 Mllgr. NaCl = 0·0731 = 11·59 Cl, 47·06 Gr. Wasser fordern 9 CC. Aglösng. à 10 Mllgr. NaCl. = 0·0546 = 11·60 Cl,	11·595.
Kieselerde. 1867. 998·16 Gr. Wasser geben 0·038 SiO_2, also in 10.000 Theilen 0·38, 1000 Gr. Wasser geben 0·038 SiO_3, also in 10.000 Theilen 0·38,	0·380,
1868. 249·4 Gr. Wasser geben 0·006 SiO_2, also in 10.000 Theilen 0·241, 249·6 Gr. Wasser geben 0·006 SiO_2, also in 10.000 Theilen 0·246,	0·243.
Kalk. 1867. 998·16 Gr. Wasser geben 1·128 $CaCO_3$ mit 0·6318 CaO, in 10.000 Theilen 6·330, 1000·35 Gr. Wasser geben 1·130 $CaCO_3$ mit 0·6328 CaO, in 10.000 Theilen 6·326,	6·328,
1868. 249·37 Gr. Wasser geben 0·181 $CaCO_3$ mit 0·1014 CaO, in 10.000 Theilen 4·065, 249·58 Gr. Wasser geben 0·182 $CaCO_3$ mit 0·1019 CaO, in 10.000 Theilen 4·084,	4·074.
Magnesia. 1867. 998·16 Gr. Wasser geben 0·035 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0126 MgO, in 10.000 Theilen 0·126, 1000·35 Gr. Wasser geben 0·035 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0126 MgO, in 10.000 Theilen 0·125,	0·126,

1868. 249·37 Gr. Wasser geben 0·011 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·00396 MgO, in 10.000 Theilen 0·159, 249·58 Gr. Wasser geben 0·011 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·00396 MgO, in 10.000 Theilen 0·159, } Mittel 0·159.

Alkalichloride. 1867. 200·75 Gr. Wasser geben 0·414 NaCl + KCl, also 10.000 Theile 20·623, 200·73 Gr. Wasser geben 0·413 NaCl + KCl, also 10.000 Theile 20·575, } 20·599.

1868. 200·26 Gr. Wasser geben 0·240 NaCl+KCl, also 10.000 Theile 11·984, 200·18 Gr. Wasser geben 0·241 NaCl+KCl, also 10.000 Theile 12·039, } 12·01.

Abdampfrückstand. 1867. 250·6 Gr. Wasser geben 0·869 Rückstand und 1·029 schwefelsaure Salze,

somit 10.000 Theile 34·673 Rückstand und 41·063 schwefelsaure Salze,

250·5 Gr. Wasser geben 0·870 Rückstand und 1·031 schwefelsaure Salze,

somit 10.000 Theile 34·730 Rückstand und 41·144 schwefelsaure Salze.

1868. 161·6 Gr. Wasser geben 0·336 Rückstand, also 10.000 Theile 20·784,

157·9 Gr. Wasser geben 0·328 Rückstand, also 10.000 Theile 20·761,

250 Gr. Wasser geben 0·632 schwefelsaure Salze, also 10.000 Theile 25·280,

250·6 Gr. Wasser geben 0·634 schwefelsaure Salze, also 10.000 Theile 25·299.

8. Elisabethbrunnen. Wasser geschöpft: Nov. 1867. Temperatur: 44·6—45·2°, spec. Gewicht 1·0043.

Schwefelsäure. 100·4 Gr. Wasser geben 0·025 $BaSO_4$ mit 0·00858 SO_3 = 0·085 in 10.000 Theilen, 1000 Gr. Wasser geben 0·024 $BaSO_4$ mit 0·00823 SO_3 = 0·082 in 10.000 Theilen, } Mittel 0·0835.

Auf Jod wirkende Schwefelverbindungen.

100 CC. Wasser fordern 36·5 CC. Jodlösung à 1·221 Mllgr. Jod = 0·598 H_2S in 10.000 Theilen.

Chlor. 49·79 Gr. Wasser fordern 27·4 CC. Aglösung à 10 Mllgr. NaCl = 0·1662 Cl = 33·380,

31·96 Gr. Wasser fordern 17·55 CC. Aglösung à 10 Mllgr. NaCl = 0·1065 Cl = 33·321,

im Mittel: 33·350 in 10.000 Theilen.

Kieselerde. 999·94 Gr. Wasser geben 0·046 SiO_2, also in 10.000 Theilen 0·460,
1000·4 Gr. Wasser geben 0·045 SiO_2, also in 10.000 Theilen 0·450, } 0·455.

Kalk. 999·94 Gr. Wasser geben 1·868 $CaCO_2$ mit 1·0459 CaO, in 10.000 Theilen 10·460,
1000·4 Gr. Wasser geben 1·873 $CaCO_2$ mit 1·0489 CaO, in 10.000 Theilen 10·484, } 10·472.

Magnesia. 999·94 Gr. Wasser geben 0·025 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·009 MgO, in 10.000 Theilen 0·090,
1000·4 Gr. Wasser geben 0·026 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0094 MgO, in 10.000 Theilen 0·093, } 0·091.

Alkalichloride. 200 Gr. Wasser geben 0·696 NaCl + KCl und 1·661 Chlorsilber, somit 10.000 Theile 34·82 Alkalichloride mit: { 3·18 KCl, 31·61 NaCl.

Abdampfrückstand. 203·5 Gr. Wasser geben 1·128 Rückstand, somit 10·000 Theile 55·430,

203·5 Gr. Wasser geben 1·129 Rückstand, somit 10.000 Theile 55·479,

250·88 Gr. Wasser geben 1·692 schwefelsaure Salze, also 10.000 Theile 67·443,

250·94 Gr. Wasser geben 1·694 schwefelsaure Salze, also 10.000 Theile 67·518.

9. Augenbad. Wasser geschöpft: November 1867, Temperatur 51—51·2° C., spec. Gewicht 1·0049.

Schwefelsäure. 660 Gr. Wasser geben 0·106 $BaSO_4$ mit 0·03638 SO_3 = 0·551 in 10.000 Theilen, 630 Gr. Wasser geben 0·100 $BaSO_4$ mit 0·03432 SO_3 = 0·545 in 10·000 Theilen, } Mittel 0·548.

Auf Jod wirkende Schwefelverbindungen.

250 CC. Wasser fordern 63 CC. Jodlösung à 1·221 Mllgr. Jod = 0·010 H_2S = 0·412 H_2S in 10.000 Theilen.

Chlor. 10·03 Gr. Wasser fordern 6·7 CC. Aglösung à 10 Mllgr. NaCl = 0·04065 Cl = 40·534 in 10.000 Theilen,
20·07 Gr. Wasser fordern 13·4 CC. Aglösung à 10 Mllgr. NaCl = 0·08131 Cl. = 40·583 in 10.000 Theilen,
im Mittel: 40·558.

Brom- und Jodbestimmung. 9420 Gr. Wasser enthalten 0·0064 Jod = 0·0068 Jod in 10.000 Theilen,
9420 Gr. Wasser enthalten 0·0072 Brom = 0·0076 Brom in 10.000 Theilen.

Kieselerde. 1001·17 Gr. Wasser geben 0·047 SiO_2, also in 10.000 Theilen 0·469, 1001·08 Gr. Wasser geben 0·046 SiO_2, also in 10.000 Theilen 0·459, } Mittel 0·464.

Kalk. 1001·17 Gr. Wasser geben 2·323 $CaCO_3$ mit 1·3009 CaO, in 10.000 Theilen 12·994, 1001·22 Gr. Wasser geben 2·324 $CaCO_3$ mit 1·3014 CaO, in 10.000 Theilen 12·999, } 12.996.

Magnesia. 1001·17 Gr. Wasser geben 0·023 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0083 MgO, in 10.000 Theilen 0·083, 1001·22 Gr. Wasser geben 0·021 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0075 MgO, in 10.000 Theilen 0·076, } 0·079.

Alkalichloride. 133 Gr. Wasser geben 0·561 NaCl+KCl und 1·352 Chlorsilber, somit 10.000 Theile 42·07 Alkalichloride mit 3·33 KCl und 38·707 NaCl.
143 Gr. Wasser geben 0·605 NaCl + KCl und 1·455 Chlorsilber, somit 10.000 Theile 42·12 Alkalichloride mit 3·76 KCl und 38·36 NaCl.

Abdampfrückstand. 100·64 Gr. Wasser geben 0·683 Rückstand, somit 10.000 Theile 67·8657,
100·65 Gr. Wasser geben 0·683 Rückstand, somit 10.000 Theile 67·8589, } Mittel 67·86,
251·21 Gr. Wasser geben 2·052 schwefelsaure Salze, somit 10.000 Theile 81·684,
251·20 Gr. Wasser geben 2·052 schwefelsaure Salze, somit 10.000 Theile 81·688, } 81·68.

10. Josephsbrunnen. Wasser geschöpft: November 1867, Temperatur 55·3—55·7° C., spec. Gewicht 1·0039.

Schwefelsäure. 650 Gr. Wasser geben 0·087 $BaSO_4$ mit 0·029 SO_3 = 0·446 in 10.000 Theilen
420 Gr. Wasser geben 0·057 $BaSO_4$ mit 0·0196 SO_3 = 0·469 in 10.000 Theilen } Mittel 0·456.

Auf Jod wirkende Schwefelverbindungen.

250 CC. Wasser fordern 84·5 CC. Jodlösung à 1·221 Mllgr. J = 0·01381 = 0·520 H_2S in 10.000 Theilen.

Chlor. 9·98 Gr. Wasser fordern 6·65 CC. Aglösung à 10 Mllgr. NaCl = 0·0403 Cl = 40·433 in 10.000 Theilen,
51·72 Gr. Wasser fordern 34·4 Aglösung à 10 Mllgr. NaCl = 0·2087 Cl = 40·360 in 10.000 Theilen,
im Mittel 40·3965.

Kieselerde. 1000·5 Gr. Wasser geben 0·044 SiO_2, also in 10.000 Theilen 0·440,
1004·06 Gr. Wasser geben 0·047 SiO_2, also in 10.000 Theilen 0·468, } Mittel 0·454.

Kalk. 1000·5 Gr. Wasser geben 2·326 $CaCO_3$ mit 1·3026 CaO, in 10.000 Theilen 13·019,
1001·48 Gr. Wasser geben 2·321 $CaCO_3$ mit 1·2998 CaO, in 10.000 Theilen 12·979, } 12·999.

Magnesia. 1000·5 Gr. Wasser geben 0·023 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0083 MgO, in 10.000 Theilen 0·083,
1001·48 Gr. Wasser geben 0·023 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0083 MgO, in 10.000 Theilen 0·083, } 0·083.

Alkalichloride. 125 Gr. Wasser geben 0·526 NaCl+KCl und 1·2584 Chlorsilber, somit 10.000 Theile 42·08 Alkalichloride mit: 4·11 KCl und 37·97 NaCl.

Abdampfrückstand. 250·95 Gr. Wasser geben 1·703 Rückstand, somit in 10.000 Theilen 67·862,

251 Gr. Wasser geben 1·700 Rückstand, somit in 10.000 Theilen 67.730,

250·4 Gr. Wasser geben 2·039 schwefelsaure Salze, somit in 10.000 Theilen 81·430,

250·95 Gr. Wasser geben 2·045 schwefelsaure Salze, somit in 10.000 Theilen 81·490.

11. Fussbad. Wasser geschöpft: November 1867, Temperatur 44·2—44·4° C., spec. Gewicht 1·0052.

Schwefelsäure. 500 Grm. Wasser geben 0·084 $BaSO_4$ mit 0·0288 SO_3 = 0·576 in 10.000 Theilen, 500 Gr. Wasser geben 0·086 $BaSO_4$ mit 0·0295 SO_3 = 0·590 in 10.000 Theilen, } Mittel 0·583.

Auf Jod wirkende Schwefelverbindungen.

200 CC. Wasser fordern 64 CC. Jodlösung à 1·221 Mllgr. Jod = 0·01095 = 0·547 H_2S in 10.000 Theilen.

Chlor. 54·43 Gr. Wasser fordern 36·25 CC. Aglösung à 10 Mllgr. NaCl = 0·2199 Cl = 40·411 in 10.000 Theilen,

31·48 Gr. Wasser fordern 21 CC. Aglösung à 10 Mllgr. NaCl = 0·1274 Cl = 40·476 in 10.000 Theilen,

im Mittel: 40·444.

Kieselerde. 1004·4 Gr. Wasser geben 0·050 SiO_2, also in 10.000 Theilen 0·498, 501·04 Gr. Wasser geben 0·024 SiO_2, also in 10.000 Theilen 0·479, } Mittel 0·4885.

Kalk. 1004·4 Gr. Wasser geben 2·345 $CaCO_3$ mit 1·3132 CaO, in 10.000 Theilen 13·074, 501·04 Gr. Wasser geben 1·171 $CaCO_3$ mit 0·6558 CaO, in 10.000 Theilen 13·089, } 13·08.

Magnesia. 1004·4 Gr. Wasser geben 0·020 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0072 MgO, in 10.000 Theilen 0·072, 501·04 Gr. Wasser geben 0·009 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0032 MgO, in 10.000 Theilen 0·064, } 0·068.

Alkalichloride. 143 Gr. Wasser geben 0·599 NaCl+KCl und 1·4437 Chlorsilber, somit in 10.000 Theilen 41·79 Alkalichloride mit: 3·61 KCl und 38·18 NaCl,

191 Gr. Wasser geben 0·799 NaCl+KCl und 1·925 Chlorsilber, somit in 10.000 Theilen 41·81 Alkalichloride mit: 3·39 KCl und 38·42 NaCl.

Abdampfrückstand. 100·66 Gr. Wasser geben 0·685 Rückstand, somit in 10.000 Theilen 68·050,

100·66 Gr. Wasser geben 0·686 Rückstand, somit in 10.000 Theilen 68·149,

250·97 Gr. Wasser geben 2·053 schwefelsaure Salze, somit in 10.000 Theilen 81·803,

250·95 Gr. Wasser geben 2·052 schwefelsaure Salze, somit in 10.000 Theilen 81·769.

12. Die warmen Quellen ober dem Wasserfalle. Wasser, geschöpft: August 1868, Temperatur: 43·6—44·4° C., spec. Gewicht 1·0007.

Schwefelsäure. 600·37 Gr. Wasser geben 0·172 BaO_4 mit 0·059 SO_3 = 0·983 in 10·000 Theilen,
600·29 Gr. Wasser geben 0·172 $BaSO_4$ mit 0·059 SO_3 = 0·983 in 10.000 Theilen,
} Mittel 0·983.

Auf Jod wirkende Schwefelverbindungen.

300 CC. Wasser fordern 17·5 CC. Jodlösung à 0·8 Mllgr. Jod = 0·0018 H_2S = 0·0625 in 10.000 Theilen,

300 CC. Wasser fordern 17 CC. Jodlösung à 0·8 Mllgr. Jod = 0·0018 H_2S = 0·0606 in 10.000 Theilen.

Chlor. 49·84 Gr. Wasser fordern 2·25 CC. Aglösung = 10 Mllgr. NaCl = 0·0136 Cl = 2·739 in 10.000 Theilen,

122·96 Gr. Wasser fordern 5·55 CC. Aglösg. = 10 Mllgr. NaCl = 0·0336 Cl = 2·739,

im Mittel 2·739.

Kohlensäure. 550 CC. Wasser geben 0·075 $BaCO_3$ = 0·0167 CO_2 = 0·304 in 10.000 Theilen,
550 CC. Wasser geben 0·076 $BaCO_3$ = 0·017 CO_2 = 0·309 in 10.000 Theilen,
} Mittel 0·3065.

Kieselerde. 996·4 Gr. Wasser geben 0·049 SiO_2, also in 10.000 Theilen 0·492,
996·67 Gr. Wasser geben 0·048 SiO_2, also in 10.000 Theilen 0·482,
Mittel 0·487.

Kalk. 996·4 Gr. Wasser geben 0·080 $CaCO_3$ mit 0·0448 CaO, in 10.000 Theilen 0·450,
996·7 Gr. Wasser geben 0·081 $CaCO_3$ mit 0·0453 CaO, in 10.000 Theilen 0·455,
0·4525.

Magnesia. 996·4 Gr. Wasser geben 0·004 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0014 MgCO, in 10.000 Theilen 0·015,
996·67 Gr. Wasser geben 0·0035 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0012 MgO, in 10.000 Theilen 0·013,
0·014.

Alkalichloride. 996·62 Gr. Wasser geben 0·575 NaCl + KCl, somit 10.000 Theile 5·769,
997·47 Gr. Wasser geben 9·575 NaCl + KCl, somit 10.000 Theile 5·764.

Abdampfrückstand. 600·25 Gr. Wasser geben 0·435 Rückstand, somit 10.000 Theile 7·247,
600·36 Gr. Wasser geben 0·435 Rückstand, somit 10.000 Theile 7·246,
499·65 Gr. Wasser geben 0·429 schwefelsaure Salze, somit 10.000 Theile 8·586,
500·67 Gr. Wasser geben 0·430 schwefelsaure Salze, somit 10.000 Theile 8·588.

13. Brunnenwasser am Hauptplatze des Hercules-Bades Wasser geschöpft: August 1868.

Schwefelsäure. 999·87 Gr. Wasser geben 0·018 $BaSO_3$ mit 0·0061 SO_3 = 0·062 in 10.000 Theilen,
1000·5 Gr. Wasser geben 0·018 $BaSO_3$ mit 0·0061 SO_3 = 0·062 in 10.000 Theilen,
Mittel 0·062.

Chlor. 1000 CC. Wasser fordern 3 CC. Aglösung = 1 Mllgr. NaCl = 0·0182 in 10.000 Theilen.

Kieselerde. 998 Gr. Wasser geben 0·005 SiO_2, also in 10.000 Theilen 0·050,
998·75 Gr. Wasser geben 0·0045 SiO_2, also in 10.000 Theilen 0·045,
Mittel 0·0475.

Kalk. 998 Gr. Wasser geben 0·116 $CaCO_2$ mit 0·065 CaO, in 10.000 Theilen 0·651,
998·75 Gr. Wasser geben 0·117 $CaCO_2$ mit 0·0655 CaO, in 10.000 Theilen 0·656,
} Mittel 0·6535.

Magnesia. 998 Gr. Wasser geben 0·015 $Mg_2P_2O_4$ mit 0·0054 MgO, in 10.000 Theilen 0·054,
998·75 Gr. Wasser geben 0·015 $Mg_2P_2O_7$ mit 0·0054 MgO, in 10.000 Theilen 0·054,
} 0·054.

Alkalichloride. 2000 CC. Wasser geben 0·006 NaCl+KCl, somit 10.000 Theile 0·030,
3000 CC. Wasser geben 0·009 NaCl+KCl, somit 10.000 Theile 0·030.

Glührückstand. 1498·05 Gr. Wasser geben 0·198 Rückstand, somit 10.000 Theile 1·322,
1000·2 Gr. Wasser geben 0·132 Rückstand, somit 10.000 Theile 1·320,
1498·05 Gr. Wasser geben 0·264 schwefelsaure Salze, somit 10.000 Theile 1·762,
1000·2 Gr. Wasser geben 0·177 schwefelsaure Salze, somit 10.000 Theile 1·770.

Organische Substanz. 1498·05 Gr. Wasser geben 0·006 Glühverlust, somit 10.000 Theile 0·040.

Tabellarische Darstellung der Mittelwerthe.

α. **Einzelbestandtheile.** In 10.000 Theilen sind enthalten:

Namen	H_2S	S_2O_2	SO_3	Cl	Br	J	CO_2	SiO_2	NaCl	KCl	CaO	MgO	Feste Bestandtheile als Abdampf-rückstand	Feste Bestandtheile als Schwefels. Salze
Herculesquelle	—	—	1·122	19·17	—	—	0·654	0·394	18·98	1·63	6·54	0·078	34·40	41·32
Karlsquelle	0·1125	—	0·816	13·79	—	—	0·5113	0·343	13·05	2·57	4·65	0·074	25·17	30·11
Ludwigsquelle	0·149	0·036	0·695	17·64	0·0054	0·0026	0·375	0·432	17·73	2·68	5·28	0·058	31·49	37·73
Karolinen-quelle 1867	0·371	—	0·307	19·68	—	—	—	0·381	20·599 (NaCl + KCl)		6·33	0·12	34·67	41·14
Karolinen-quelle 1868	0·214	—	0·549	11·59	—	—	—	0·240	12·01 (NaCl + KCl)		4·07	0·15	20·77	25·28
Elisenquelle	0·598	—	0·083	33·35	—	—	—	0·455	31·61	3·18	10·47	0·09	55·45	67·48
Kaiserquelle	0·511	0·105	0·160	34·72	—	—	—	0·440	30·18	6·56	10·87	0·122	58·78	71·50
Ferdinandsqu.	0·588	0·024	0·074	35·63	—	—	—	0·413	31·27	6·20	11·80	0·069	61·16	73·50
Augenbadquelle	0·412	—	0·548	40·55	0·0076	0·0068	—	0·464	38·53	3·54	12·99	0·079	67·86	81·68
Josefsbrunnen	0·520	—	0·456	40·39	—	—	—	0·454	37·97	4·11	12·99	0·083	67·79	81·46
Fussbad	0·547	—	0·583	40·44	—	—	—	0·488	38·30	3·50	13·08	0·068	68·09	81·78
Franzensquelle	0·648	0·029	0·011	43·13	—	—	0·138	0·531	39·40	4·25	14·04	0·118	71·94	88·01
Warme Quellen oberhalb des Quellengebiets	0·060	—	0·983	2·73	—	—	0·306	0·487	5·76 (NaCl + KCl)		0·452	0·004	7·24	8·58
Trinkwasser aus dem Herkules-brunnen	—	—	0·062	0·018	—	—	—	0·047	0·030 (NaCl + KCl)		0·653	0·054	1·32	1·76

β. **Die Einzelbestandtheile zu Salzen verbunden.**

Namen	K_2SO_4	KCl	NaCl	NaSH	$Na_2S_2O_3$	$MgCl_2$	$CaCl_2$	$CaSO_4$	$CaCO_3$	SiO_2	Summe		Als Sulfate	
											berechnet	gefunden	berechnet	gefunden
Herculesquelle	1·82	–	19·00	–	–	0·18	11·70	0·48	0·75	0·39	34·32	34·40	41·38	41·32
Karlsquelle	1·77	1·05	12·66	(Na_2S 0·25)	–	0·17	8·50	–	0·62	0·34	25·36	25·17	30·68	30·11
Ludwigsquelle [1]	1·515	1·480	17·284	0·245	0·059	0·136	9·930	–	0·350	0·432	31·50	31·49	37·93	37·73
Karolinenquelle	0·669	1·93	18·00	0·611	–	0·285	12·546	–	–	0·380	33·879	34·67	41·09	41·14
Elisenquelle	0·18	3·18	30·56	0·98	–	0·21	20·78	–	–	0·45	56·18	55·45	67·51	67·48
Kaiserquelle	0·348	6·261	29·203	0·841	0·172	0·299	21·564	–	–	0·441	59·122	58·78	71·47	71·50
Ferdinandsqu.	0·157	6·156	29·446	0·998	0·041	0·175	23·389	–	–	0·443	60·805	61·16	72·93	73·50
Augenbadqu. [2]	1·194	2·252	37·28	0·678	–	0·186	25·748	–	–	0·464	68·085	67·86	81·71	81·68
Josefsbrunnen	0·994	3·26	37·08	0·856	–	0·197	25·748	–	–	0·454	68·587	67·79	81·60	81·46
Fussbad	1·270	2·41	37·35	0·900	–	0·161	25·926	–	–	0·488	68·50	68·09	82·05	81·78
Franzensquelle	0·021	4·32	38·17	1·070	0·047	0·275	27·670	–	0·143	0·531	72·256	71·94	87·792	88·01
Warme Quellen oberhalb des Quellengebiets	0·792	–	4·082	0·098	(Na_2SO_4 1·099)	0·033	0·319	–	0·486	0·487	7·393	7·24	8·59	8·58
Trinkwasser aus dem Herkulesbrunnen	0·027	–	–	–	(Na_2SO_4 0·008)	($MgCO_3$ 0·113)	0·028	0·096	1·057	0·047	1·377	1·32	1·79	1·76

[1] In der Ludwigsquelle wurden noch bestimmt: 0·075 $MgBr_2$ und 0·002 MgI_2.

[2] In der Augenbadquelle wurden noch bestimmt: 0·008 $MgBr_2$ und 0·007 MgI_2.

Untersuchung der Quellengase.

Aus den Mündungen der tiefer flussabwärts gelegenen Thermen des Kaiser-, Ferdinand-, Augen-, Fuss- und Franzensbades entwickeln sich fort und fort Gasblasen, die in einem Recipienten gesammelt und angezündet mit sehr schwach leuchtender Flamme brennen, schwach nach Schwefelwasserstoff riechen und Bleipapier bräunen. Nachdem Than[1] auf das höchst wahrscheinliche Vorkommen des Kohlenoxysulfids in Schwefelquellen aufmerksam machte, war es geboten, dem Vorkommen dieses Gases in den Thermen der Herculesbäder eine besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Es wurden je 3 Litres der an den Quellen gesammelten Thermalgase über mit gesättigter Chlorcadmiumlösung getränkte Bimssteinstücke in Barytwasser geleitet. Es trat allerdings eine sehr geringe Fällung von kohlensaurem Baryum auf, aber die abfiltrirte Lösung reagirte nicht auf Nitroprussidnatrium. Ist damit die Abwesenheit von Kohlenoxysulfid in den Thermalgasen erwiesen, so ist dennoch die Annahme zulässig, es könne allerdings diese Verbindung im Innern der Erde gebildet werden, sich aber bei ihrem Eintritt in das alkalisch reagirende Thermalwasser in Kohlensäure und Schwefelwasserstoff umsetzen.

Freier Schwefelwasserstoff findet sich in den Thermalgasen in so geringer Menge vor, dass nach dessen Entfernung mittelst geschmolzenem, phosphorsaurem Blei keine messbare Volumveränderung stattfindet.

Auch mit rauchender Schwefelsäure imprägnirte Coakskugeln bewirken in den von Schwefelwasserstoff und Kohlensäure befreiten und getrockneten Gasen keine Volumabnahme, ebenso indifferent verhält sich eine ammoniakalische Kupferchlorürlösung. Es sind also in diesen Gasen weder Äthylen noch dessen Homologe, auch nicht Acetylen und Kohlenoxyd vorhanden.

Beim Verpuffen gemessener Mengen der Kohlensäure freien mit Knallgas gemischten Gase tritt keine Raumverminderung ein. Beim Durchschlagen von elektrischen Funken tritt — wenn der

---

[1] Annal. d. Chemie u. Pharmacie. V. Suppl. Band. p. 236.

Funkenschlag mehrere Stunden anhaltend mittelst eines Inductionsstromes unterhalten wird — eine Volumvermehrung in den zuvor von Kohlensäure und Schwefelwasserstoff befreiten Thermalgasen ein. Je 100 Volume derselben vergrösserten sich auf 146—150 Volume. In der Nähe der Platinelectroden zeigt sich ein sehr geringer grauschwarzer Anflug, der eher dem Platinstaub als ausgeschiedenem Kohlenstoff ähnlich sieht. Diese Volumvermehrung wurde auch bemerkt, als Proben dieser Gase mit zur vollständigen Verbrennung ungenügenden Mengen Sauerstoff unter Vermittlung von Knallgas verpufft wurden. Eine Kohlenstoffausscheidung fand auch bei diesen unvollkommenen Verbrennungen nicht statt. Buff und Hofmann[1] bemerkten, dass bei der Zerlegung des Sumpfgases durch den Funkenstrom einer Inductionsmaschine nur eine sehr geringe Kohlenstoffausscheidung stattfinde, während bei der Electrolyse des ölbildenden Gases die Abscheidung der Kohle sehr beträchtlich ist; das Volum hatte sich beim ölbildenden Gase von 100 auf 175, beim Grubengase auf 183 vermehrt. Berthelot[2] hat bei der Einwirkung des electrischen Funkens aus 100 Volum. Grubengas 181 Volume erhalten und nachgewiesen, dass bei dieser Zersetzung Acetylen und Wasserstoff auftritt. Das electrolytische Verhalten der Gase, welche den Quellen des Herculesbades entströmen, ist ganz das gleiche wie es am Grubengase beobachtet wird. Ein weiterer Beweis, dass der vorwiegende Bestandtheil dieser Gase Sumpfgas sei, liegt noch darin, dass die Menge der brennbaren Gase mit der bei der Verbrennung erzeugten Kohlensäure nahezu gleich ist, und dass dazu die doppelte Volummenge Sauerstoff erfordert wird.

Der quantitativen Bestimmung wurden die Gase der Ferdinands-, Augenbad-, Fussbad- und Franzensbadquelle unterworfen.

100 Volume der getrockneten Gase enthalten für 0° und 760 Mm. D berechnet nachfolgende Mengen Kohlensäure:

---

[1] Annal. d. Chemie u. Pharmacie. Bd. 113, p. 143. ff.

[2] Compt. rend. LXVII, p. 1188.

Gase der	Versuch		Mittel
	1	2	
Ferdinandsquelle	2·75	2·58	2·66
Augenbadquelle	3·03	3·18	3·10
Fussbadquelle	2·19	2·33	2·26
Franzensquelle	2·49	2·71	2·60

100 Volume der von Wasser, Schwefelwasserstoff und Kohlensäure befreiten Gase bei 0° und 760 Mm. D.

der	fordern zur Verbrennung Sauerstoff	bilden Kohlensäure	bestehen aus		
			Stickstoff	brennbaren Gasen	Mittel
Ferdinandsquelle	114·6 115·1	57·22 57·50	42·53	57·58 57·37	57·47
Augenbadquelle	121·4 121·6	60·96 60·55	39·22	60·82 60·74	60·78
Fussbadquelle...	121·4 122·3	60·92 61·04	38·77	61·18 61·29	61·23
Franzensbadqu. .	104·4 103·7	52·31 52·28	47·94	52·14 51·98	52·06

Somit enthalten 100 Volume der Thermalgase bei Normaldruck und Temperatur:

Bestandtheile	Ferdinandsquelle	Augenbadquelle	Fussbadquelle	Franzensbadquelle
Kohlensäure .	3·03	2·16	3·32	2·61
Sumpfgas	55·73	59·47	59·20	50·70
Stickstoff	41·24	38·37	37·48	46·69
Schwefelwasserstoff	Spuren	Spuren	Spuren	Spuren
Summe	100·00	100·00	100·00	100·00

Unsere analytischen Ergebnisse gestatten nur in wenigen Punkten einen Vergleich mit jenen, welche in früherer Zeit Ragsky, Zimmermann, Stadler und Crantz bei ihren Untersuchungen erhalten haben. Bei der Verschiedenheit der Mittel und Methoden, mit und nach welchen letztere ihre Analysen ausgeführt haben, ist eine genaue Uebereinstimmung der Resultate auch nicht zu erwarten. Hält man sich dies vor Augen, so dürfte nachfolgende Zusammenstellung der neuesten Analysen mit jenen der genannten Forscher bezüglich der Gesammtmenge an festen Bestandtheilen zeigen, dass diese Quellen, so wie sie in ihren thermischen Verhältnissen innerhalb hundert Jahren nur geringe Veränderungen erfahren haben, auch in ihren chemischen Bestandtheilen so ziemlich constant geblieben sein dürften.

10.000 Theile Wasser nachbenannter Quellen enthalten feste Bestandtheile:

Nach der Bestimmung von	Hercules-quelle	Karlsquelle	Ludwigs-quelle	Kaiserbad-quelle	Ferdinands-quelle	Augenbad-quelle	Fussbad-quelle	Franzens-quelle	Warme Quellen
Crantz	33·8	—	32·9	66·8	70·3	73·1	—	78·1	—
Stadler	—	28·9	38·9	84·0	79·9	94·2	—	98·2	—
Zimmermann	28·91	19·9	32·0	60·50	61·3	66·0	—	47·2	—
Ragsky	25·65	15·4	20·0	62·8	55·5	68·9	72·3	78·8	3·9
Köttsdorfer und Schneider	34·40	25·2	31·4	58·7	60·5	67·8	68·1	71·9	7·2

Kitaibel's analytische Resultate sind in vorstehender Tabelle nicht berücksichtiget, weil sie durch zu ungenaue Methoden erhalten wurden. Stadler benützte als Massgefäss ein Wiener Quartmass, das wahrscheinlich grösser war, als bei unserer Umrechnung angenommen werden konnte. Zimmermann bezieht seine Resultate auf 100 Wiener Cubik-Zoll, Ragsky auf das Wiener gemeine Pfund, Crantz auf 2 Wiener Apotheker-Pfunde. Diese verschiedenen Werthe haben wir der leichteren Übersichtlichkeit wegen auf 10.000 Gewichtstheile Wasser umgerechnet.

Formel für die Spannkraft gesättigter Dämpfe.

Von **Emil Herrmann.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. October 1871.)

Im Nachstehenden nehme ich mir die Freiheit, einen neuen Satz aus der Theorie der Dämpfe vorzulegen, welcher allgemeine Giltigkeit zu haben scheint und insofern einigen Werth hat, als daraus eine sehr brauchbare Interpolationsformel für die Spannkraft der gesättigten Dämpfe hervorgeht, die, nur zwei Constante enthaltend, nur zwei Versuche erheischt, um die Spannungsreihe des gesättigten Dampfes irgend einer Flüssigkeit innerhalb weiter Grenzen, mit grosser Genauigkeit angeben zu können; überdies enthält dieser Satz ein einfaches Gesetz über das Verhältniss, in welchem die bei der Verdampfung erzeugte äussere Arbeit zur Verdampfungswärme steht, so zwar, dass der von mir aufgestellte Satz als ein neues Gesetz über den Zusammenhang der Spannkraft, Temperatur, Dichte und Verdampfungswärme der gesättigten Dämpfe aller Flüssigkeiten angesehen werden kann; welches, wenn auch vielleicht nicht vollkommen genau richtig, immerhin denselben Grad von Annäherung gewährt, wie das Gay-Lussac-Mariotte'sche Gesetz für die sogenannten permanenten Gase.

Ich will im Gange der Entwicklung jenen Weg verfolgen, welcher mich nach vielfältigem Bemühen auf den erwähnten Satz führte, und werde der leichteren Übersicht wegen, die Bedeutung der einzelnen, in den Gleichungen vorkommenden Grössen der Reihe nach anführen.

$A=\frac{1}{423\cdot54}$ das Wärme-Äquivalent der mechanischen Arbeitseinheit.

$\alpha=\frac{1}{a}=0\cdot003665=\frac{1}{272\cdot85}$ der Luftausdehnungscoëfficient.

p die Spannung des gesättigten Dampfes, je nach Bedarf in Millimeter Quecksilbersäule oder Atmosphären.

r die von Herrn Dr. Zeuner sogenannte Verdampfungswärme.

σ das spec. Volumen der Flüssigkeit, für Wasser wäre daher $\sigma = 0 \cdot 001$ Kub. Meter.

$T = a + t$ die sogenannte absolute Temperatur.

t die Temperatur des gesättigten Dampfes bei der Spannung p, in Celsius-Graden.

v das spec. Volumen des Dampfes bei der Spannung p.

$v - \sigma = u$.

Q die Wärmemenge, welche erfordert wird, um aus Flüssigkeit von 0° Temp., Dampf von $t°$ zu erzeugen, u. z. unter constantem Druck.

c die spec. Wärme der Flüssigkeit in der Nähe des Gefrierpunktes des Wassers.

q die Flüssigkeitswärme, d. i. jene Wärmemenge, welche erfordert wird, um die Temperatur der Flüssigkeit unter dem constanten Drucke p, von 0° auf $t°$ zu bringen.

Endlich bezeichne ich das Product $r\frac{v}{u}$ mit W.

I. Versuche zur Aufstellung des Gesetzes für Wasserdämpfe.

Gestützt auf die Zahlen, welche Clausius in seiner ersten Abhandlung über die bewegende Kraft der Wärme gibt, stellte ich folgende Gleichungen auf:

$$1) \ldots\ldots r = 606 \cdot 5 - 0 \cdot 695t - 0 \cdot 00008t^2 = 606 \cdot 5(1 + 0 \cdot 000105t)(1 - 0 \cdot 001251t)$$

$$2) \ldots\ldots Apu = 30 \cdot 5(1 + 0 \cdot 00491633t)(1 - 0 \cdot 001251t)$$

Setzt man diese Werthe in die Clapeyron'sche Gleichung ein, so wird, da diese folgends lautet:

$$r = ATu\frac{dp}{dt}; \quad \frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt} = \frac{606 \cdot 5}{30 \cdot 5} \quad \frac{1 + 0 \cdot 000105423t}{(1 + 0 \cdot 00491633t)(272 \cdot 85 + t)}.$$

Die Integration zwischen den Grenzen 1 und p, so wie 100 und t, liefert:

$$lp = 56 \cdot 9859l\left(\frac{203 \cdot 41 + t}{303 \cdot 41}\right) - 56 \cdot 5674l\left(\frac{272 \cdot 85 + t}{372 \cdot 85}\right),$$

welche Formel indessen eine wenig befriedigende Übereinstimmung mit Regnaut's Versuchen zeigt.

Die Ursache der vorkommenden Abweichungen suchte ich darin, dass der Werth von Apu nicht genau genug sei. Setzt man

$$t-100=\tau; \quad \frac{1}{372\cdot 85}=\alpha_1; \quad \frac{1}{303\cdot 41}=\beta_1$$

so nimmt die letzte Gleichung die Form an:

$$lp=kl(1+\beta_1\tau)-k_1 l(1+\alpha_1\tau).$$

Diese betrachtete ich als richtig und bestimmte nach Regnault's Versuchen β_1 k und k_1, es ergibt sich:

$$3)\ldots\ldots lp=56\cdot 0527\,l(1+0\cdot 0033365\tau)-56\cdot 4833\,l(1+0\cdot 002682\tau)$$

oder:

$$3')\ldots\ldots p=\frac{(1+0\cdot 0033365\tau)^{56\cdot 0527}}{(1+0\cdot 002682\tau)^{56\cdot 4833}}$$

Diese Gleichung gibt die Regnault'schen Versuchswerthe fast ebenso genau als dessen viergliedrige transcendente Formel, sie weicht von den erwähnten Versuchswerthen zwischen — 32° bis + 230° fast gar nicht ab, so dass sie als die genaueste bisher aufgestellte einfache Gleichung bezeichnet werden muss.

Mein Bruder, Max Herrmann, machte mich aufmerksam, dass die Ermittlung der zu einer bestimmten Spannung gehörigen Temperatur mit Hilfe der letzten Gleichung noch immer langwierige Rechnungen erfordere und dass für die Praxis die Form

$$p=\left(\frac{1+\beta_1\tau}{1+\alpha_1\tau}\right)^k,$$

welche aus der Gleichung (3′) hervorgeht, wenn man

56·0527 und 56·4833

als gleich betrachtet, wünschenswerther wäre, auch stellte er

$$p=\left(1\cdot 263574\frac{192\cdot 66+t}{269\cdot 81+t}\right)^{50}$$

auf und bemerkte, dass $\frac{269\cdot 81}{192\cdot 67}=1\cdot 4$ sei.

Hiedurch angeregt, forschte ich, ob es nicht eine passende Annahme gebe, welche die obige Form der Gleichung erzielt, namentlich aber trachtete ich, den sehr complicirten Ausdruck für die Flüssigkeitswärme des Wassers zu vereinfachen.

Nach Herrn Dr. Zeuner's „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie" 2. Auflage, Tabelle I_a und I_b finden sich für $AT\frac{dp}{dt}\sigma$ und $q-t$ folgende Werthe:

$t=$	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
$q-t=$	0	0·01	0·087	0·137	0·282	0·500	0·806	1·22	1·74	2·40	3·20
$AT\sigma\frac{dp}{dt}=$	0·003	0·01	0·029	0·074	0·163	0·325	0·597	1·02	1·64	2·52	3·69

Berücksichtigt man, dass weder die Gleichung für

$$q = t + 0\cdot00002t^2 + 0\cdot0000003t^3$$

noch die Werthe für $AT\sigma\frac{dp}{dt}$ als empirische ganz genau sind, insbesondere aber, dass obige Form für q jene Wärmemenge bestimmt, welche nothwendig ist, um die Temperatur des Wassers unter dem constanten Drucke der Atmosphäre von 0° auf $t°$ zu erhöhen, welche Wärmemenge im Allgemeinen verschieden sein kann von jener, welche man unter einem anderen Drucke stehenden Wasser zuführen muss, um dieselbe Temperaturerhöhung zu erhalten: so kann man von den vorkommenden Differenzen, welche überdies weit unter der von Regnault zugestandenen Fehlergrenze liegen, gänzlich absehen und speciell für Wasser

$$4) \ldots\ldots \quad q - t = AT\sigma\frac{dp}{dt}$$

setzen.

Die 4. Gleichung vereinfacht zwar die Rechnungen bei Wasserdämpfen, da sie aber speciell nur auf diese anwendbar ist, so besitzt sie keine grosse Tragweite und wahrscheinlich auch keine wissenschaftliche Grundlage; sie ist eben nur ein glücklicher Zufall.

II. Hypothese, welche auf die Form $p=\left(\frac{1+\beta_1\tau}{1+\alpha_1\tau}\right)^k$ führt.

Formulirung des neuen Satzes.

Die Form $p=\left(\frac{1+\beta_1\tau}{1+\alpha_1\tau}\right)^k$ geht aus der Clapeyron'schen Gleichung hervor, wenn man dieselbe mit dem folgenden neuen Satze combinirt.

„Die pro Einheit der Verdampfungswärme erzeugte äussere Arbeit ist eine lineare Function der Temperatur.“

Dem gemäss ist der analytische Ausdruck des Satzes

$$5) \ldots\ldots \frac{pu}{r}=C(b+t)$$

Es wird sich später zeigen, dass b für alle Dämpfe denselben Werth hat und dass nur C für jede Dampfart einen anderen Werth habe; für eine zweite Dampfart wäre für dieselbe Temperatur

$$\frac{p_1u_1}{r_1}=C_1(b+t)$$

Oder wenn wir die pro Einheit der Verdampfungswärme geleistete äussere Arbeit mit ψ bezeichnen

$$\psi=C(b+t)$$

und

$$\psi_1=C_1(b+t)$$

somit

$$6) \ldots\ldots \frac{\psi}{\psi_1}=\frac{C}{C_1}=C_2$$

d. h. die äusseren Arbeiten der Verdampfungswärme-Einheit zweier Dampfarten bei gleicher Temperatur stehen in constantem Verhältnisse.

Der von mir aufgestellte Satz unterscheidet sich vom Despretz'schen Satze ziemlich wesentlich, denn nach der Fassung von Despretz soll

$$\left(\frac{r}{u}\right):\left(\frac{r_1}{u_1}\right)=1$$

sein, d. h. $r:r_1=u:u_1$, wenn die Spannung beider Dampfarten dieselbe ist.

Meinem Satze gemäss dagegen würde für den gleichen Fall, nämlich bei gleichen Spannungen, sein:

$$r : r_1 = Cu(b+t) : C_1 u_1 (b+t_1).$$

Dass der Despretz'sche Satz unrichtig ist, hat Herr Dr. Zeuner in seinem oben erwähnten Werke S. 278 und 279 nachgewiesen, weshalb ich denselben nicht weiter in Betracht ziehe.

Die grössere Richtigkeit des durch die Gleichung 5 ausgedrückten ersten Theiles meines Satzes lässt sich auf mehrfache Weise prüfen, am sichersten geschieht dies jedenfalls durch das Spannungsgesetz, für welches, wie ich glaube, die sehr genauen Versuche Regnault's unmittelbar vorliegen.

Die Clapeyron'sche Gleichung

$$r = ATu \frac{dp}{dt}$$

dividirt durch die Gleichung 5

$$r = \frac{pu}{C(b+t)}$$

gibt:

$$1 = ACT(b+t) \cdot \frac{dp}{pdt}$$

oder mit Rücksicht auf $T = a + t$

$$\frac{dp}{pdt} = \frac{1}{AC} \cdot \frac{1}{(a+t)(b+t)}$$

Integrire ich diese Gleichung nach der Zerlegung in Partialbrüche zwischen den Grenzen 1 und p sowie 100 und t, so kommt

$$\int_1^p \frac{dp}{p} = \frac{1}{AC(a-b)} \left\{ \int_{100}^t \frac{dt}{b+t} - \int_{100}^t \frac{dt}{a+t} \right\}$$

Setze ich

$$\frac{1}{AC(a-b)} = k \quad \frac{1}{b+100} = \beta_1 \quad \frac{1}{a+100} = \alpha_1 \quad t - 100 = \tau$$

und führe die Integration aus, so resultirt

$$lp = kl\left(\frac{1+\beta_1\tau}{1+\alpha_1\tau}\right)$$

oder

$$7_a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p + \left(\frac{1+\beta_1\tau}{1+\alpha_1\tau}\right)^k$$

Benützen wir zwei Werthe der Spannung und Temperatur, um β_1 und k zu bestimmen und führen wir überdies $\alpha_1 = \frac{1}{372\cdot 85}$ $= 0\cdot 002682$ ein, so ergibt sich, wenn wir $p = 91\cdot 98^{mm}$, $t = 50°$ sowie $p = 17390^{mm}$, $t = 220°$ wählen:

$$\beta_1 = 0\cdot 0034828 \text{ und } k = 44\cdot 6.$$

Die Gleichung 7 lautet daher für Wasserdampf und p in Atmosphären:

$$7_b) \ldots\ldots p = \left(\frac{1+0\cdot 0034828\tau}{1+0\cdot 0026820\tau}\right)^{44\cdot 6},$$

weiters berechnet sich

$$C = \frac{423\cdot 54}{44\cdot 6(272\cdot 85 - 187\cdot 12)} = \frac{4\cdot 9404}{44\cdot 6} = 0\cdot 110772$$

weil $b = 187\cdot 12$ ist. $l(kC) = 0\cdot 69376$; $lC = 0\cdot 04443 - 1$.

Da nach Regnault für $t = 100$ $r = 536\cdot 17$; so ist

$$u_{100} = \frac{Cr_{100}(b+100)}{p_{100}} = \frac{0\cdot 110772 \times 536\cdot 17 \times 287\cdot 12}{10334}$$
$$u_{100} = 1\cdot 6497$$

welcher Werth mit den von Herrn Dr. Zeuner berechneten bis auf drei Einheiten der 4. Decimalstelle übereinstimmt, Herr Dr. Zeuner findet nämlich $u_{100} = 1\cdot 6494$.

Zur näheren Beurtheilung von Gleichung (7_b) lasse ich eine Tabelle über p folgen mit dem Bemerken, dass R. V. Regnault's Versuch, R. C. Regnault's Curve und M. V. Magnus' Versuch bedeutet.

Grad Celsius t	Quecksilbersäule in Millimeter			Anmerkung
	Nach (7.)	Versuch	Differenz	Versucher
— 32·84	0·241	0·27	—0·029	R. V.
— 30	0·322	0·386	—0·064	R. C.
— 22·14	0·686	0·66	+0·026	R. V.
— 20	0·834	0·91	—0·076	R. C.
— 12·3	1·631	1·63	+0·001	R. V.
— 10	1·974	2·08	—0·106	R. C.
— 2·38	3·62	3·85	—0·23	R. V.
0	4·33	4·54	—0·21	R. V.
+ 8·2	7·82	8·14	—0·32	R. V.
10	8·86	9·16	—0·30	R. C.
11·98	10·14	9·88	+0·26	M. V.
11·54	9·88	10·02	—0·14	R. V.
16·46	13·78	13·83	—0·05	R. V.
16·82	13·96	13·52	+0·44	M. V.
20	17·10	17·39	—0·29	R. C.
23·85	21·72	22·24	—0·52	M. V.
30	31·27	31·55	—0·28	R. C.
35·13	41·83	42·29	—0·46	R. V.
40	54·78	54·91	—0·13	R. C.
44·38	69·25	69·11	—0·14	R. V.
50	92·00	91·98	+0·02	R. C.
56·81	128·18	128·43	—0·25	R. V.
60	150·00	148·79	+1·21	R. C.
70	233·41	233·09	+0·32	R. C.
75·18	291·24	291·31	—0·07	R. V.
80	354·75	354·64	+0·11	R. C.
82·8	397·34	397·74	—0·40	R. V.
90	525·63	525·45	+0·18	R. C.
99·58	748·88	748·84	+0·04	R. V.
100	760	760	0	R. V.

Grad Cels. t	Quecksilbersäule in Millimeter					Anmerkung
	Nach (7_b)	Curve der		Differenz		Versucher
		Zahlen	Logarith	I	II	
110	1074·8	1073·7	1073·3	+ 1·1	+ 1·5	R. C.
120	1489·7	1489·0	1490·7	+ 0·7	— 1·0	„ „
130	2027·1	2029·0	2030·5	— 1·9	— 3·4	„ „
140	2712·3	2713·0	2711·5	— 0·7	+ 0·8	„ „
150	3573·0	3572·0	3578·5	+ 1·0	— 5·5	„ „
160	4640·1	4647·0	4651·6	— 7·0	—11·5	„ „
170	5946·7	5960·0	5956·7	—13·3	—10·0	„ „
180	7528·4	7545·0	7537·0	—16·6	— 8·6	„ „
190	9421·6	9428·0	9425·4	— 6·4	— 3·8	„ „
200	11671	11660	11679	+ 11	— 8	„ „
210	14315	14308	14325	+ 7	— 10	„ „
220	17396	17390	17390	+ 6	+ 6	„ „
230	20961	20915	20927	+ 46	+ 34	„ „

Aus den Tabellen ist es ersichtlich, dass die absolute Differenz überall eine sehr geringe ist, besonders günstig stellt sich diese von 44·38° bis 220°, innerhalb welchem Intervalle die durch die Gleichung (7_b) bestimmte Curve zwischen Regnault's Versuchswerthen und den daraus abgeleiteten Curven liegt, so dass die Gleichung (7_b) Regnault's empirische transcendente Formel an Genauigkeit sogar übertrifft. Befriedigend ist auch die Übereinstimmung zwischen — 32°84 und — 12°3, die schwächste Stelle bildet das Intervall von — 10° bis +44°38, wo die durch Gleichung (7_b) bestimmte Curve hinter Regnault's und zum Theil auch Magnus' Versuchen zurück bleibt. Besonders auffallend ist die hinter Abweichung bei 0°, da diese Spannung, wie ich glaube, am sichersten zu bestimmen sein dürfte, da die Wiederholung des Versuches nicht schwierig ist, was auch die vortreffliche Übereinstimmung von Regnault's Angabe (4·54^{mm}) mit jener von Magnus (4·525^{mm}) darzuthun scheint. Die Werthe, welche Gleichung (7_b) gibt, nähern sich mehr jenen Spannungen des Wasserdampfes, welche Regnault in Stickgas beobachtete, nämlich für

$t=0$; +8·56; 15·71; 21·46; 28·90; 32·50

$p=4·31$; 7·67; 12·64; 18·61; 28·81; 35·92

für welche Temperaturen Gleichung (7_b) folgende Spannungen liefert:

$$p = 4\cdot33; \quad 8\cdot00; \quad 12\cdot98; \quad 18\cdot72; \quad 29\cdot19; \quad 36\cdot17.$$

Will ich eine bessere Übereinstimmung mit den im Vacuum beobachteten Spannungen erzielen, so muss ich b als veränderlich betrachten und findet sich, wenn man $p = 4\cdot54$ für $t = o$ als richtig annimmt, $b = 187\cdot71$, also um $0\cdot59$ grösser als bei 100°.

Dass b in Wirklichkeit veränderlich ist und bei 0° den angeführten Werth annimmt, beweist der Umstand, dass mit diesem Werthe die Spannungen von 0° bis —32·84° sich sehr genau aus (7_b) ergeben.

Den Übelstand dass b nicht gänzlich unabhängig ist von der Temperatur, theilt mein unter Gleichung 5 aufgestellter Satz mit dem Gay-Lussac-Mariotte'schen Gesetze, welches bekanntlich nur dann vollkommen richtige Werthe der Spannkraft eines permanenten Gases bei verschiedenen Temperaturen liefert, wenn der Ausdehnungscoëfficient α nicht constant angenommen wird, ja dessen reciproker Werth a steigt fast rascher mit der Abnahme der Spannung und Temperatur als b in meinem Gesetze, wie dies aus Regnault's Versuchen mit verdünnter Luft, für welche $a = 273\cdot84$ wird, hervorgeht; ich kann daher mit vollem Rechte behaupten, dass das unter Gleichung 5 aufgestellte Gesetz und daher auch die daraus abgeleitete Spannungsformel ebenso genau sei als das Gay-Lussac-Mariotte'sche Gesetz, auch wird man mit ebenso viel Recht b als constant ansehen können als a.

Will man den neuen Satz ganz richtig formuliren, so muss man ihn folgends aussprechen:

Die pro Einheit der Verdampfungswärme erzeugte Arbeit ist eine nahezu lineare Function der Temperatur, doch muss man es auch zugeben, dass es praktisch überflüssig wäre, eine andere Form dieser Function zu ermitteln, da die lineare vollkommen genügt.

Was die Beziehung zwischen spec. Volumen und der Spannung anbelangt, so hat Herr Dr. Zeuner neuester Zeit in sehr ingenieuser Weise die Gleichung

$$pv = BT - C\sqrt[4]{p}$$

aufgestellt und gezeigt, dass sie für überhitzte wie gesättigte Wasserdämpfe in gleicher Weise gültig sei; Herr Dr. Zeuner hat aber auch gefunden, dass für gesättigte Wasserdämpfe (vielleicht nur zufällig) die Formel

$$8) \ldots\ldots\ldots v = \frac{\text{Const.}}{p^{\xi}}$$

sehr richtige Werthe liefere; da die letzte Formel weit einfacher ist als die wissenschaftlich begründete frühere, so wird es zweckmässig sein, die Gleichung (8) dennoch anzuwenden und das um so mehr, als Herr Dr. Zeuner selbst nicht anzunehmen scheint, dass die obenerwähnte Gleichung die Gleichung (8) ausschliesse, da derselbe, in derselben Abhandlung, beide Formeln gebraucht.

Will man statt u in meinem Satze v gebrauchen, so hat man statt r, W zu schreiben; hiedurch ergibt sich:

$$9) \ldots\ldots\ldots \frac{W}{v} = \frac{p}{C(b+t)}.$$

Es lässt sich nun zeigen, dass speciell für Wasser W fast ganz genau gleich sei der Differenz $Q-t$.

Schreibt man nämlich die Clapeyron'sche Gleichung

$$r = Q - t - (q - t) = AT(v - \sigma)\frac{dp}{dt},$$

und beachtet, dass nach Gleichung (4) sehr nahe

$$q - t = AT\sigma\frac{dp}{dt}$$

so folgt:

$$Q - t = ATv\frac{dp}{dt}.$$

Dividirt man den letzten Ausdruck durch die ungeänderte Clapeyron'sche Gleichung, so erhält man

$$\frac{Q-t}{r} = \frac{v}{u}$$

also

$$Q - t = r\frac{v}{u},$$

oder mit Rücksicht darauf, dass wir

$$r\frac{v}{u} = W$$

schreiben,

$$Q - t = W = ATv\frac{dp}{dt} = \frac{pv}{C(b+t)}$$

Die Gleichung (9) im Vereine mit Gleichung (4) erleichtert die Bestimmung von ξ wesentlich, denn $Q - t$ ist durch Regnault's Versuche mit grosser Genauigkeit bekannt.

Schreibe ich die Gleichung (8)

$$v = \frac{C_1}{p\xi}$$

und combinire ich sie mit Gleichung (9), so kommt

$$W = \frac{C_1}{C} \quad \frac{p^{1-\xi}}{(b+t)}$$

also für $t = 100$

$$W_{100} = \frac{C_1}{C} \quad \frac{p_{100}{}^{1-\xi}}{b+100}$$

und durch Division beider

$$W = \frac{W_{100}}{1+\beta_1\tau} \quad \left(\frac{p}{p_{100}}\right)^{1-\xi}.$$

Es ist aber

$$\frac{p}{p_{100}} = \left(\frac{1+\beta_1\tau}{1+\alpha_1\tau}\right)^k$$

somit

$$10) \ldots\ldots\ldots W = W_{100}\left(\frac{1+\beta_1\tau}{1+\alpha_1\tau}\right)^\mu \frac{1}{1+\beta_1\tau}$$

worin statt

$$k(1-\xi) = \mu$$

erscheint.

Zur Bestimmung von μ benütze ich den, wie es scheint, durch Regnault sehr zuverlässig bestimmten Werth von W für $t = 183 \cdot 5°$.

Regnault findet nämlich für

$$t = 183 \cdot 2; \qquad 183 \cdot 5; \qquad 183 \cdot 7.$$
$$W = 479 \cdot 2; \qquad 479 \cdot 3; \qquad 479 \cdot 1.$$

Hieraus ergibt sich

$$\mu = 2 \cdot 676 = 0 \cdot 06k$$

und

$$\xi = 0 \cdot 94$$

in schöner Übereinstimmung mit dem von Herrn Dr. Zeuner für ξ angegebenen Werth

$$\xi = 0 \cdot 9393.$$

Da

$$v = \frac{C_1}{p^\xi}$$

und

$$v_{100} = 1 \cdot 6507 = \frac{C_1}{p_{100}{}^\xi},$$

so ist

$$8_b) \ldots\ldots\ldots v = 1 \cdot 6507 \left(\frac{p_{100}}{p}\right)^{0 \cdot 94} = 1 \cdot 6507 \left(\frac{1 + \beta_1 \tau}{1 + \alpha_1 \tau}\right)^{41 \cdot 924}$$

Die nachstehende Tabelle enthält den Vergleich der Regnault'schen Versuchswerthe (nach Pogg. Annalen 87. Band, der ganzen Folge 154. Band), mit dem aus Gleichung (10) resultirenden Werthe von W.

t	I	II	III	I—II	III—II
	Nach (10)	Versuch	Regnault's Formel		
194·8	472·1	471·2	471·1	+0·9	—0·1
186	477·7	478·5	477·2	—0·8	—1·3
183·5	479·3	479·3	479·0	0	—0·3
180	481·6	482·2	481·4	—0·6	—0·8
179·6	481·9	482·6	481·7	—0·7	—0·9
174	485·5	482·0	485·6	+3·5	+3·6
164·9	491·5	490·5	491·9	+1·0	+1·4
160·4	494·5	493	495	+1·5	+2·0
155·1	498·0	496·2	498·6	+1·8	+2·4
150·2	501·4	502·1	502·4	—0·7	+0·3
147	503·2	502·0	504·6	+1·2	+2·6
144·3	505·4	505·4	506·4	0	+1·0
135·5	511·5	511·5	512·3	0	+0·8
125·5	518·7	518·7	519·5	0	+0·8
119·6	522·7	522·2	523·4	+0·5	+1·2
87·8	544·7	545·3	545·5	—0·6	—0·2
85·2	545·2	545·0	547·3	+0·2	+2·3
82·7	549·2	548·3	549·0	+0·9	+0·7
80·2	550·9	550·0	550·8	+0·9	+0·8
70·5	557·9	556·4	557·5	+1·5	+1·1
63·0	563·2	562·5	562·7	+0·7	+0·2

Aus der Tabelle ergibt es sich, dass die Gleichung (10) sehr wenig von Regnault's Formel

$$W = 606 \cdot 5 - 0 \cdot 695 t$$

abweicht, und für Temperaturen über 100° besser stimmt mit den Versuchen als Regnault's Formel. Für Temperaturen unter 100° findet das Entgegengesetzte statt, der Unterschied der zwei Formeln bleibt aber in solchen Grenzen, dass sich schwer entscheiden lässt, welche mehr Berechtigung besitzt.

Es liegt nun noch eine dritte Serie von Versuchen über W vor, und zwar für das Temperaturintervall von 0° bis 16°, allein

diese Werthe sind so schwankend, dass sie fast keinen Anhaltspunkt bieten; so z. B. findet sich für die Temperatur $t=o$

$$W=601\cdot 7 \text{ und } W=605\cdot 8.$$

Letzterer Werth spricht für Regnault's Formel, nach welcher $W_0=606\cdot 5$, das arithmetische Mittel $603\cdot 75$ dagegen spricht für Gleichung 10, nach welcher $W_0=603\cdot 54$.

Übrigens wird man finden, dass ich jene Werthe von W zur Vergleichung gewählt, welche am meisten Vertrauen verdienen, weshalb es auch wahrscheinlich ist, dass die Gleichung 10 richtiger sei, als Regnault's Formel.

Endlich soll die folgende Tabelle einen Vergleich der specifischen Volumina, wie sie aus der Clapeyron'schen Gleichung ohne meinen Satz mit Hilfe der Regnault'schen Formeln und jenen, welche aus der Gleichung (8_b) hervorgehen, gestatten. Ich will nur bemerken, dass nach Regnault's Formeln sich

$$A) \ldots\ldots\ldots\ldots v=\frac{606\cdot 5-0\cdot 695t-0\cdot 00002t^2-0\cdot 0000003t^3}{(273+t)(m\alpha^\tau+n\beta^\tau)}424\cdot\frac{1}{mum \log(a+b\alpha^\tau+c\beta^\tau)}+\sigma$$

ergibt, wogegen nach meinen Formeln

$$8_b) \ldots\ldots\ldots v=1\cdot 6507\left(\frac{1+0\cdot 0034828\tau}{1+0\cdot 002682\tau}\right)^{41\cdot 624} \text{ ist.}$$

Die Übereinstimmung dieser zwei so unähnlichen Ausdrücke ist nur durch die fast wunderbare Genauigkeit der Versuche Regnault's einerseits und der Schärfe des von mir aufgestellten Satzes andererseits möglich, und ich muss gestehen, dass es vorzüglich diese Übereinstimmung ist, welche mich über den theoretischen wie praktischen Werth meiner Formeln besonders beruhigt.

Grad Celsius t	Sp. Volumen in Kub.-Meter		Differ. in Liter pro Kub.-M.	Grad Celsius t	Sp. Volumen in Kub.-Meter		Differ. in Liter pro Kub.-M.
	Nach 8_b	Nach A			Nach 8_b	Nach A	
0	212·70	210·66	+ 9	100	1·6507	1·6504	+0·2
10	108·43	108·51	— 8	120	0·8767	0·8762	+0·6
20	58·45	58·72	— 5	130	0·6572	0·6558	+0·2
30	33·13	33·27	— 4	140	0·5000	0·4987	+0·3
40	19·56	19·65	— 3	150	0·3852	0·3849	+0·8
50	12·01	12·05	— 8	160	0·3009	0·3011	—0·6
60	7·59	7·65	— 8	170	0·2386	0·2385	+0·4
70	5·010	5·015	— 1	180	0·1911	0·1911	0
80	3·380	3·380	0	190	0·1549	0·1548	+0·6
90	2·335	2·335	0	200	0·1267	0·1267	0

Der grösste Fehler beträgt daher 9 pro Mill. oder nicht einmal 1% und für Temperaturen über 100° sogar nicht einmal 1 pro Mill.

Ich zweifle nicht, dass die Moleculartheorie seinerzeit die von mir aufgestellte lineare Function als Asymptote jener Function der Temperatur, welche das Verhältniss der äussern Arbeit zur Verdampfungswärme bestimmt, erkennen lassen wird.

III. Die Spannungsreihen der Dämpfe anderer Flüssigkeiten.

Das Vorhergehende liefert den Beweis, dass der unter Gleichung (5) aufgestellte Satz auf Wasser ohne bedeutenden Fehler angewendet werden kann und ich habe nun noch den Beweis zu liefern, dass dieser Satz auch auf andere Flüssigkeiten mit gleichem Erfolge angewendet werden könne; zugleich halte ich es für nicht unwichtig, den zweiten Theil desselben, welcher unter Gleichung (6) aufgestellt erscheint und auf der Annahme beruht, dass b auch für verschiedene Flüssigkeiten als nahezu gleich angesehen werden könne, zu beweisen.

Am geeignetsten zur Prüfung halte ich, wie schon erwähnt, die sehr genauen Versuche Regnault's über die Spannkräfte der gesättigten Dämpfe und erlaube ich mir, zwölf Flüssigkeiten in alphabetischer Ordnung anzuführen.

1. Aceton.

$k = 32{\cdot}25$, $lp_{100} = 3{\cdot}44657.$, $lC = 0{\cdot}18523 - 1$, $r_{100} = 117{\cdot}37$,
$\sigma = 0{\cdot}0012$.

Es sei mir gestattet ein für allemal zu bemerken, dass aus der Annahme b constant

$$Ck = \frac{1}{A(a-b)} = 4{\cdot}9404$$

folgt, weshalb $lC = 0{\cdot}69376 - lk$ ist.

Da mir Regnault's Bericht nicht zur Verfügung steht, so kann ich nur die durch dessen Formeln bestimmten Spannungsreihen zur Controle angeben, auch führe ich bisweilen die von Herrn Dr. Zeuner neu berechneten Werthe an.

t	Millimeter Quecksilber			t	Millimeter Quecksilber		
	Form.	Zeuner	Differ.		Form.	Zeuner	Differ.
0	66·5	63·3	+3·2	80	1612·3	1611·1	+1·2
10	111·8	110·3	+1·5	90	2141·8	2140·8	+1·0
20	179·7	180·1	—0·4	100	2796·2	2796·2	0
30	278·3	280·1	—1·8	110	3592·5	3594·3	—1·8
40	417·3	419·4	—2·1	120	4549	4552	—3·0
50	607·4	608·8	—1·4	130	5678·5	5684·9	—6·4
60	860·6	861·0	—0·4	140	7009·4	7007·6	+1·8
70	1190·8	1189·9	+0·9				

Zur Bestimmung von u hat man die Gleichung

$$u_{100} = \frac{117{\cdot}37 \times 287{\cdot}12.\ 4{\cdot}9404}{2796{\cdot}2.\frac{10384}{760}.\ 32{\cdot}25}$$

woraus

$$u_{100} = 0{\cdot}1357.$$

Nach Regnault's Formeln dagegen findet sich

$$u_{100} = 0{\cdot}1355.$$

Die Differenz beträgt somit 0·2 Liter oder

$$\frac{15}{100}\text{ Procent}$$

d. h. circa 0·15 Liter per Kubikmeter.

Die Übereinstimmung kann gewiss als befriedigend bezeichnet werden.

2. Äther.

$k=28{\cdot}72$, $lp_{100}=3{\cdot}69468$, $lC=0{\cdot}23558-1$, $r_{100}=77{\cdot}58$, $\sigma=0{\cdot}0013$.

$$12\ldots\ldots p=p_{100}\left(\frac{1+0\cdot0034828\tau}{1+0\cdot002682\tau}\right)^{28\cdot72}$$

t	Millimeter Quecksilber			t	Millimeter Quecksilber		
	Nach 12	Regnault	Differ.		Nach 12	Regnault	Differ.
0	179·3	183·3	— 4·0	60	1733·5	1728·5	+ 5·0
10	284·1	286·4	— 2·3	70	2314·9	2307·8	+ 7·1
20	433·0	433·3	— 0·3	80	3032·0	3024·4	+ 7·6
30	638·5	636·3	+ 2·2	90	3904·4	3898·1	+ 6·3
40	910·2	909·6	+ 0·6	110	6188·6	6208·4	—19·8
50	1271·0	1271·1	— 0·1	120	7636·5	7702·0	—65·5

Aus

$$\frac{pu}{r}=\frac{1}{C(b+t)}$$

findet man:

$$u_{100}=0\cdot0569$$

wogegen Regnault's Formeln liefern

$$u_{100}=0\cdot0562.$$

Der Unterschied beträgt sonach 1%.

3. Alkohol.

$k=42\cdot15,\ lp_{100}=3\cdot22917,\ lC=0\cdot06896-1,\ r'_{100}=199\cdot12,\ \sigma=0\cdot0015$

$$13)\ldots p=p_{100}\left(\frac{1+0\cdot0034828\tau}{1+0\cdot002682\tau}\right)^{42\cdot15.}$$

t	Millimeter Quecksilber			t	Millimeter Quecksilber		
	Nach 13	Regnault	Differ.		Nach 13	Regnault	Differ.
— 20	3·40	3·34	+ 0·06	70	555·3	541·2	+14·1
— 10	6·11	6·58	— 0·47	80	825·2	812·8	+12·4
0	12·82	12·83	— 0·01	90	1196·1	1188·4	+ 7·6
+ 10	25·23	24·30	+ 0·93	100	·1695	1694·9	+ 0·1
20	46·93	44·48	+ 2·45	110	2352	2362	—10
30	83·04	78·49	+ 4·55	120	3202	3220	—18
40	141·1	133·6	+ 7·5	130	4279	4301	—22
50	229·9	219·9	+10	140	5632	5637	— 5
60	363·2	350·3	+12·9	150	7317	7259	+58

Man findet aus $pu=Cr(b+t)$

$$u_{100}=0\cdot2907$$

nach Regnault's Formeln dagegen

$$u_{100}=0\cdot2850$$

Die Abweichung beträgt demnach 2%. Für diesen Stoff ist die Abweichung überhaupt am grössten. Ob wohl der zur Untersuchung verwendete Alkohol ganz frei war von Wasser?

4. Benzin.

$k = 33{\cdot}85$; $lp_{100} = 3{\cdot}128926$; $lC = 0{\cdot}16420 - 1$; r_{100} nicht bekannt.

t	Millimeter Quecksilber			t	Millimeter Quecksilber		
	Form.	Regnault	Differ.		Form.	Regnault	Differ.
0	26·62	26·62	0	80	755·0	756·6	— 1·6
10	45·86	46·59	— 0·73	90	1017	1020	— 3
20	75·55	76·34	— 0·79	100	1346	1352	— 6
30	119·5	119·9	— 0·4	110	1751	1761	—10
40	182·8	182·3	+ 0·5	120	2242	2256	—12
50	271·0	269·5	+ 1·5	130	2831	2846	—15
60	390·6	388·6	+ 2·0	140	3530	3537	— 7
70	549·3	547·5	+ 1·8	150	4355	4337	+18

5. Bromwasserstoffäther.

$k = 28{\cdot}5$, $lp_{100} = 3{\cdot}63249$, $lC = 0{\cdot}23892 - 1$, r_{100} ist nicht bestimmt.

$$p = p_{100}\left(\frac{1 + 0{\cdot}0034828\tau}{1 + 0{\cdot}002682\tau}\right)^{28\cdot5}.$$

Regnault's Versuche erstrecken sich von $+20°$ bis $+140$.

t	Millimeter Quecksilber			t	Millimeter Quecksilber		
	Form.	Regnault	Differ.		Form.	Regnault	Differ.
20	379·8	380·3	—0·5	80	2637	2630	+ 7
30	558·5	559·8	—1·3	90	3390	3384	+ 6
40	799·1	799·4	—0·3	100	4290	4290	0
50	1113	1112	+1	110	5354	5267 *)	+87
60	1514	1511	+3	120	6596	6631	—35
70	2016	2012	+4	130	8024	8101	—77

*) Sollte dies kein Druckfehler sein, so muss die Beobachtung falsch sein, denn die Übereinstimmung der Spannungen unter 100° scheint es darzuthun, dass die Differenzen unmöglich so rasch sich ändern, als dies bei 110 und 120° der Fall ist.

6. Chlorkohlenstoff.

$k=32{\cdot}6$, $lp_{100}=3{\cdot}16646$, $lC=0{\cdot}18068-1$, $r_{100}=44{\cdot}2$ $\sigma=0{\cdot}0006$

$$p=p_{100}\left(\frac{1+0\cdot0034828\tau}{1+0\cdot002682\tau}\right)^{32\cdot6}$$

t	Millimeter Quecksilber			t	Millimeter Quecksilber		
	Form.	Zeuner	Differ.		Form.	Zeuner	Differ.
0	33·5	33·0	+0·5	90	1121	1122	—1
10	56·6	56·0	+0·6	100	1467	1467	0
20	91·5	91·0	+0·5	110	1890	1887	+3
30	142·4	142·3	+0·1	120	2399	2394	+5
40	215·0	214·8	+0·2	130	3003	2997	+6
50	313·4	314·4	—1·0	140	3714	3709	+5
60	445·5	447·4	—1·9	150	4547	4543	+4
70	619·1	621·2	—2·1	160	5511	5513	—2
80	840·9	843·3	—2·4				

Es findet sich $u_{100}=0{\cdot}0964$, Regnault's Formeln geben $u=0{\cdot}0970$, der Unterschied beträgt demnach 6 Liter pro Kubikmeter.

7. Chloroform.

$k=31{\cdot}9$, $lp_{100}=3{\cdot}38498$, $lC=0{\cdot}18997-1$, $r_{100}=57{\cdot}01$, $\sigma=0{\cdot}0006$.

t	Millimeter Quecksilber			t	Millimeter Quecksilber		
	Form.	Zeuner	Differ.		Form.	Zeuner	Differ.
0	59·7	59·7	0	80	1407·5	1407·6	— 0·1
10	100·5	100·5	0	90	1864	1865	— 1
20	160·8	160·5	+0·3	100	2427	2429	— 2
30	247·7	247·5	+0·2	110	3109	3111	— 2
40	369·8	369·3	+0·5	120	3927	3926	+ 1
50	535·9	535·1	+0·8	130	4890	4885	+ 5
60	756·5	755·4	+1·1	140	6021	6000	+21
70	1043	1042	+1·0				

Ferner folgt $u_{100} = 0·0768$, welchen Werth auch die Regnault'schen Formeln liefern.

Nächst Wasser stimmt die Formel für den letzten Stoff am besten.

8. Chlorwasserstoffäther.

$k = 38·86 \quad lp_{100} = 3·38297.$

t	Millimeter Quecksilber			t	Millimeter Quecksilber		
	Form.	Regnault	Differ.		Form.	Regnault	Differ.
—30	106·9	110·2	— 3·3	40	1959	1920	+39
—20	183·2	187·6	— 4·4	50	2627	2579	+48
—10	298·5	302·1	— 3·6	60	3451	3400	+51
0	465·4	465·2	+ 0·2	70	4451	4405	+46
10	698·3	691·1	+ 7·2	80	5642	5614	+28
20	1013	996·2	+ 6·8	90	7047	7048	— 1
30	1426	1399	+27	100	8683	8723	—40

9. Jodwasserstoffäther.

$k = 31·65 \quad lp_{100} = 3·21172.$

Da Regnault's Versuche nur von 0° bis 60° reichen, so ist $p_{100} = 1628·2$ schon aus meiner Formel abgeleitet.

t	Millimeter Quecksilber			t	Millimeter Quecksilber		
	Form.	Regnault	Differ.		Form.	Regnault	Differ.
0	41·57	41·95	—0·38	40	251·9	251·7	+0·2
10	69·12	69·20	—0·08	50	363·9	364	—0·1
20	109·9	110·0	—0·01	60	512·3	512·3	0
30	169·2	169·1	+0·1				

10. Methylalkohol.

$k = 38 \cdot 86 \quad lp_{100} = 3 \cdot 38297.$

t	Millimeter Quecksilber			t	Millimeter Quecksilber		
	Form.	Regnault	Differ.		Form.	Regnault	Differ.
—20	6·27	6·37	+0·10	70	861·5	857·1	+ 3·6
—10	13·50	13·47	+0·03	80	1244	1239	+ 5
0	26·74	26·82	—0·08	90	1752	1742	+10
+10	49·93	50·13	—0·20	100	2415	2405	+10
20	88·53	88·67	—0·14	110	3267	3260	+ 7
30	149·8	150·0	—0·20	120	4339	4342	— 3
40	244·2	243·5	+0·7	130	5672	5691	—19
50	383·7	381·7	+2·0	140	7309	7337	—28
60	583·9	579·9	+4·0	150	9301	9361	—60

11. Schwefelkohlenstoff.

$k = 28 \cdot 7, \; lp_{100} = 3 \cdot 52336, \; lC = 0 \cdot 23588 - 1, \; r_{100} = 7614, \; \sigma = 0 \cdot 0008.$

t	Millimeter Quecksilber			t	Millimeter Quecksilber		
	Form.	Regnault	Differ.		Form.	Regnault	Differ.
—20	41·56	43·48	— 1·92	70	1561	1552	+ 9
—10	72·39	81·01	— 8·62	80	2045	2034	+11
0	119·91	131·98	—12·07	90	2632	2622	+10
+10	190·2	203·0	—12·8	100	3337	3330	+ 7
20	290·4	301·8	—11·4	110	4171	4167	+ 4
30	429·2	437·0	— 7·8	120	5146	5145	+ 1
40	615·7	617·0	— 1·3	130	6269	6273	— 4
50	857·9	856·7	+ 1·2	140	7559	7557	+ 2
60	1169	1164	+ 5				

12. Schweflige Säure.

$k = 24 \cdot 34 \quad lp_{100} = 4 \cdot 29600.$

Da Regnault's Versuche sich nur von $-20°$ bis $+60°$ erstrecken, so ist $p_{100} = 19770$ aus meiner Formel abgeleitet.

t	Millimeter Quecksilber			t	Millimeter Quecksilber		
	Form.	Regnault	Differ.		Form.	Regnault	Differ.
—20	479·5	479·5	0	30	3465	3432	+33
—10	767·4	762·5	+ 4·9	40	4706	4670	+36
0	1177	1165	+12	50	6245	6220	+25
10	1741	1720	+21	60	8124	8124	0
20	2493	2462	+31				

13. Kohlensäure.

$k = 16 \cdot 485 \quad lp_0 = 1 \cdot 54905.$

Nach Regnault's Versuchen ist die Spannung derselben in Atmosphären, u. z. für

$t = -20°; \quad -10°; \quad 0°; \quad +10° \quad +20° \quad +30° \quad +40°$
$p = 19{\cdot}92; \quad 26{\cdot}76; \quad 35{\cdot}40; \quad 46{\cdot}16; \quad 58{\cdot}92; \quad 73{\cdot}84; \quad 91{\cdot}03.$

Meine Formel dagegen gibt für dieselben Temperaturen

$p = 19{\cdot}26; \quad 26{\cdot}50; \quad 35{\cdot}40; \quad 46{\cdot}14; \quad 58{\cdot}92; \quad 73{\cdot}55; \quad 90{\cdot}49.$

Der grösste Fehler beträgt sonach 3% der wirklichen Spannung und könnte noch vermindert werden indem man statt, wie es hier geschehen, $b = 187{\cdot}12$ zu nehmen, $b_0 = 187{\cdot}71$ in Rechnung nehmen würde.

Ich glaube mit dem Gegebenen den Beweis der Brauchbarkeit des von mir aufgestellten Satzes geliefert zu haben und will nun nur noch jene Transformation der Gleichung (7_a) vornehmen, durch welche die Temperatur als Function der Spannung und des specifischen Volumens dargestellt werden kann.

Die Gleichung (7_a) kann allgemein geschrieben werden:

$$\frac{p}{p_{100}} = \left(\frac{1+\beta_1\tau}{1+\alpha_1\tau}\right)^k$$

daher

$$\frac{1+\beta_1\tau}{1+\alpha_1\tau} = \left(\frac{p}{p_{100}}\right)^{\frac{1}{k}}$$

und

$$\tau = \frac{1-\left(\frac{p}{p_{100}}\right)^{\frac{1}{k}}}{\alpha_1\left(\frac{p}{p_{100}}\right)^{\frac{1}{k}} - \beta_1}$$

Beachtet man, dass $\tau = t - 100$ und $b + 100 = \frac{1}{\beta_1}$ so hat man

$$b + t = \frac{1-\left(\frac{p}{p_{100}}\right)^{\frac{1}{k}}}{\alpha_1\left(\frac{p}{p_{100}}\right)^{\frac{1}{k}} - \beta_1} + \frac{1}{\beta_1}$$

oder nach einer leichten Reduction:

$$14) \ldots\ldots (187 \cdot 12 + t) = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\beta_1^2} \quad \frac{\left(\frac{p}{p_{100}}\right)^{\frac{1}{k}}}{1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\left(\frac{p}{p_{100}}\right)^{\frac{1}{k}}}$$

Auch hat man

$$l\frac{\beta_1 - \alpha_1}{\beta_1^2} = 1 \cdot 8196671$$

$$l\frac{\alpha_1}{\beta_1} = -0 \cdot 1134697 = 0 \cdot 8865303 - 1.$$

Die Gleichung (14) ist allgemein giltig und findet man z. B. die Temperatur, bei welcher die Spannkraft des Acetondampfes gleich einer Atmosphäre, folgends:

$$l760^{mm} = 2 \cdot 88081 \qquad l\left(\frac{p}{p_{100}}\right) = -0 \cdot 56576$$
$$lp_{100} = 3 \cdot 44657$$

$$\frac{1}{k}\, l\frac{p}{p_{100}} = -0 \cdot 017574 \qquad l\frac{\alpha_1}{\beta_1}\left(\frac{p}{p_{100}}\right)^{\frac{1}{32 \cdot 25}} = -0 \cdot 131044.$$

Mit Benützung der Gauss'schen Logarithmen wäre

$$l\left(1-\frac{\alpha_1}{\beta_1}\left(\frac{p}{p_{100}}\right)^{\frac{1}{k}}\right)=+0\cdot 41578-1$$

somit

$$l(187\cdot 12+t)=1\cdot 81967-0\cdot 01757-(0\cdot 41578-1)=2\cdot 38632$$

daher

$$187\cdot 12+t=243\cdot 40 \text{ und } t=56\cdot 28.$$

Regnault's empirische transcendente Gleichung dagegen liefert

$$t=56\cdot 32$$

also beträgt die Abweichung 0·04 Grad Celsius.

Speciell für Wasser kann die Temperatur auch aus dem Volumen abgeleitet werden. Da

$$\frac{v}{v_{100}}=\left(\frac{p_{100}}{p}\right)^{\xi} \text{ also } \frac{p}{p_{100}}=\left(\frac{v_{100}}{v}\right)^{\frac{1}{\xi}}$$

so folgt aus Gleichung 14

$$(187\cdot 12+t)=\frac{\beta_1-\alpha_1}{\beta_1^2}\;\frac{\left(\frac{v_{100}}{v}\right)^{\frac{1}{\xi k}}}{1-\frac{\alpha_1}{\beta_1}\left(\frac{v_{100}}{v}\right)^{\frac{1}{\xi k}}}$$

nun ist aber $\xi k=44\cdot 6-2\cdot 676=41\cdot 924$, daher

$$15)\ldots\ldots\ldots(187\cdot 12+t)=\frac{\beta_1-\alpha_1}{\beta_1^2}\;\frac{\left(\frac{v_{100}}{v}\right)^{\frac{1}{41\cdot 924}}}{1-\frac{\alpha_1}{\beta_1}\left(\frac{v_{100}}{v}\right)^{\frac{1}{41\cdot 924}}}$$

$$l\frac{\beta_1-\alpha_1}{\beta_1^2}=1\cdot 8196671;\qquad l\frac{\alpha_1}{\beta_1}=-0\cdot 1134697.$$

Was die Bestimmung des Volumens anderer Dämpfe anbelangt, so scheint die Formel

$$16)\ldots\ldots v=\frac{C}{p\xi}$$

nur innerhalb sehr beschränkter Grenzen anwendbar zu sein; merkwürdigerweise ergibt sich für die meisten Dämpfe, für welche die Verdampfungswärme durch Regnault's Versuche bekannt ist, als bester Werth von $\xi=0\cdot 94$ wie beim Wasser, demzufolge

würden die Volumina der gesättigten Dämpfe zweier Flüssigkeiten bei gleicher Spannkraft in nahezu constantem Verhältnisse stehen.

So viel steht jedoch fest, dass letzterer Satz der Wahrheit viel näher kommt, als der der Chemie einverleibte, welcher das Mariotte'sche Gesetz auch auf die gesättigten Dämpfe als anwendbar betrachtet.

Nehme ich z. B. Äther unter der Voraussetzung, dass das bei $t = 100°$ gefundene spec. Volumen richtig sei

$$v_{100} = 0\cdot0569 + 0\cdot0013 = 0\cdot0582$$

so müsste das specifische Volumen bei 50° betragen:

$$v_{50} = v_{100} \frac{p_{100}}{p_{50}} \frac{a + 50}{a + 100} = v_{100} \frac{p_{100}}{p_{50}} (1 + \alpha_1 \tau)$$

$$v_{50} = 0\cdot19675.$$

Nach Gleichung (16) hingegen ergibt sich:

$$v_{50} = v_{100} \left(\frac{p_{100}}{p_{50}}\right)^{0\cdot94} = 0\cdot2089.$$

Nach Regnault's Formeln endlich ergibt sich:

$$v_{50} = 0\cdot2089 + 0\cdot0013 = 0\cdot2102$$

d. h. das Mariotte'sche Gesetz zieht einen Fehler von 6% nach sich, während die Gleichung (16) einen Fehler von 0·6% aufweist; bei ersterem ist also der Fehler zehnmal so gross.

So lange es daher nicht gelingt, die von Herrn Dr. Zeuner aufgestellte Form

$$pv = BT - Cp^{\frac{k-1}{k}}$$

oder eine andere theoretisch richtige Form für das specifische Volumen aufzustellen, wird am besten die Gleichung

$$v = v_{100} \left(\frac{p}{p_{100}}\right)^{0\cdot94}$$

beibehalten werden können und so lange gilt die Regel, „die specifischen Volumina zweier gesättigter Dampfarten von gleicher Spannung stehen in constantem Verhältnisse".

Weitere Consequenzen aus letzterer Regel abzuleiten unterlasse ich, denn sie ist vorläufig nur ein Nothbehelf.

Am Schlusse dieser meiner Untersuchung halte ich mich nochmals zur Bemerkung verpflichtet, dass ich dem hier aufgestellten neuen Satze keineswegs vollkommene Richtigkeit beimesse, sondern ihn vielmehr als einen Übergang zur diesbezüglichen rationellen Formel ansehe, schmeichle mir jedoch mit der Hoffnung, damit auf eine wichtige Beziehung hingewiesen zu haben, welche, wie mir scheint, bisher von den Begründern der mechanischen Wärmetheorie etwas stiefmütterlich behandelt wurde.

XXIV. SITZUNG VOM 9. NOVEMBER 1871.

Die Marine-Section des k. & k. Reichs-Kriegs-Ministeriums übermittelt unter dem 28. October einen weiteren, an dieselbe gelangten Bericht des k. k. Schiffslieutenants K. Weyprecht über seine Reise in das Eismeer, Ost Spitzbergen, zur Einsicht.

Herr Dr. Sigm. Mayer, Privatdocent der Physiologie und Assistent am physiologischen Institute zu Prag, übersendet eine Abhandlung: „Studien zur Physiologie des Herzens und der Blutgefässe. I. Über die Einwirkung des Strychnin auf das vasomotorische Nervencentrum".

Herr Regierungsrath Dr. C. v. Littrow berichtet über die neuerliche, am 4. November durch Herrn W. Tempel in Mailand gemachte Entdeckung eines teleskopischen Kometen.

Herr Hofrath Dr. E. Brücke überreicht eine in seinem physiologischen Institute ausgeführte Arbeit des Herrn A. Schapringer: „Über die Bildung des Medullarrohrs bei den Knochenfischen".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academy, The American, of Arts & Sciences: Proceedings. Vol. VIII, Sign. 18—37. Boston, 1869—1870; 8°.

Annales des mines. VI° Série. Tome XIX. 1re & 2e Livraisons de 1871. Paris; 8°.

Association, The American, for the Advancement of Science, Proceedings. XVIIIth Meeting, held at Salem. Mass., August, 1869. Cambridge, 1870; 8°.

Barrande, Joachim, Trilobites. (Extr. du Suppl. au Vol. I. du Syst. Sil. du centre de la Bohême.) Prague & Paris, 1871; 8°.

Barsanti Maggiore, Carlo Cav., Degli errori di scienza che s'insegnano e delle varietà scientifiche che non si sanno insegnare nelle scuole militari e civili del regno d'Italia. Roma, 1870; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIII, Nrs. 16—17. Paris, 1871; 4°.

De la Rive, Notice sur E. Verdet. Paris, 1870; 8°.

Gesellschaft, geographische, in Wien: Mittheilungen. N. F. 4. 1871, Nr. 10. Wien; 8°.

Institut, k. k. militär.-geographisches, in Wien: Die astronomisch-geodätischen Arbeiten desselben. I. Band. Wien, 1871; 4°.

Jahresbericht: Siehe Programme.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1871, Nr. 21. Wien; 8°.

Nature. Nr. 105, Vol. V. London, 1871; 4°.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Vol. V, Nr. 12. Torino, 1871; 4°.

Programme der Obergymnasien zu Bistritz und Ragusa, und Jahresbericht des k. k. I. Staatsgymnasiums in Graz. 1871. 8° & 4°.

Smithsonian Institution: Smithsonian Contributions to Knowledge. Vol. XVII. Washington, 1871; 4°. — Smithsonian Report. 1869. Washington, 1871; 8°.

Tschermak, Gustav, Mineralogische Mittheilungen. Jahrgang 1871, Heft 1. Wien, 1872; kl. 4°.

Volpicelli, Paolo, Analisi e rettificazioni di alcuni concetti, e di alcune sperienze che appartengono alla elettrostatica. Memoria I^a. Roma, 1866; 4°.

Votum zur beabsichtigten Vereinigung der k. k. Forst-Akademie zu Mariabrunn mit der in Wien zu gründenden landwirthschaftlichen Hochschule. Wien, 1871; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXI. Jahrgang, Nr. 44. Wien, 1871; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXIII. Jahrgang, 13. Heft. Wien, 1871; 4°.

Über die Bildung des Medullarrohrs bei den Knochenfischen.

Von **Alois Schapringer**, cand. med.

(Aus dem physiologischen Institute der Wiener Universität.)

Bekanntermassen wird bei den Wirbelthieren das Centralnervensystem auf folgende Weise angelegt: Die beiden Rückenwülste, welche die Rückenfurche begrenzen und Gebilde des obersten Keimblattes sind, krümmen sich gegen einander zu während sie immer höher werden, bis sie mit ihren freien Rändern aufeinander stossen und, die Rückenfurche zu einem Canal überdachend, verwachsen. Derjenige Theil des oberen Keimblattes, welcher nun die Wand des Canals bildet, wird durch zwei keilförmig sich einschiebende Fortsätze des mittleren Keimblattes von dem übrigen Theil abgetrennt und vollständig umwachsen. Er führt nun den Namen Medullarrohr. Dieses hat also vom Moment seiner Bildung an ein offenes Lumen, aus welchem später der Centralcanal des Rückenmarkes mit seiner Fortsetzung in Hirnventrikel und *Aquaeductus Sylvii* wird.

Dass bei den Knochenfischen eine Abweichung von der bei den Wirbelthieren im allgemeinen gültigen Regel für die Entstehung des Medullarrohrs anzutreffen ist, wurde schon von Baer und Carl Vogt angedeutet und ist in neuester Zeit von Kupffer ausdrücklich hervorgehoben und detaillirt beschrieben worden.

Baer[1] erzählt, dass bei *Cyprinus erythrophthalmus* die innere Auskleidung der Rückenfurche sich abhebt und über die Ränder der Furche als ein dünnes Häutchen hinspannt. Unter

[1] Untersuchungen über die Entwicklungsgeschichte der Fische. p. 13.

diesem Häutchen soll dann die Verschmelzung der freien Ränder der Rückenwülste wie gewöhnlich erfolgen.

Carl Vogt[1] lässt die oberste Schichte des äusseren Keimblattes (denn das sind seine *Cellules epidermoïdales*) an der Bildung der Rückenfurche und ihrer Ränder von Anfang nicht Theil nehmen.

Lereboullet und Coste bringen über unsere specielle Frage nichts wesentlich Neues vor.

Kupffer[2] hat zuerst richtig erkannt, dass die ursprüngliche Rückenfurche wieder verstreicht, ohne dass sie zur Bildung des Centralcanals verwendet worden wäre.

Die Art, wie dieser Canal entsteht, stellt er folgendermassen dar: In der Mittellinie des Embryonalschildes verdickt sich die oberste Keimschichte zur Medullarplatte, die mit der obersten Zellenlage dieser Schichte, dem Hornblatte, vorerst noch ein Continuum bildet und schon in diesem Zustande in der Vordergegend zwei solide seitliche Auftreibungen zeigt, die Uranlagen der Augen. Später trennt sich die Anlage des Centralnervensystems, die Medullarplatte, vom oberflächlichen Hornblatte, wird zu einem soliden gewölbten Strang, dem Medullarstrang, und in diesen Strang soll, und zwar zu einer Zeit, wo die primäre Furche, in deren Bildung das Hornblatt mit einbegriffen war, schon verstrichen ist, vorerst in der Gegend des Gehirns und dann in der des Rückenmarkes, von oben her eine Furche eindringen, welche sich in derselben Reihenfolge, wie sie sich gebildet hat, auch schliesst, indem ihre Ränder oben verschmelzen[3].

Dieser Deutung von Bildern, welche Kupffer an frischen Seefisch-Embryonen gewonnen hat, entsprechen die Befunde an Durchschnitten gehärteter Forellen-Embryonen nicht vollständig. An solchen sieht man den Embryonalschild in der Gegend der Mittellinie sich bedeutend verdicken, wodurch einerseits eine starke Erhebung über das Niveau der Oberfläche der Dotter-

---

[1] Embryologie des Salmones, pag. 54.

[2] Beobachtungen über die Entwicklung der Knochenfische. Archiv für mikroskop. Anatomie. 4. Bd. 1868.

[3] A. a. O. pag. 236, 250.

kugel, andererseits, und zwar hauptsächlich in der vorderen Hälfte der Embryonalanlage durch Wachsthum in die Tiefe eine Einkerbung der Dotterkugel bedingt wird. Man sieht ferner sehr ausgesprochen eine Sonderung des obersten Keimblattes in zwei Lagen, wie sie Stricker und Schenk beschrieben haben.

Die untere dieser beiden Lagen ist es, welche in der Mittellinie eine bedeutende Zellenvermehrung erfährt und die Einkerbung verursacht. Diese Masse, welche wir nach Kupffer die Medullarplatte der Forelle nennen wollen, ist nach unten schmäler und stösst nach oben breiter werdend an das Hornblatt.

In diesem Stadium sieht man in der Hirngegend zwei solide seitliche Wülste aus der Medullarplatte hervorwachsen, die primitiven Augenknospen; doch ist von einem, von zelligen Elementen freien Raum, wie ihn Kupffer in seinen Figg. 26 bis 28 abbildet, welcher neben der Medullarplatte durch Abheben des Hornblattes vom unterliegenden mittleren Keimblatte entstehen und in welchen die Augenknospen frei hineinwachsen sollen, an Durchschnitten nichts zu entdecken.

Nun erfolgt die Abtrennung der Medullarplatte vom Hornblatte derart, dass die Oberfläche, mit welcher sie an dasselbe stösst, immer schmäler wird bis nur ein enger Berührungsstreifen übrig bleibt.

Dieser Vorgang, der auf dem Hineindrängen von Zellen des mittleren Keimblattes beruht, beginnt am Kopfende des Embryo und schreitet langsam zum Schwanzende vor. Der abgetrennte solide Medullarstrang zeigt im Durchschnitt eine stehende Ellipse, in der die in die Länge gezogenen Zellen radial gestellt sind. Diese weichen alsbald derart auseinander, dass in der Mitte eine anfangs schmale, später immer breiter werdende senkrechte Spalte entsteht: das ist die Anlage des Centralcanals.

Der *Canalis centralis medullae spinalis* bildet sich also bei der Forelle nicht wie bei den Säugethieren, Vögeln und Amphibien durch Verschluss der Rückenfurche und überhaupt nicht dadurch, dass sich in die Anlage des Centralnervensystemes von aussen eine Furche einsenkt, sondern durch einen im Innern dieser Anlage auftretenden Spaltungsprocess.

Durch ähnliche innerliche Dehiscenz erhalten auch die ursprünglich soliden Augenknospen ein schmales Lumen, wie es Kupffer richtig angibt[1], nur hätte er in seiner Fig. 10 der im Vorderende des Medullarstranges gezeichneten Längslinie dieselbe Deutung zu Theil werden lassen sollen, die er den in der Mitte der Augenanlagen auftretenden Linien gibt.

---

[1] A. a. O. pag. 251.

Studien zur Physiologie des Herzens und der Blutgefässe.

Von Dr. **Sigmund Mayer,**
Privatdocent der Physiologie und Assistent am physiologischen Institute zu Prag.

(Mit 2 Tafeln.)

I. Abhandlung.

Über die Einwirkung des Strychnin auf das vasomotorische Nervencentrum.

Von jeher hat unter den als Gifte bezeichneten Körpern welche einen ausserordentlich mächtigen Einfluss auf die Functionen des Thierleibes ausüben und in Folge dessen gewöhnlich deletär wirken, das Strychnin in hervorragender Weise das Interesse der Physiologen gefesselt. Trotz der überaus zahlreichen Untersuchungen aber, welche über die Wirkungsweise dieses Stoffes vorliegen, stehen unsere Kenntnisse über dieselbe nicht auf einer sehr hohen Stufe. Zweierlei Momente scheinen, meiner Ansicht nach, hievon die Schuld zu tragen. Einmal ist die Wirkung des Strychnin auf den motorischen Apparat ein so gewaltiger, dass das Interesse des Beobachters ganz auf diesen einen Effect der Strychninvergiftung sich zu concentriren geneigt war. Zudem wird durch die vom Nervensystem ausgehende stürmische Thätigkeit der willkürlichen Körpermusculatur die Beobachtung im Gebiete der übrigen Organe wesentlich erschwert. Zweitens aber hat erst die unablässig thätige physiologische Forschung der letzten Decennien das thatsächliche Material und die Methodik an die Hand gegeben, um die Wirkung der Gifte, besonders auch mit Rücksicht auf die Thätigkeitsäusserungen der Bestandtheile des Circulationsapparates, des Herzens und der Gefässe, genauer zu untersuchen, als dies früher möglich war.

Ich beabsichtige nicht, in der nachfolgenden Abhandlung die Gesammtheit der in Folge einer Strychninvergiftung auftretenden Erscheinungen zu erörtern.

Die vorliegende Untersuchung war der Hauptsache nach dem Studium der Einwirkung des Strychnin auf das vasomotorische Nervensystem gewidmet. Ich werde jedoch Gelegenheit finden, auf mehrere andere Punkte hinzuweisen, über welche ich im Verlaufe meiner ziemlich zahlreichen Versuche mannigfache Erfahrungen gesammelt habe.

Sämmtliche Experimente sind an Hunden und Kaninchen und mit Hilfe des Kymographion angestellt. Der Schreiber eines Quecksilbermanometer oder des Fick'schen Federmanometer verzeichnete seine Oscillationen auf einen berussten Papierstreifen, welcher über eine durch ein Uhrwerk in Bewegung gesetzte Trommel lief. Ausserdem war eine Vorrichtung getroffen, um die Zeiten mit Hilfe eines Metronom, welches einen Strom schloss und öffnete, direct zu verzeichnen, und eine zweite, um die im Verlaufe eines Versuches vorkommenden Eingriffe, ebenfalls auf elektromagnetischem Wege, zu signalisiren. — Die Manometer wurden mit der *Arteria carotis* durch eine endständig in dieselbe eingeführte Canüle in Verbindung gesetzt.

Das von mir angewendete Präparat war *Strychninum nitricum;* ich benützte zwei wässrige Lösungen, von denen die eine 0·0008 Gr., die andere 0·00008 *Strychn. nitr.* im CC. enthielt. Das Gift wurde gewöhnlich direct ins Blut durch die *Vena cruralis* oder eine *Jugularis externa* injicirt; einigemal habe ich dasselbe auch durch subcutane Injection dem Versuchsthiere beigebracht.

Die zu den Versuchen verwendeten Hunde wurden immer vor der Vornahme der nothwendigen Operationen durch Injection von *Tinctura opii* in eine Vene betäubt. In der Mehrzahl der Experimente wurde eine Trachealcanüle eingeführt und jederseits ein Faden um den *Nervus vagus* gelegt.

Die nun hauptsächlich uns hier interessirende Erscheinung glaube ich am besten erläutern zu können mit Zuhilfenahme der auf Tafel I abgebildeten Curve I. Dieselbe stammt von einem opiatisirten kleinen jungen Pintsche, welchem in einem Zeitraume von 130 Sec. 0·00016 Gr. *Strychn. nitr.* in zwei gleichen Dosen (je einmal 0·00008 Gr. in 1 CC. Wasser) eingespritzt wurde.

Ungefähr 30 Sec. nach der Einverleibung der zweiten Dosis bemerkt man auf der Curve ein sehr bedeutendes Ansteigen des arteriellen Druckes und zu gleicher Zeit eine beträchtliche Steigerung der Pulsfrequenz.

Mit dem Beginne der Drucksteigerung brach zu gleicher Zeit ein über die ganze Körpermusculatur sich ausbreitender Tetanus aus; in Folge des Tetanus der Inspiratoren verharrte der Thorax kurze Zeit in einer maximalen Inspirationsstellung.

Man sieht leicht ein, welche in der verschiedensten Weise den Blutdruck und den Herzschlag beeinflussenden Momente bei der angegebenen Weise, den Versuch anzustellen, ins Spiel kommen können. Es sind dies einmal die auf rein mechanischem Wege wirkenden Contractionen der quergestreiften Muskeln, wodurch einerseits grössere Gefässstämme comprimirt werden können, andererseits die Widerstände für den Blutstrom in den Muskeln nach Ausweis der Untersuchungen von Sadler Veränderungen erfahren. Sodann kommen die mit der inspiratorischen Erweiterung des Thorax einhergehenden bekannten Wirkungen auf den Blutstrom und weiterhin die mit dem Aufhören der Respirationsbewegungen eintretende Verarmung des Blutes an Sauerstoff und deren Einwirkung auf die Innervationscentren des Herzens und der Blutgefässe in Betracht. Ehe wir daher in die weitere Discussion des in der Curve I dargestellten Versuches eintreten, wollen wir die Aufmerksamkeit auf einen zweiten Fundamentalversuch lenken, dessen Ergebniss die Curve III veranschaulicht.

Dieselbe stammt von einem mit Curare bewegungslos gemachten Hunde, bei welchem die künstliche Respiration eingeleitet worden war.

Ein Blick auf die Tafel lehrt, dass, der Injection des Strychnin folgend, die Curve des Druckes ein eminentes Ansteigen zeigt, während in der Zahl der Pulse, welche als secundäre Elevationen den durch die Einblasungen bedingten primären Erhebungen aufgesetzt sind, keine wesentlichen Veränderungen zu constatiren sind.

Durch die Vergiftung mit Curare haben wir sämmtliche oben nur flüchtig erwähnten Momente ausser Wirksamkeit gesetzt. In Folge der Lähmung der Muskelnerven regt sich keine Faser an

dem vollständig ruhig daliegenden Thiere; der Thoraxraum erleidet die durch die künstlichen Lufteinblasungen bedingten regelmässigen Volumsänderungen, die in keiner Weise mehr durch die Wirkung des Strychnin auf die quergestreifte Musculatur alterirt werden. Durch die fortwährenden Lufteinblasungen wird dem Blute des Versuchsthieres der nöthige Sauerstoff unbehindert zugeführt. Trotz alledem sehen wir die eminente Steigerung des arteriellen Druckes, deren Ursachen wir nun näher nachzugehen haben. Der zweite an die Spitze dieser Untersuchung gestellte Versuch wird uns diese Aufgabe wesentlich erleichtern.

Dass die tetanische Contraction der Musculatur nicht die Ursache der im Versuch I beobachteten Drucksteigerung ist, lehrt der Erfolg der Experimente, welche an den mit Pfeilgift vergifteten Thieren angestellt wurden. Ebenso war es schon von vornherein klar, dass die tetanische Inspiration nicht in einem ursächlichen Zusammenhange mit der Drucksteigerung stehen kann. Denn es ist nicht abzusehen, auf welche Weise hierdurch die so bedeutende Druckerhöhung sollte hervorgerufen worden sein.

Zudem sehen wir die Drucksteigerung bei dem nicht curarisirten, ebenso wie bei dem mit Curare vergifteten Thiere auftreten. Unzweideutig erfahren wir aus den an curarisirten Thieren angestellten Experimenten, dass die unterbrochene Sauerstoffzufuhr an der Hervorbringung der Drucksteigerung nicht betheiligt ist, da sie ebenso unter regelmässiger künstlicher Respiration zur Erscheinung kommt.

In welchem Verhältnisse die Steigerung der Pulsfrequenz, welche wir in Versuch I haben auftreten sehen, zur Darreichung des Strychnin steht, wollen wir an einem späteren Orte noch näher erörtern. Hier soll nur darauf hingewiesen werden, dass in der gesteigerten Pulsfrequenz die Ursache der colossalen Drucksteigerung nicht gesucht werden kann. Denn erstlich fehlt die Pulsbeschleunigung, während die Drucksteigerung auftritt, am curarisirten Thiere. Zweitens ist die sehr ausgesprochene Steigerung in der Pulsfrequenz, wie sie in dem aus sehr vielen Versuchen ausgewählten, auf Tafel I dargestellten Falle an dem nicht curarisirten Thiere zur Beobachtung kam, durchaus kein ausnahmslos vorkommendes Phänomen, während bei richtig

gewählter Dosis des Giftes, die Steigerung des Druckes im arteriellen Systeme gar nie ausbleibt. Drittens ergibt sich aus folgender Überlegung, dass die gesteigerte Pulsfrequenz nicht in directem ursächlichen Zusammenhange mit der Drucksteigerung steht. Wir knüpfen dieselbe füglich an die Betrachtung des auf Taf. I Curve I abgebildeten, mit VR bezeichneten Abschnittes der Curve I. Wir sehen, dass auf demselben Pulse dargestellt sind, wie sie in so charakteristischer Weise durch starke Reizung der im Vagus verlaufenden Hemmungsfasern für das Herz hervorgerufen werden. Trotz dieser sehr bedeutenden Pulsverlangsamung, welche, wären nicht andere nach entgegengesetzter Richtung wirksame Momente im Spiele, ein starkes Sinken des arteriellen Druckes hätte hervorrufen müssen, sehen wir hievon nichts eintreten. Der mittlere Druck, welcher bei der starken Pulsverlangsamung herrscht, ist offenbar noch über dem Werthe gelegen, den er kurz vor dem Ausbruche der Vergiftungssymptome hatte. Hieraus folgt mit Sicherheit, dass von der beobachteten Drucksteigerung die zu gleicher Zeit bestehende Vermehrung der Herzcontractionen nicht die Ursache sein kann.

Nachdem wir nun verschiedene, während des Versuches sich einmischende Bedingungen als mit der in Frage stehenden Erscheinung der bedeutenden Drucksteigerung im arteriellen Systeme nicht in directem ursächlichem Zusammenhange stehend erkannt haben, ist die wirkliche Ursache der colossalen Drucksteigerung im arteriellen Systeme in einer ausserordentlich intensiven Reizung des vasomotorischen Centrums im Gehirn und der hiedurch hervorgerufenen Contraction der kleinen Arterien zu suchen.

Schon auf dem Wege der Ausschliessung konnte man zu dem Resultate kommen, dass die beobachtete Drucksteigerung füglich nur in einer Zunahme der Widerstände im arteriellen Systeme begründet sein kann, da die Vermehrung des Inhaltes des Gefässsystemes um zwei CC. Flüssigkeit wohl nicht weiter in Betracht kommen kann.

Dass sich die kleinen Arterien in Folge einer Strychninvergiftung wirklich sehr stark contrahiren, lehrt die Inspection der Därme, welche vollständig erblassen; ob sich die Contraction

auf die kleinen Arterien des Gesammtkörpers bezieht oder ob einzelne Gefässbezirke von derselben ausgenommen bleiben, habe ich nicht näher untersucht. Die ausserordentliche Erhöhung des Blutdruckes macht das erstere wahrscheinlich. Es konnte sich noch um die Erledigung der Frage handeln, ob die Wirkung des Strychnin sich direct auf die irritabeln Bestandtheile der Gefässwandungen oder auf das vasomotorische Centrum im Gehirne erstreckt. Durch Versuche, in denen ich die Vasomotoren von ihrem Ursprunge im Gehirne durch Durchschneidung des Rückenmarkes hoch oben am Halse trennte, zeigte sich, dass nunmehr die Steigerung des Blutdruckes entweder ganz ausblieb oder nur ein sehr schwaches Aufsteigen bemerklich war.

Nachdem wir, wie wir glauben, den Beweis erbracht haben, dass das Strychnin in exquisiter Weise durch Erregung des vasomotorischen Centrums im Hirne, die kleinen Arterien zur Contraction bringt, haben wir letztere noch etwas näher in Betracht zu ziehen.

Sowohl aus der Beobachtung der Curven des arteriellen Druckes als auch aus der directen Inspection kann man entnehmen, dass die Contraction der Gefässe längere Zeit andauert. Der Blutdruck kann mehrere Minuten auf einer Höhe verharren, welche bedeutend über dem Drucke liegt, welcher vor der Vergiftung bestand. Von diesem sinkt er dann nicht plötzlich, sondern sehr allmälig ab. Ganz in Übereinstimmung mit diesem Verhalten des Blutdruckes sieht man an den blossgelegten Därmen, wie dieselben, nachdem sie in Folge der Arteriencontraction vollständig erblasst waren, ganz allmälig vom Mesenterium her wieder roth werden und die vollständig unsichtbar gewordenen kleinen Arterien nach und nach als rothe Streifen wieder auftauchen. Es handelt sich also hier um eine tetanische Erregung des vasomotorischen Centrums, um einen förmlichen tonischen Arterienkrampf.

Mehrere Mal habe ich auf der Höhe der durch Strychnin bewirkten Steigerung des arteriellen Blutdruckes in sehr schöner Weise das Auftreten der von Traube entdeckten, von Hering näher analysirten und als Athembewegungen des Gefässsystemes bezeichneten periodischen Schwankungen des Druckes beobachtet. Diese Schwankungen traten auf, trotzdem die künstliche Ventila-

tion fortwährend unterhalten wurde; auf der diesbezüglichen Curve III finden sich auch die den Lufteinblasungen entsprechenden Elevationen deutlich ausgeprägt.

Reizt man, während der Druck sehr hoch ist, einen sensiblen Nerven elektrisch (in den auf diesen Punkt gerichteten Versuchen habe ich den centralen Stumpf des durchschnittenen *Nervus cruralis* der Reizung unterworfen) so folgt dieser Erregung immer noch eine weitere, ihrem Werthe nach in verschiedenen Versuchen verschiedene Steigerung des Druckes. Es ergibt sich hieraus, dass erstens durch die Vergiftung mit Strychnin die centrale Verknüpfung zwischen vasomotorischen und sensiblen Nerven nicht alterirt ist und zweitens, dass das vasomotorische Centrum, trotz der intensiven Erregung, in welcher es sich bereits befindet, noch einen Zuwachs der letzteren erfahren kann. Nach den jüngsthin angestellten Versuchen von Owsjannikow[1], welche dem Centrum für die tonische und demjenigen für die reflectorische Erregung der vasomotorischen Nerven verschiedene Stellen im Hirne anweisen, liegt der Gedanke nahe, dass das Gift einerseits, andererseits die von der Peripherie in der Bahn der sensiblen Nerven zugeleiteten Erregungen die Angriffspunkte ihrer Wirksamkeit auf das vasomotorische Centrum an verschiedenen Stellen des letzteren haben mögen.

Was das Verhalten der Pulsfrequenz betrifft, so sind die Erscheinungen bei der Strychninvergiftung nicht constant. In einer Anzahl von Versuchen habe ich Pulse beobachtet, wie sie in charakteristischer Weise durch natürliche centrale Reizung oder künstliche Erregung der hemmenden Vagusfasern erhalten werden. Diese Pulsverlangsamung kam nicht mehr zur Beobachtung, wenn die *N. n. vagi* am Halse vor der Vergiftung durchschnitten worden waren. Es kommen aber auch Fälle vor, in denen zu gleicher Zeit mit dem Tetanus der quergestreiften Musculatur und dem Krampfe der kleinen Arterien eine nicht unbeträchtliche Steigerung der Pulsfrequenz auftritt; insbesondere kommt letztere zur Beobachtung an nicht curarisirten Thieren.

---

[1] Sitzungsberichte der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 6. Mai 1871.

Was die Erklärung dieser Änderungen in der Pulsfrequenz betrifft, so ist dies bekanntlich eine schwierige Aufgabe, da die Herzcontractionen von so vielen Factoren abhängen, die oftmals dem Grade ihrer Wirkung nach sich der Beurtheilung unterziehen. Da ich, wie oben bemerkt, nicht die gesammte Symptomatologie der Strychninvergiftung zum Objecte meiner Untersuchung gemacht habe, so will ich hier nur auf einige wesentliche Gesichtspunkte hinweisen.

Was zuvörderst die Pulsverlangsamung betrifft, so ist mir in vielen Versuchen kein Zweifel darüber geblieben, dass das Strychnin ebenso wie das Centrum der vasomotorischen Nerven, so auch die Ursprünge der hemmenden Vagusfasern für das Herz zu erregen vermag. Diesen Satz leite ich füglich nur aus Versuchen an mit Curare vergifteten Thieren ab, bei denen durch die künstliche Respiration das Blut des Versuchsthieres hinreichend mit Sauerstoff versehen wurde. Bei nicht curarisirten Thieren, bei denen die Inspiratoren tetanisch contrahirt sind, tritt nach kurzer Zeit ebenfalls eine starke Vaguserregung auf, die aber mit der Strychninvergiftung direct nichts zu thun hat. Diese Pulsverlangsamung ist nur eine Folge der mit dem Stillstand der Athmung gegebenen Verarmung des Blutes an Sauerstoff, durch welche bekanntlich, nach Thiry's Entdeckung, für die centralen Enden der hemmenden Vagusfasern ein Reiz gesetzt wird. Eine auf diesem Wege hervorgerufene Pulsverlangsamung ist auf Curve I VR abgebildet.

Sie verschwindet alsbald mit dem Einsetzen der künstlichen Respiration, während der Druck noch längere Zeit auf einer Höhe verharrt, welcher die zu Anfang des Versuches herrschende Druckhöhe um ein beträchtliches übersteigt.

Was die Pulsbeschleunigung betrifft, die ich zum öfteren im Gefolge der Strychninvergiftung habe auftreten sehen, so ist die Erklärung derselben nur auf Grund weiterer Untersuchungen möglich. Da dieselbe gewöhnlich nur beim nicht curarisirten Thiere zum Vorschein kam, so ist es nicht unwahrscheinlich, dass zwischen dieser Erscheinung und der tetanischen Contraction der quergestreiften Musculatur eine ursächliche Verknüpfung besteht; auch ist daran zu erinnern, dass durch den Inspirations-Tetanus resp. die starke Ausdehnung der Lungen eine Be-

schleunigung der Pulse auf reflectorischem Wege durch Herabsetzung des Vagustonus gesetzt werden kann, wie dies jüngsthin Hering[1] auseinanderge setzt hat.

Wenn es sich darum handelt, die Wirkung eines Giftes zu analysiren, so dürfte es für die Auffassung der Erscheinungen nicht ohne Wichtigkeit sein, dieselben mit Symptomencomplexen zu vergleichen, wie sie durch Beeinträchtigung normaler Körperfunctionen hervorgerufen werden.

Am genauesten bekannt sind in dieser Beziehung die mit der Unterbrechung der Respiration auftretenden sog. Erstickungserscheinungen. Nun ist nicht ohne Interesse wahrzunehmen, wie das Strychnin in seiner Wirkung auf den Organismus die grösste Ähnlichkeit mit der Erstickung darbietet.

Sehen wir ab von der durch das Strychnin hervorgerufenen gesteigerten Thätigkeit der reflexvermittelnden Apparate, welche eine specifische, hier nicht weiter zu erörternde Wirkung des Giftes darstellt, so haben wir zwischen Erstickung und Strychninwirkung eine frappante Ähnlichkeit. Hier wie dort eine bedeutende Steigerung des arteriellen Blutdruckes, welche durch eine in Folge einer Reizung des vasomotorischen Centrums hervorgerufene Contraction der kleinen Arterien bedingt ist. Sodann ist der Erstickung, wie vielen Fällen der Strychninvergiftung, die Pulsverlangsamung in Folge einer centralen Erregung der hemmenden Vagusfasern gemeinschaftlich. Drittens treten Krämpfe der quergestreiften Muskulatur auf bei der Erstickung ebenso wie bei der Strychninvergiftung. Und hier ist der Ort, an dem ich nicht umhin kann, einer weitverbreiteten unrichtigen Vorstellung über die Strychninwirkung entgegenzutreten.

Nach dieser werden nämlich die Krämpfe bei der Strychnin-intoxication vorzugsweise als eine vom Rückenmarke abhängige Erscheinung aufgefasst; ihr leichtes Auftreten wird an das gesteigerte Reflexvermögen des Rückenmarkes unter Intervention von der Peripherie herkommender sensibler Erregungen geknüpft. Diese Auffassung aber ist entschieden der wirklichen Sachlage nicht entsprechend, indem die zuerst auftretenden Krämpfe hauptsäch-

[1] Sitzungsberichte der kais. Akademie d. Wissensch. zu Wien, Bd. LXIV 1871.

lich durch primäre Erregung der *Medulla oblongata* hervorgerufen werden, geradeso wie bei der Erstickung. Hat man einem Thiere vor der Vergiftung mit Strychnin das Rückenmark z. B. im Brusttheile durchschnitten, so bricht sehr rasch ein Tetanus in denjenigen Muskelgruppen aus, welche von Nerven innervirt werden, die oberhalb der Schnittstelle vom Rückenmarke ausgehen. Später sieht man auch an Theilen, die ihre Nerven vom Rückenmark unterhalb der Schnittstelle beziehen Zuckungen auftreten, welche als Reflexzuckungen anzusehen sind.

Mit Rücksicht auf zweierlei Punkte hat man bei der Strychninvergiftung die primären und secundären Wirkungen des Giftes auseinander zu halten.

Primär wirkt das Gift erstlich auf das vasomotorische Centrum, zweitens auf das Hemmungscentrum für das Herz, drittens in so heftiger Weise auf das Athemcentrum, dass die Erregung von diesem auf die gesammte quergestreifte Körpermusculatur irradiirt, viertens auf die reflexübertragenden Apparate des Rückenmarkes. Nun sieht man aber leicht ein, wie secundär mit dem Auftreten der eben erörterten Erscheinungen der Effect derselben auf den Körper gleichsam multiplicirt werden kann. Durch die heftigen, von der *Medulla oblongata* ausgehenden Innervationsstösse für die quergestreifte Muskulatur erleidet der Körper derartige Erschütterungen, dass durch die hierdurch eingeführten sensiblen Erregungen vom Rückenmark ausgehende neue Reflexinnervationen sich zu den cerebralen Erregungen hinzugesellen. Hat aber diese Wirkung auf die motorischen Apparate nur kurze Zeit gedauert, so tritt sofort ein neues Moment hinzu, nämlich die eintretende Verarmung des Blutes an Sauerstoff, welche, wie oben erwähnt, abgesehen von der erhöhten Reflexerregbarkeit des Rückenmarkes, ebenso wirkt, wie das Strychnin. Hiermit steht auch die allgemeine Ansicht vollkommen im Einklang, dass mit Strychnin vergiftete Thiere eigentlich an Erstickung zu Grunde gehen, indem die specifischen Wirkungen des Giftes immer zu denjenigen Störungen der Functionen führen, die, bei hinlänglicher Stärke der Dosis, schliesslich den Tod durch Erstickung in ihrem Gefolge haben.

Die wichtige Rolle, welche nach den Ergebnissen der zahlreichen, über die Wirkung des Strychnin angestellten Versuche

von der *Medulla oblongata* ausgehende Erregungen bei der Strychninvergiftung spielen wird noch weiter bekräftigt durch eine Angabe von E. Gay [1]. Es zeigt sich nämlich bei der quantitativen Bestimmung des Strychnin in dem centralen Nervensystem vergifteter Thiere, dass in der *Medulla oblongata* im Verhältniss zu der Masse des Organs mehr Strychnin abgelagert wird, als in der *Medulla spinalis* und in dem *Pons Varolii.*

Mit Rücksicht auf die äusserst energische Wirkung des Strychnin auf das vasomotorische Centrum kann man dieses Gift zusammen mit dem Nicotin [2] und dem Calabar [3]. in eine Gruppe bringen.

Was die in der Literatur niedergelegten Angaben über den vorliegenden Gegenstand betrifft, so ist zu bemerken, dass bereits Richter [4] in einer sorgfältigen Untersuchung den Einfluss des Strychnin auf die Gefässe beobachtet hat. Sowohl eine starke Contraction der Schwimmhautarterien beim Frosche wie der Flughautarterien bei der Fledermaus werden als Folge der Strychninvergiftung in der angezogenen Abhandlung erwähnt. Ebenso zeigte sich in zwei von Richter zur Messung des arteriellen Blutdruckes beim Hunde angestellten Versuchen nach der Vergiftung der Druck doppelt so hoch wie im Normalzustande. Richter hat jedoch diese Erscheinungen nur nebenher erwähnt und nicht näher analysirt, da in seinen Versuchen das Hauptaugenmerk auf die Erledigung anderer Fragen gerichtet war. Richter's präcise Angaben, welche doch für die Auffassung der Strychninwirkung von der höchsten Wichtigkeit sind, wurden jedoch merkwürdigerweise in den Hand- und Lehrbüchern sehr

---

[1] Centralblatt für die medicinischen Wissenschaften 1867, pag. 49.

[2] Über die Wirkungsweise des Nicotin und Atropin auf das Gefässnervensystem, von Surminsky, in Zeitschrift für rationelle Medicin III. Reihe, Bd. XXXVI, pag. 211.

[3] v. Bezold und Götz Centralblatt für die medicin. Wissensch. 1867, pag. 242.

[4] Die Wirkung des amerikanischen Pfeilgiftes und der künstlichen Respiration bei Strychninvergiftung; in Zeitschrift für rationelle Medicin 1863, III. Reihe, Bd. XVIII, pag. 76.

wenig berücksichtigt. Valentin[1] erwähnt der geschilderten Wirkung des Strychnin auf die Gefässnerven nicht, ebenso wenig Schroff; Husemann[2] nur nebenher.

Für eine Theorie der Strychninvergiftung aber wird man wohl in Zukunft den in diesen Zeilen besprochenen überaus mächtigen Einfluss des Strychnin auf das vasomotorische Centrum nicht mehr übersehen können.

---

[1] Versuch einer physiologischen Pathologie der Nerven. Leipzig und Heidelberg 1864.

[2] Die Pflanzenstoffe etc. Berlin 1870. pag. 391.

Erklärung der Abbildungen.

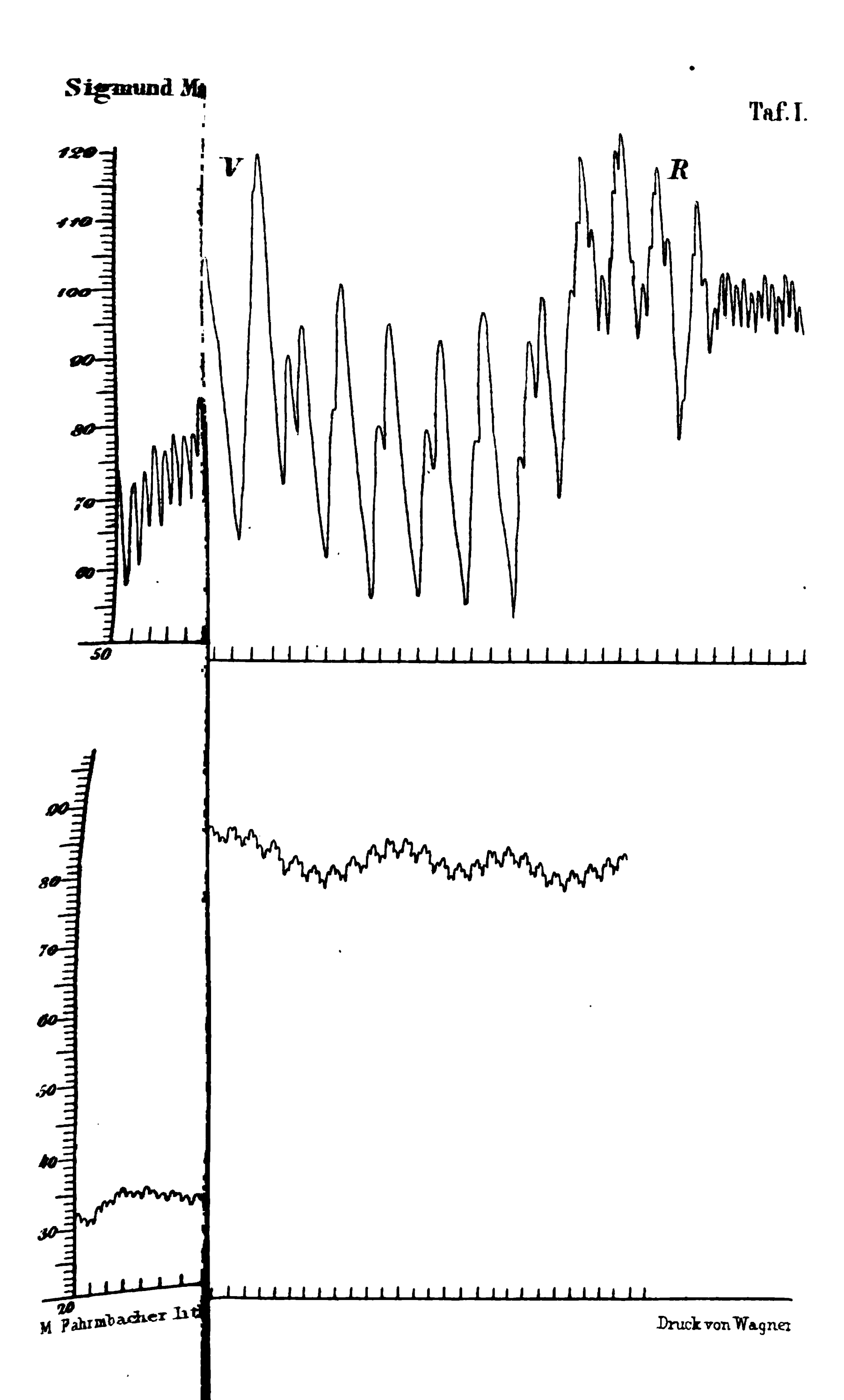
Die Art und Weise, wie die Curven gewonnen wurden, ist im Texte erläutert: In Curve II und III ist die Abscisse um 20 Mm., in Curve I um 50 Mm. über die eigentliche dem Nullpunkte entsprechende Abscisse gerückt. Um den wirklichen Druck zu finden, muss also auf Curve II u. III zu den jeweiligen Ordinatenwerthen 20, auf Curve I 50 hinzuaddirt und die so erhaltene Zahl mit 2 multiplicirt werden.

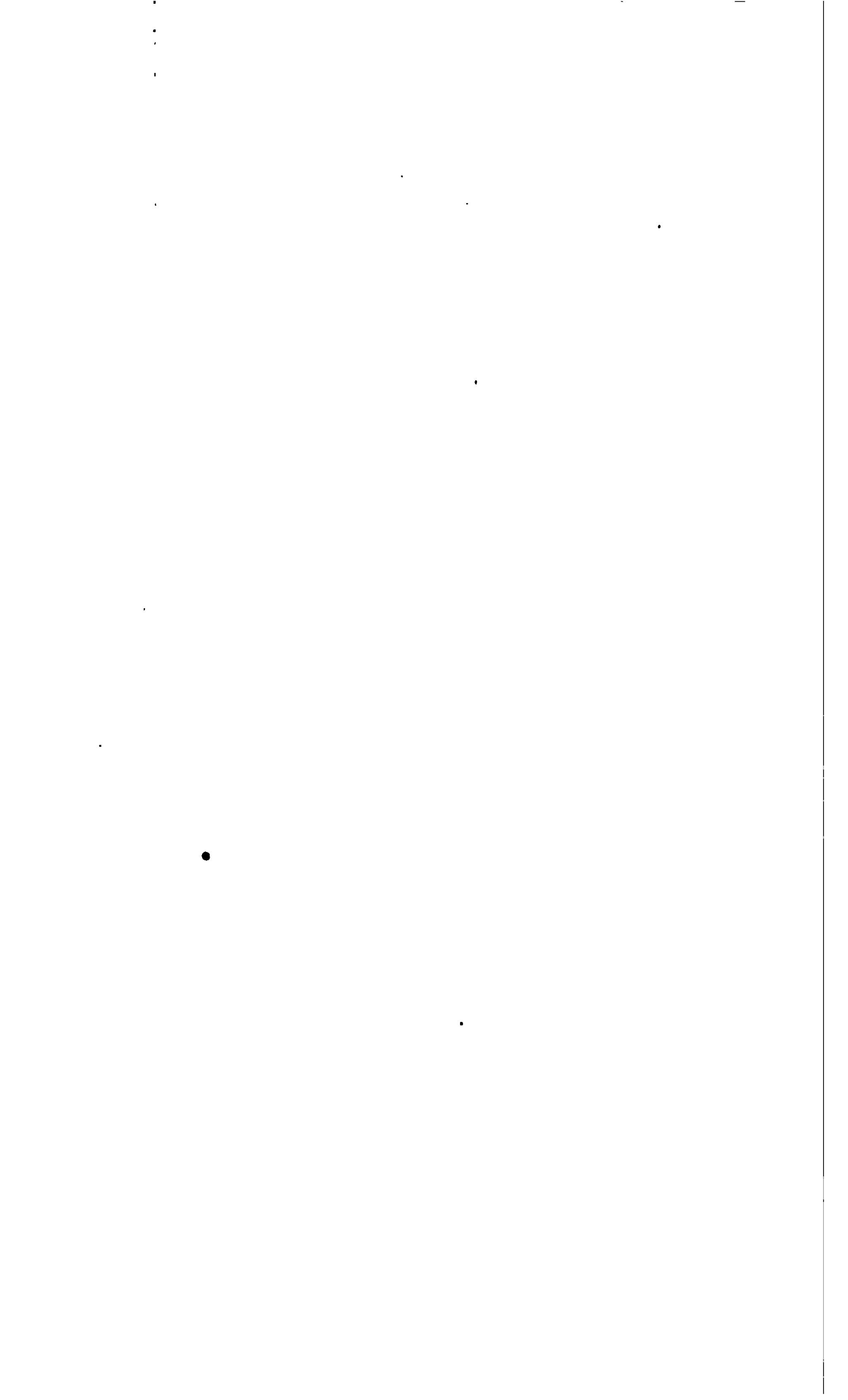
Auf der Abscisse sind die Zeiten, auf Curve I und II in Secunden, auf Curve III in Doppelsecunden verzeichnet.

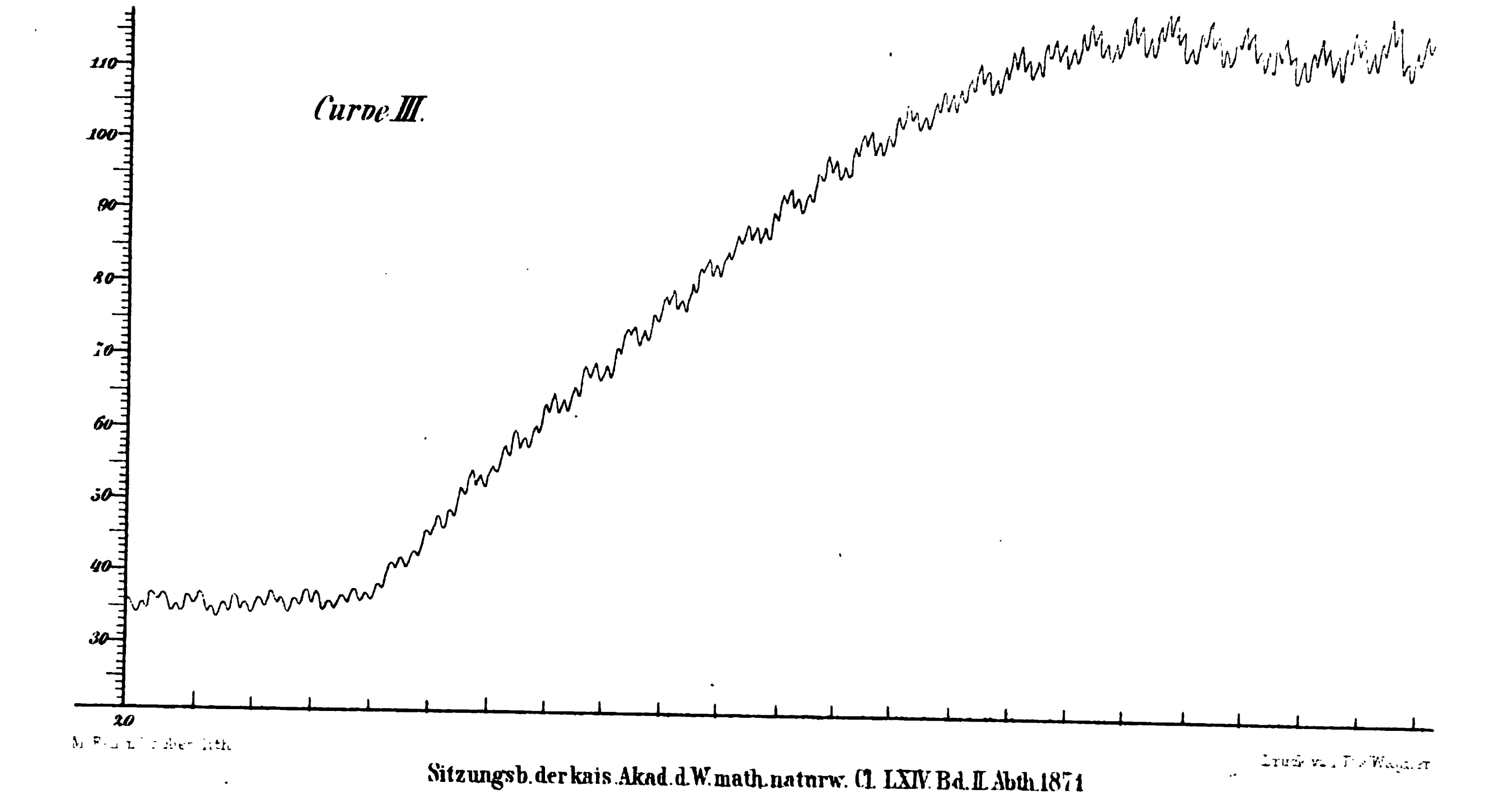
Curve I von einem opiatisirten Hunde. *VR* ist eine Reizung der *N. n. vagi* durch sich einstellende Dyspnoe.

Curve II von einem curarisirten Hunde. Auf der Höhe der Drucksteigerung die von Traube entdeckten Wellen, welche übrigens auch schon vor dem Ausbruch der Vergiftungserscheinungen, trotz regelmässig unterhaltener künstlicher Respiration, wenn auch weniger ausgebildet, vorhanden waren.

Curve III ebenfalls von einem curarisirten Hunde. 36 Secunden nach der Injection des Strychnin tritt das bedeutende Ansteigen des Druckes auf.


Sigmund M
Taf. I.
V
R
120
110
100
90
80
70
60
50
90
80
70
60
50
40
30
20
M Pahrmbacher lit
Druck von Wagner




Curve III.
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20



XXV. SITZUNG VOM 16. NOVEMBER 1871.

Der Präsident gibt Nachricht von dem am 9. November erfolgten Ableben des correspond. Mitgliedes der Classe, Herrn Custos Siegfried Reissek in Wien.

Sämmtliche Anwesende geben ihr Beileid durch Erheben von den Sitzen kund.

Herr Sectionsrath Dr. Fr. Ritter v. Hauer übermittelt mit Schreiben vom 14. November eine Photographie von Michael Sars, die ihm zu diesem Zwecke vom Herrn Alglave, Redacteur der „*Revue scientifique*" in Paris, zugesendet wurde.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Integration linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch Bessel'sche Functionen", vom Herrn Prof. L. Gegenbauer in Krems.

„Untersuchungen über die herbstliche Entlaubung der Holzgewächse", vom Herrn Prof. Dr. Jul. Wiesner.

Herr *Stud. phil.* Oskar Simony überreicht eine Abhandlung: „Untersuchungen über die Bewegung einer Kugel in einem widerstehenden Mittel".

Herr Prof. E. Ludwig legt folgende zwei Abhandlungen vor:

1. „Über die Einwirkung der Chromsäure auf Kohlenoxyd, Wasserstoff, Grubengas und Äthylen"; 2. „Beiträge zur Gasanalyse".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academy of Natural Sciences of Philadelphia: Proceedings. Nrs. 1—3. January to December, 1870. Philadelphia; 8°. — American Journal of Conchology. Vol. VI, Parts 1—3. 1870 —71. Philadelphia, New-York, London, Berlin; 8°.

American Academy of Arts & Sciences: The Complete Works of Count Rumford. Vol. I. Boston, 1870; 8°.

Annalen der Chemie & Pharmacie, von Wöhler, Liebig & Kopp. N. R. Band LXXXIII, Heft 3. Leipzig & Heidelberg, 1871; 8°.

Announcement of the Wagner Free Institute of Science for the Collegiate Year 1870—71. Philadelphia, 1870; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 9. Jahrgang, Nr. 32. Wien, 1871; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1865—1866. (Bd. 78. 17—18.) Altona, 1871; 4°.

Connecticut Academy of Arts & Sciences: Transactions. Vol. I, Part 2; Vol. II, Part 1. New Haven, 1867—71; 8°.

Essex Institute: Proceedings and Communications: Vol. I, II, III. (1848—1863); Vol. V. (1866), Nrs. 3—4; Vol. VI, (1868—71), Part 2. Salem; 8°. — Bulletin. Vol. II, Nrs. 1 —12. Salem, 1870; 8°. — To-Day: A Paper printed during the Fair of the Essex Institute and Oratorio Society at Salem. Mass. Nrs. 1—5. Salem, 1870; 4°.

Gasthuis, Nederlandsch, voor ooglijders: Elfde jaarlijksch Verslag. Utrecht, 1870; 8°.

Gesellschaft, Anthropologische, in Wien: Mittheilungen. I. Band, Nr. 14. Wien, 1871; 8°.

— Österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VI. Band, Nr. 21. Wien, 1871; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXII. Jahrg., Nr. 45—46. Wien, 1871; 4°.

Hayden, F. V., Preliminary Report of the United States Geological Survey of Wyoming etc. Washington, 1871; 8°.

Heller, Karl B., Leitfaden der Naturgeschichte. Für Bürgerschulen und die Oberclassen der erweiterten Volksschule bearbeitet. I.—III. Theil. Wien, 1871; 8°.

Landbote, Der steirische. 4. Jahrgang, Nr. 23. Graz, 1871; 4⁰.

Lea, Isaac, A Synopsis of the Family Unionidae. (4th Edition.) Philadelphia, 1870; 4⁰.

Mittheilungen des k. k. technischen und administrativen Militär-Comité. Jahrgang 1871, 10. & 11. Heft. Wien, 1871; 8⁰.

Nature. Nr. 106, Vol. V. London, 1871; 4⁰.

Observations, Astronomical & Meteorological, made at the U. St. Naval Observatory during the Year 1867. Washington, 1870; 4⁰.

Onderzoekingen, gedan in het Physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. IIde Recks. III. 1870; 8⁰.

Packard, A. S., Record of American Entomology for the Year 1869. Salem, 1870; 8⁰.

Peabody Academy of Sciences: 2d and 3d Annual Report. Salem, 1871; 8⁰. — The American Naturalist. Vol. IV, Nrs. 3—12; Vol. V, Nr. 1. Salem, 1870—1871, 8⁰.

Report, Second Annual, of the Board of Indian Commissioners for the Year 1870. Washington, 1871; 8⁰.

— 4th, of the Commissioner of Fisheries of the State of Maine, for the Year 1870. Augusta; 8⁰.

— Annual, of the Commissioner of Patents, for the Year 1868. Vol. I—IV. Washington, 1869—1870; 8⁰.

— of the Superintendent of the United States Coast Survey, showing the Progress of the Survey during the Year 1867. Washington, 1869; 4⁰.

„Revue politique et littéraire“, et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger“. Ire Année (2e Série), Nrs. 19—20. Paris & Bruxelles, 1871; 4⁰.

Société Impériale des Naturalistes de Moscou: Bulletin. Année 1871. Tome XLIV, Nrs. 1 & 2. Moscou, 1871; 8⁰.

Society, The American Philosophical, at Philadelphia: Transactions. Vol. XIV, New Series. Parts 1 & 2. Philadelphia, 1870; 4⁰. — Proceedings. Vol. XI, Nrs. 83—85. Philadelphia, 1870; 8⁰.

Verein für Erdkunde zu Dresden: VI. und VII. Jahresbericht. (Nachtrag.) Dresden, 1870; 8⁰.

Washington, Department of Agriculture: Report of the Commissioner of Agriculture for the Year 1869. Washington, 1870; 8°. — Monthly Reports for the Year 1870. Washington, 1871; 8°. — Reports on the Diseases of Cattl in the United States etc. Washington, 1869; 8°.

Wells, Walter, The Water-Power of Maine. Augusta, 1869; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXI. Jahrgang, Nr. 45. Wien, 1871; 4°.

XXVI. SITZUNG VOM 30. NOVEMBER 1871.

Se. Excellenz, Herr Dr. v. Stremayr, zeigt mit Zuschrift vom 26. November seinen Amtsantritt als k. k. Minister für Cultus und Unterricht an.

Das k. k. Ministerium des Innern übermittelt, mit Note vom 22. November, die von der k. k. oberösterr. Statthalterei eingesendeten graphischen Darstellungen über die Eisbildung an der Donau in den beiden Winterperioden 1869—70 und 1870 bis 1871.

Die Direction der k. k. geologischen Reichsanstalt zeigt mit Zuschrift vom 17. November an, dass ihr Herr Prof. Dr. Const. Freih. v. Ettingshausen eine reiche Suite der mit Unterstützung der kais. Akademie gesammelten fossilen Pflanzen der Floren von Leoben, Eibiswald und Schönegg übergeben hat, und dankt für diese Bereicherung ihres Museums.

Herr Dr. L. J. Fitzinger übersendet mit Schreiben vom 15. November seine neueste Publication, betitelt: „Versuch einer Erklärung der ersten oder ursprünglichen Entstehung der organischen Körper und ihrer Mannigfaltigkeit“ etc.

Der Vorstand der kais. Universitäts-Bibliothek zu Strassburg, Herr Dr. Barack, dankt mit Schreiben vom 28. November für die zur Neubegründung dieser Bibliothek gespendeten Schriften der Classe.

Herr Prof. Dr. Th. Ritter v. Oppolzer legt die III. Abhandlung „über die Bestimmung einer Kometenbahn“ vor.

Herr Joh. Choúra, k. k. Hauptmann im Artillerie-Stabe, überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Graphische Transformation rechtwinkeliger Coordinaten“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna: Memorie. Série II, Tomo X, fasc. 2—4. Bologna, 1870—71; 4°. — Rendiconto delle sessioni. Anno accademico 1870—71. Bologna; 8°.

Annalen der Chemie & Pharmacie, von Wöhler, Liebig & Kopp. N. R. Band LXXXIV, Heft 1. Leipzig & Heidelberg, 1871; 8°.

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift. 9. Jahrgang, Nr. 33—34. Wien, 1871; 8°.

Archivio per l'Antropologia e la Etnologia. I. Vol., Fasc. 4°. Firenze, 1871; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1867—1868. (Bd. 78. 19—20.) Altona, 1871; 4°.

Beobachtungen, Schweizerische Meteorologische. Juni, Juli und December 1870. Zürich; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIII, Nrs. 18—19. Paris, 1871; 4°.

Diebl, C., Landwirthschaftliche Reminiscenzen und Conjecturen im hundertsten Gründungsjahre der k. k. mähr.-schles. Gesellschaft für Ackerbau-, Natur- & Landeskunde. Brünn, 1870; kl. 4°.

d'Elvert, Christian Ritter, Geschichte der k. k. mähr.-schles. Gesellschaft zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- & Landeskunde etc. Brünn, 1870; kl. 4°.

Fitzinger, Leopold Joseph, Versuch einer Erklärung der ersten oder ursprünglichen Entstehung der organischen Körper und ihrer Mannigfaltigkeit in Übereinstimmung mit den Gesetzen der Natur. Leipzig, 1872; 8°.

Gesellschaft, österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VI. Band, Nr. 22. Wien, 1871; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXII. Jahrg. Nr. 47 bis 48. Wien; 4°.

Isis: Sitzungs-Berichte. Jahrgang 1871, Nr. 7—9. Dresden; 8°.

Istituto, R., tecnico di Palermo: Giornale di Scienze naturali ed economiche. Anno 1870. Vol. VI, Fasc. 1—2. Palermo, 1870; 4°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band IV, 7. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

Landbote, Der steirische. 4. Jahrgang, Nr. 24. Graz, 1871; 4°.

Lesehalle, Akademische, in Wien: Erster Jahresbericht über das Vereinsjahr 1871. Wien; 8°.

Lotos. XXI. Jahrgang. September & October 1871. Prag; 8°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 17. Band 1871, XI. Heft, nebst Ergänzungsheft Nr. 30. Gotha; 4°.

Museum, The Geological, of Calcutta: Memoires. Vol. VII, Parts 1—3. Calcutta, 1871; kl. 4°. — *Palaeontologia Indica.* Vol. III, Nrs. 1—8. Ser. VI. The Pelecypoda, by Ferd. Stoliczka. Calcutta, 1870—1871; 4°. — Records. Vol. II, Parts 2—4. (1869); Vol. III (1870); Vol. IV, Parts 1—2 (1871). Calcutta; kl. 4°.

Nature. Nr. 99, Vol. IV; Nrs. 107—108, Vol. V. London, 1871; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. Jahrgang 1871. XXI. Band, Nr. 3. Wien; 4°. — Verhandlungen. Jahrgang 1871, Nr. 14. Wien; 4°.

„Revue politique et littéraire", et „La Revue scientifique de la France et de l'étranger". Ire Année (2e Série), Nrs. 21—22. Paris & Bruxelles, 1871; 4°.

Société Botanique de France: Bulletin. Tome XVIIe (1870). Session extraordinaire, Juin 1870. Paris; 8°.

Verein, Naturhistorisch-medizin., zu Heidelberg: Verhandlungen. Band V, 5. Heft. Heidelberg, 1871; 8°.

— für vaterländische Naturkunde in Württemberg: Württembergische naturwissenschaftliche Jahreshefte. XXVII. Jahrgang, 1.—3. Heft. Stuttgart, 1871; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXI. Jahrgang, Nr. 46—47. Wien, 1871; 4°.

Zeitschrift für Chemie, von Beilstein, Fittig & Hübner, XIV. Jahrgang. N.F. VII. Band, 11. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

— des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXIII. Jahrgang, 14. Heft. Wien, 1871; 4°.

Über die Bestimmung einer Kometenbahn.

(III. Abhandlung.)

Von dem c. M. Prof. Dr. **Theodor Ritter v. Oppolzer.**

Ich habe zwei gleich betitelte Abhandlungen in den Sitzungsberichten der k. Akademie der Wissenschaften (LVII. Bd. Februarheft, LX. Bd. Decemberheft) veröffentlicht, die über die Lösung des Problems einer ersten parabolischen Bahnbestimmung berichten, welche ich in dem Falle in Vorschlag gebracht habe. wenn Olbers' Methode durch eine ungünstige Vereinigung von Umständen (Ausnahmefall) unbrauchbar ist. Da die vorgeschlagene Rechnungsform in allen Fällen gegen die Olbers'sche den Vortheil der grösseren Genauigkeit in Anspruch nimmt, so würde man dieselbe stets mit Nutzen anwenden, wenn nicht meine Formeln eine Mehrarbeit in Bezug auf die auszuführenden Rechnungsoperationen verlangen würden. Diese grössere Complicirtheit in den Formeln erklärt sich naturgemäss aus dem Umstande, dass statt der Olbers'schen Form, in welche die Relation zwischen den geocentrischen Distanzen (ρ) gebracht wird, nämlich $\rho_{,,,} = M\rho_{,}$, die etwas abgeänderte Relation $\rho_{,,,} = m + M\rho_{,}$ in Anwendung gezogen werden muss, wobei noch der die bequeme Lösung wesentlich erschwerende Umstand hinzutritt, dass m selbst eine Function von $\rho_{,}$ wird, also innerhalb der Versuche variabel ist. Die die versuchsweise Auflösung der Gleichung vorbereitenden Rechnungen sind in meiner Methode nicht wesentlich umfangreicher als bei Olbers' Methode, doch die Durchführung der Versuche wird viel zeitraubender und beschwerlicher, besonders wenn man zur Lösung die Formen wählt, die ich in meiner ersten und zweiten Abhandlung über diesen Gegenstand in Vorschlag gebracht habe; in neuerer Zeit hat mir die mehrfache

Beschäftigung mit diesem Probleme Hilfsmittel an die Hand gegeben, welche die Lösung des Problems der Art erleichtern, dass ich wohl mit Bestimmtheit zu behaupten im Stande bin, dass das Verhältniss der Arbeit, welche die beiden Methoden bis zur Erlangung der Werthe $\rho_,$ und $\rho_{,,,}$ veranlassen, kein zu ungünstiges für meine Methode ist, wenn man die erlangte grössere Genauigkeit mit in Anschlag bringt.

Die Auflösung des Problems ist bekanntlich darin enthalten, dass die Radienvectoren $r_,$ und $r_{,,,}$ und die eingeschlossene Sehne s als Functionen von $\rho_,$ dargestellt werden können; vermöge der parabolischen Bewegung des Kometen um die Sonne steht aber $r_, + r_{,,,}$ in einer ganz bestimmten Relation zu s, wenn die Zeit bekannt ist (Zwischenzeit), die der Komet gebraucht hat, um von einem Endpunkte der Sehne zum andern zu gelangen; $\rho_,$ ist demnach so zu bestimmen, dass die aus der Gleichung der Ebene für $r_,$, $r_{,,,}$ und s gefundenen Werthe mit der letzteren Bedingung zusammenfallen. In der Lösung dieser Aufgabe ist die Schwierigkeit des Problems enthalten.

Bezeichnet man mit T, $T_,$, und $T_{,,}$ die Beobachtungszeiten, mit λ, $\lambda_{,,}$ $\lambda_{,,,}$ und β, $\beta_{,,}$ $\beta_{,,,}$ die geocentrischen Längen und Breiten des Kometen, mit $L, L_{,,} L_{,,,}$ und $R, R_{,,} R_{,,,}$ die Sonnenlängen und Radienvectoren der Sonne für die Zeiten der drei Beobachtungen, so hat man zufolge der Ableitungen in der zweiten Abhandlung, um die Relation zwischen $\rho_,$ und $\rho_{,,,}$ zu finden, zu berechnen:

$$\operatorname{tg} J \sin(\lambda_{,,} - \Pi) = \operatorname{tg} \beta_{,,} \qquad Z = \sin\beta_, \operatorname{cotg} J - \sin(\lambda_, - \Pi)\cos\beta_,$$

$$\operatorname{tg} J \cos(\lambda_{,,} - \Pi) = -\frac{\lambda_{,,,} - \lambda_,}{\beta_{,,,} - \beta_,} \qquad N = \sin(\lambda_{,,,} - \Pi)\cos\beta_{,,,} - \sin\beta_{,,,} \operatorname{cotg} J$$

$\operatorname{tg} J$ stets positiv

$$\odot_{,,} = R_{,,} \sin(L_{,,} - \Pi)$$

$$\log 2k = 8{\cdot}536611 - 10.$$

$$t_{,,,} = 2k(T_{,} - T_,) \qquad M = \frac{Z}{N} \cdot \frac{t_,}{t_{,,,}}$$

$$t_{,,} = 2k(T_{,,,} - T_,) \qquad F = t_, t_{,,} \frac{\odot_{,,}}{N}$$

$$t_, = 2k(T_{,,,} - T_{,,}) \qquad C = -\frac{F}{R_, + R_{,,,})^3}$$

dann ist

$$\rho_{,,,} = C + \frac{F}{(r_{,} + r_{,,,})^3} + M\rho_{,},$$

wobei ich der Kürze halber für die Summe der beiden ersten Glieder rechter Hand den Buchstaben m setzen werde; es ist aber m kein constanter Werth, sondern eine Function der Unbekannten $(r_{,} + r_{,,,})$.

Weiter ist aber, wenn man durch ξ, η, ζ die geocentrischen. mit x, y, z die heliocentrischen rechtwinkeligen Coordinaten des Kometen bezeichnet und durch X und Y die Sonnencoordinaten vorstellt,

$$\begin{aligned}
\xi &= x + X \\
\eta &= y + Y \\
\zeta &= z \\
r_{,}^2 &= x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2 \\
r_{,,,}^2 &= x_{,,,}^2 + y_{,,,}^2 + z_{,,,}^2 \\
s^2 &= (x_{,,,} - x_{,})^2 + (y_{,,,} - y_{,})^2 + (z_{,,,} - z_{,})^2.
\end{aligned}$$

Führt man nun die polaren Coordinaten ein, so hat man zu berechnen:

$$\begin{aligned}
g \cos(G - L_{,}) &= R_{,,,} \cos(L_{,,,} - L_{,}) - R_{,} \\
g \sin(G - L_{,}) &= R_{,,,} \sin(L_{,,,} - L_{,}) \\
h \cos\zeta \cos(H - \lambda_{,,,}) &= M \cos\beta_{,,,} - \cos(\lambda_{,,,} - \lambda_{,}) \cos\beta_{,} \\
h \cos\zeta \sin(H - \lambda_{,,,}) &= \sin(\lambda_{,,,} - \lambda_{,}) \cos\beta_{,} \\
h \sin\zeta &= M \sin\beta_{,,,} - \sin\beta_{,}
\end{aligned}$$

g und h werden positiv angenommen.

$$\begin{aligned}
\cos\psi_{,} &= \cos\beta_{,} \cos(\lambda_{,} - L_{,}) \\
\cos\psi_{,,,} &= \cos\beta_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) \\
\cos\varphi &= \cos\zeta \cos(G - H).
\end{aligned}$$

Man braucht in der weiteren Rechnung auch $\sin\psi_{,}$, $\sin\psi_{,,,}$ und $\sin\varphi$, welche Sinus stets positiv anzunehmen sind; es kann aber bisweilen die Bestimmung der Sinusfunction aus der Cosinusfunction misslich werden, man wird dann zur unmittelbaren Bestimmung der ersteren die folgenden Relationen anwenden, die man allenfalls auch sonst als zweckmässige Controlen benützen kann:

$$\sin\psi_, \cos P_, = \cos\beta_, \sin(\lambda_, - L_,)$$
$$\sin\psi_, \sin P_, = \sin\beta_,$$
$$\sin\psi_{,,,} \cos P_{,,,} = \cos\beta_{,,,} \sin(\lambda_{,,,} - L_{,,,})$$
$$\sin\psi_{,,,} \sin P_{,,,} = \sin\beta_{,,,}$$
$$\sin\varphi \cos Q = \cos\zeta \sin(G - H)$$
$$\sin\varphi \sin Q = \sin\zeta;$$

die Winkel $P_,$ $P_{,,,}$ und Q erscheinen in den späteren Formeln nicht.

Nach Bestimmung der eben angeführten Hilfsgrössen wird man aber schreiben dürfen:

$$r_,^2 = (\rho_, - R_, \cos\psi_,)^2 + R_,^2 \sin\psi_,^2$$
$$r_{,,,}^2 = (\rho_{,,,} - R_{,,,} \cos\psi_{,,,})^2 + R_{,,,}^2 \sin\psi_{,,,}^2$$
$$s^2 = \rho_,^2 h^2 + g^2 - 2gh\rho_, \cos\varphi + 2mh\rho_, \{\cos\beta_{,,,} \cos\zeta \cos(H - \lambda_{,,,}) +$$
$$+ \sin\beta_{,,,} \sin\zeta\} - 2mg \cos\beta_{,,,} \cos(G - \lambda_{,,,}) + m^2.$$

Die ersteren beiden Gleichungen gestatten aber eine sehr einfache Bestimmung von r aus ρ, besonders wenn man von der folgenden Umformung Gebrauch macht. Setzt man

$$f_, = R_, \cos\psi_, \qquad B_, = R_, \sin\psi_,$$
$$f_{,,,} = R_{,,,} \cos\psi_{,,,} \qquad B_{,,,} = R_{,,,} \sin\psi_{,,,}$$

so ist die Berechnung von r aus ρ enthalten in:

$$\operatorname{tg}\theta_, = \frac{\rho_, - f_,}{B_,}$$
$$\operatorname{tg}\theta_{,,,} = \frac{\rho_{,,,} - f_{,,,}}{B_{,,,}}$$
$$r_, = B_, \sec\theta_, = (\rho_, - f_,) \operatorname{cosec}\theta_,$$
$$r_{,,,} = B_{,,,} \sec\theta_{,,,} = (\rho_{,,,} - f_{,,,}) \operatorname{cosec}\theta_{,,,}.$$

Die Behandlung des Ausdruckes s^2 stösst aber auf Schwierigkeiten. Vorerst wird es als zweckmässig erscheinen müssen, die Bestimmung von $\rho_,$ aus s anzustreben, da, um s aus der Zwischenzeit zu berechnen, nach den bekannten Relationen, nur die Kenntniss von $(r_, + r_{,,,})$ nöthig ist, eine Grösse, die zur Berechnung von m ein unumgängliches Erforderniss ist. Um obigen Ausdruck für s^2 übersichtlicher zu machen, setze ich:

$$\nu = \cos\beta_{,,,} \cos\zeta \cos(H-\lambda_{,,,}) + \sin\beta_{,,,} \sin\zeta$$

$$\xi = 2g\{\nu\cos\varphi - \cos\beta_{,,,}\cos(G-\lambda_{,,,})\}$$

$$\gamma_1 = \frac{g}{h}\cos\varphi \qquad A = g\sin\varphi$$

$$\gamma_2 = -\frac{\nu}{h} \qquad \Phi = \frac{\xi}{A^2}\,.$$

$$\Psi = \frac{1-\nu^2}{\xi}$$

Grössen, welche völlig frei von einer Annahme über $(r_, + r_{,,,})$ sind, deren Berechnung also bei den Vorbereitungsrechnungen erledigt werden kann, dann ist zunächst

$$s^2 = \{\rho_, h - g[\cos\varphi - \frac{m\nu}{g}]\}^2 + g^2 \sin\varphi^2 + \xi m + m^2(1-\nu^2)\,,$$

wobei man sich leicht von der Identität dieses Ausdruckes für s^2 mit dem früheren überzeugen kann, wenn man zu ersterem Ausdruck rechter Hand $g^2(\cos\varphi - \frac{m\nu}{g})^2$ addirt und subtrahirt und entsprechend zusammenfasst. Man kann daher auch schreiben unter Einführung der obigen Constanten

$$s^2 = h^2\{\rho_, - \gamma_1 - \gamma_2 m\}^2 + A^2\{1 + m\Phi(1+\Psi m)\}\,.$$

Setzt man nun um abzukürzen

$$\chi = m\Phi(1+\Psi m)\,,$$

wobei aber χ keine Constante ist, sondern von Versuch zu Versuch neu berechnet werden muss, so kann man auch schreiben

$$s^2 = h^2\{\rho_, - \gamma_1 - \gamma_2 m\}^2 + A^2\{1+\chi\}\,.$$

Setzt man nun, da s^2 nothwendig grösser sein muss als $A^2(1+\chi)$, so lange nicht $(1+\chi)$ negativ ist

$$\sin\vartheta = \frac{A}{s}\sqrt{1+\chi}\,,$$

so ist auch

$$s^2\cos\vartheta^2 = h^2\{\rho_, - \gamma_1 - \gamma_2 m\}^2$$

oder, wenn man $\rho_{,}$ bestimmt, und für $\cos\vartheta$ den positiven Werth nimmt, welche Wahl sich als die einzig berechtigte darstellt[1], so wird

$$\rho_{,}=\frac{s}{h}\cos\vartheta+\gamma_1+\gamma_2 m.$$

Die Berechnung von $\sin\vartheta$ kann noch sehr vereinfacht werden, wenn man setzt im Falle

χ positiv	χ negativ
$\operatorname{tg}^2\sigma=\chi$	$\sin^2\sigma=-\chi$

dann ist

$$\sin\vartheta=\frac{A}{s}\sec\sigma \qquad\qquad \sin\vartheta=\frac{A}{s}\cos\sigma.$$

Sollte, was kaum je eintreten wird, $1+\chi$ negativ werden, so müsste man setzen

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{A}{s}\sqrt{-(1+\chi)}$$

und man hätte zur Bestimmung der Distanz

$$\rho_{,}=\frac{s}{h\cos\vartheta}+\gamma_1+\gamma_2 m.$$

Wie man sieht, ist nun die Durchführung eines Versuches sehr einfach; man macht eine bestimmte Annahme über

$$\log(r_{,}+r_{,,,})=x_1$$

und berechnet mit Hilfe der bekannten Encke'schen μ-Tafel (als Argument dient $\eta=\frac{t_{,,}}{(r_{,}+r_{,,,})^{3/2}}$) die Sehne s nach

$$s=\frac{t_{,,}\mu}{\sqrt{r_{,}+r_{,,,}}}$$

und die Grössen m und χ nach

$$m=C+\frac{F}{(r_{,}+r_{,,,})^3} \qquad\qquad \chi=m\Phi(1+\Psi m)$$

---

[1] Die Rechtfertigung hiefür enthält der Schluss dieser Abhandlung.

dann wird sein

$$\sin \vartheta = \frac{A}{s}\sqrt{1+\chi} \qquad \rho_{,} = \frac{s}{h}\cos\vartheta + \gamma_1 + \gamma_2 m$$

$$\rho_{,,,} = m + M\rho_{,}$$

aus $\rho_{,}$ und $\rho_{,,,}$ berechnet sich, wie oben angegeben wurde, $r_{,}$ und $r_{,,,}$, bildet man mit diesen letzteren Werthen $\log(r_{,}+r_{,,,}) = y_1$ so sollte $y_1 = x_1$ werden, falls über $(r_{,}+r_{,,,})$ die richtige Annahme gemacht wurde. Im ersten Versuche wird man zweckmässig $x = \log(R_{,}+R_{,,,})$ setzen, wodurch $m = 0$ wird und die Durchführung des Versuches ganz nach der Form geschieht, die ich bei Olbers' Methode in Anwendung ziehe. Man wird zu beachten haben, dass vor Beginn der Versuche die Grenzen von $r_{,}+r_{,,,}$ theilweise bekannt sind, es ist nämlich

$$B_{,}+B_{,,,} < r_{,}+r_{,,,} < \left(\frac{t_{,,}\mu}{g\sin\varphi}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1+\chi}}.$$

Die obere Grenze hat trotz des Vorkommens von χ und μ eine praktische Bedeutung, da μ der Einheit gleich gesetzt werden darf und $\chi = 0$, wenn nur die Werthe $(r_{,}+r_{,,,})$ halbwegs nahe $(R_{,}+R_{,,,})$ sind.

Im Allgemeinen wird y_1 der Wahrheit näher stehen als x_1: man wird deshalb im zweiten Versuche setzen $x_2 = y_1$ und so nach Durchführung des Versuches den Werth y_2 erhalten; man kann nun mit einiger Sicherheit auf einen verbesserten Werth (x_3) der Unbekannten schliessen, wenn man setzt

$$\Delta_1 = y_1 - x_1, \qquad \Delta_2 = y_2 - x_2, \qquad n = \frac{x_2 - x_1}{\Delta_1 - \Delta_2}$$

$$x_3 = x_2 + \Delta_2 n,$$

welche Schlussfolgerung bei den weiteren Versuchen in Anwendung zu ziehen ist und zwar so lange bis $y = x$ gefunden wird. was wohl meist mit dem vierten Versuche erreicht ist. Die in dem letzten Versuche $(y = x)$ gefundenen $\rho_{,}$ und $\rho_{,,,}$ werden zur Berechnung der Elemente herangezogen werden müssen.

Man könnte auch n auf differentiellem Weg ermitteln und in der That hat mir dieses Hilfsmittel gestattet, bei Olbers' Methode die Zahl der Versuche meist auf drei zu beschränken, doch hat

dieses Verfahren bei dieser Methode keinen besonderen Vortheil, da die Erlangung von n die Durchrechnung ziemlich weitläufiger Formeln erfordert. Ich ergreife hier die Gelegenheit, um den Vorgang zu veröffentlichen, nach der ich die Versuche bei Olbers' Methode leite und der mich in der That das Ziel mit grosser Sicherheit und Raschheit erlangen lässt[1]. Setzt man nämlich:

$$\operatorname{cotg} J = \frac{\sin(\lambda_{,,} - L_{,,})}{\operatorname{tg}\beta_{,,}}$$

$$M = \frac{T_{,,,} - T_{,,}}{T_{,,} - T_{,}} \cdot \frac{\sin\beta_{,} \operatorname{cotg} J - \sin(\lambda_{,} - L_{,,}) \cos\beta_{,}}{\sin(\lambda_{,,,} - L_{,,}) \cos\beta_{,,,} - \sin\beta_{,,,} \operatorname{cotg} J}.$$

$$g \cos(G - L_{,}) = R_{,,,} \cos(L_{,,,} - L_{,}) - R_{,}$$
$$g \sin(G - L_{,}) = R_{,,,} \sin(L_{,,,} - L_{,})$$
$$h \cos\zeta \cos(H - \lambda_{,,,}) = M \cos\beta_{,,,} - \cos(\lambda_{,,,} - \lambda_{,}) \cos\beta_{,}$$
$$h \cos\zeta \sin(H - \lambda_{,,,}) = \sin(\lambda_{,,,} - \lambda_{,}) \cos\beta_{,}$$
$$h \sin\zeta = M \sin\beta_{,,,} - \sin\beta_{,}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\psi_{,} &= \cos(\lambda_{,} - L_{,}) \cos\beta_{,} \\ \cos\psi_{,,,} &= \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) \cos\beta_{,,,} \\ \cos\varphi &= \cos(G - H) \cos\zeta \end{aligned}\right\} \text{über die directe Bestimmung von } \sin\psi_{,}, \sin\psi_{,,,} \text{ u. } \sin\varphi \text{, siehe oben.}$$

$$f_{,} = R_{,} \cos\psi_{,} \qquad B_{,} = R_{,} \sin\psi_{,}$$

$$f_{,,,} = \frac{R_{,,,} \cos\psi_{,,,}}{M} \qquad B_{,,,} = \frac{R_{,,,} \sin\psi_{,,,}}{M}$$

$$t_{,,} = 2k(T_{,,,} - T_{,}) \qquad \log 2k = 8{\cdot}536\ 611 - 10$$

$$\gamma = \frac{g}{h} \cos\varphi \qquad A = \frac{g \sin\varphi}{t_{,,}}$$

so lässt sich leicht aus einer Annahme über $(r_{,} + r_{,,,})$ der Werth von $\rho_{,}$ und daraus wieder $r_{,}$ und $r_{,,,}$ ableiten; die Summe dieser letzteren Werthe muss nun stimmen mit dem Anfangswerth, wenn die richtige Voraussetzung über die Unbekannte gemacht

---

[1] Ein Verfahren die Versuche durch differentielle Änderungen zu leiten, findet sich in Nr. 1856 der astronomischen Nachrichten; dass mir diese Anwendung nicht neu war, zeigt ein Blick in mein Anfang 1870 erschienenes Lehrbuch der Bahnbestimmungen und in der That besitze ich das hier angegebene Verfahren schon längere Zeit.

ist. Als Unbekannte wähle ich $\log(r_,+r_{,,,})=x$. Man hat dann zu rechnen:

$$\eta=\frac{t_{,,}}{(r_,+r_{,,,})^{3/2}} \text{ als Argument für } \mu.$$

$$\sin\vartheta=\frac{\sqrt{r_,+r_{,,,}}}{\mu}A \qquad \rho_,=\frac{t_{,,}}{h}\cdot\frac{\mu}{\sqrt{r_,+r_{,,,}}}\cos\vartheta+\gamma$$

$\cos\vartheta$ stets positiv[1]

$$\operatorname{tg}\theta_,=\frac{\rho_,-f_,}{B_,} \qquad r_,=R_,\sin\psi_,\sec\theta_,$$

$$\operatorname{tg}\theta_{,,,}=\frac{\rho_,-f_{,,,}}{B_{,,,}} \qquad r_{,,,}=R_{,,,}\sin\psi_{,,,}\sec\theta_{,,,}.$$

Rechnet man nun, indem man den Ausgangswerth $\log(r_,+r_{,,,})=x_1$ setzt, aus den schliesslich erhaltenen Radienvectoren den Logarithmus der Summe derselben und setzt denselben gleich y_1, so findet sich ein verbesserter Werth der Unbekannten (x_2) für den zweiten Versuch nach:

$$x_2=x_1+\frac{y_1-x_1}{n_1},$$

wobei zu setzen ist

$$n_1=1+(\sin\theta_,+M\sin\theta_{,,,})\frac{\eta\mu}{2h\cos\vartheta}\cdot\frac{10^x}{10^y},$$

welcher Ausdruck leicht berechnet wird, mit Hilfe der Zahlen des vorangehenden Versuches, und man wird zu beachten haben, dass ist:

$$\log\frac{10^x}{10^y}=x-y.$$

Von der Richtigkeit der eben hingeschriebenen Relationen kann man sich leicht überzeugen durch Differentiation der obigen Formeln, wenn man $\frac{d\mu}{d(r_,+r_{,,,})}=0$ setzt. Die Wahl der Unbekannten $\log(r_,+r_{,,,})$ ist mit besonderer Absicht gewählt, da in

[1] Die Rechtfertigung hiefür enthält der Schluss dieser Abhandlung.

der That $r_{,}+r_{,,}$ in weiteren Grenzen, die die differentielle Behandlung weniger convergent machen, unsicher ist, als die logarithmische Function, für letztere wird man mit einiger Wahrscheinlichkeit als Grenzen 0·0 und 0·6 haben, für erstere aber 1·0 und 4·0, wenn man die Umstände einer Kometenentdeckung erwägt.

Im ersten Versuche setzt man $(r_{,}+r_{,,,})=2$; man wird aber wieder beachten können, dass man als Grenzwerthe angeben kann

$$R_{,}\sin\psi_{,}+R_{,,,}\sin\psi_{,,,}<r_{,}+r_{,,,}<\left(\frac{t_{,,}\mu}{g\sin\varphi}\right)^{2},$$

wodurch die erstere Annahme modificirt werden kann. Ich werde nun die ausserordentliche Kürze dieser Lösung durch ein Beispiel veranschaulichen, und in der That ist mir bisher kein Fall in der Praxis vorgekommen, bei dem nicht schon der dritte Versuch das gewünschte Ziel hat erreichen lassen; nur muss man die Rechnung der Versuche sorgfältig ausführen und prüfen, und nicht, wie es häufig genug geschieht, sich mit einer flüchtigen Rechnung begnügen; die durch die Flüchtigkeit gewonnene Zeit wird meist durch begangene Fehler mehrfach verloren gehen. Für den Kometen IV 1871 fand ich und L. Schulhof, der die Rechnung gleichzeitig durchführte, aus drei Orten (Nov. 3, Nov. 5 u. Nov. 6):

$$\log M = 0{\cdot}007116$$

$\log t_{,,} = 9{\cdot}010646$ $\quad f_{,} = +0{\cdot}500144$

$\log A = 9{\cdot}659195$ $\quad f_{,,,} = +0.538277$

$\log \frac{t_{,,}}{h} = 0{\cdot}267763$ $\quad \log B_{,} = 9{\cdot}932449$

$\gamma = +0{\cdot}398686$ $\quad \log B_{,,,} = 9{\cdot}909773$

$R_{,}\sin\psi_{,,,} = B_{,}$ $\quad \log R_{,,,}\sin\psi_{,,,} = 9{\cdot}916889$

Ich theile nun die Rechnung der Versuche in extenso mit, wie ich dieselbe geführt habe.

Versuch	I	II	III
x	0·301030	0·358704	0·358836
$\frac{1}{2}\log(r_{,}+r_{,,})$	0·150515	0·179352	0·179418
$\frac{3}{2}\log(r_{,}+r'_{,,})$	0·451545	0.538056	
$\log\eta$	8·559101	0·472598	

Versuch	I	II	III
η	0·0362..	0·02969·	
$\log\mu$	0·000024	0·000016	0·000016
$(A:\mu)$	9·659171	9·659179	9·659179
$\sin\vartheta$	9·809686	9·838531	9·838597
$\cos\vartheta$	9·883107	9·859913	9·859853
comp $\frac{1}{4}\log(r_,+r_{,,,})$	9·849485	9·820648	9·820582
$\mu\frac{t_{,,}}{h}$	0·267787	0·267779	0·267779
$\log(\rho_,-\gamma)$	0·000379	9·948340	9·948214
$\rho_,-\gamma$	+1·000873	+0·887850	+0·887594
$\rho_,$	+1·399559	+1·286536	+1·286280
$\rho_,-f_,$	+0·899415	+0·786392	+0·786136
$\rho_,-f_{,,,}$	+0·861282	+0·748259	+0·748003
$\log(\rho_,-f_,)$	9·953960	9·895639	9·895498
$\log(\rho_,-f_{,,,})$	9·935145	9·874052	9·873903
$\mathrm{tg}\,\theta_,$	0·021511	9·963190	9·963049
$\mathrm{tg}\,\theta_{,,,}$	0·025372	9·964279	9·964130
$\cos\theta_,$	9·838463	9·867111	9·867176
$\cos\theta_{,,,}$	9·836428	9·866612	9·866680
$\log r_,$	0·093986	0·065338	0·065273
$\log r_{,,,}$	0·080461	0·050277	0·050209
$\log Add.$	0·307845	0·308626	0·308627
y	0·388306	0·358903	0·358836
$y-x$	+0·087276	+0·000199	0

Berechnung der Correctionen.

	I	II
$\sin\theta_{,,,}$	9·86180	9·83089
$M\sin\theta_{,,,}$	9·86892	9·83801
$\sin\theta_,$	9·85997	9·83030
$\log Add$	0·30553	0·30490
$\sin\theta_,+M\sin\theta_{,,,}$	0·16550	0·13520
$\eta\mu\sec\vartheta$	8·67602	8·61269
$(x-y)-\log 2h$	0·86881	0·95589
$\log(n-1)$	9·71033	9·70378
$\log n$	0·17991	0·17770
$\log(y-x)$	8·94089	6·2989
$\log\Delta x$	8·76098	6·1212
Δx	+0·057674	+0·000132

Ein Anblick auf die obigen Zahlen zeigt die eminenten Vortheile dieser Methode und schon der zweite Versuch kommt der Wahrheit sehr nahe; hätte man $r_,+r_{,,,}$ als Unbekannte gewählt, so würde erst der vierte Versuch haben das Ziel erreichen lassen:

man könnte mir einwenden, dass diese Kürze lediglich nur dem Umstande zuzuschreiben ist, dass thatsächlich nahe $r_{,}+r_{,,,}=2$ ist, und allerdings ist die gute Übereinstimmung schon im zweiten Versuche sehr wesentlich hievon abhängig, um aber zu zeigen, dass diese Methode selten mehr als drei Versuche brauchen wird, habe ich die Rechnung wiederholt unter einer absichtlich sehr fehlerhaften Annahme über x. Ich nahm zunächst, indem ich $x=0$ setzte, einen Werth an, der ausserhalb der oben angegebenen möglichen Grenzen liegt, und führe blos die hauptsächlich in Betracht kommenden Zahlen an.

Versuch	I	II
x	0·000000	0·357800
$\log(y-x)$	+0·545511	+0·001560
$\log n$	0·1832	0·17774
Δx	+0·3578	+0·001036

Für den dritten Versuch finde ich also nach diesen Zahlen $x_3=0·358836$, mit dem strengen Werthe übereinstimmend; die Annahme $x=0$ ist aber so fehlerhaft, dass selten genug Kometen in einer solchen Nähe an der Sonne entdeckt werden dürften, und trotzdem gibt der dritte Versuch alles genau.

Kometen werden selten in grösserer Entfernung von der Sonne beobachtet als 2, um so seltener entdeckt; ich habe nur die Versuche für den obigen Kometen durchgeführt, indem ich für den ersten Versuch absichtlich den höchst fehlerhaften Werth $r_{,}+r_{,,,}=4$ ansetzte und fand so

Versuch	I	II
x	0·602060	0·344400
$y-x$	−0·356365	+0·021753
$\log n$	0·1408	0·17833
Δx	−0·2577	+0·014428.

Für den dritten Versuch findet sich nach diesen Zahlen $x_3=0·358828$ nur um 8 Einheiten der sechsten Decimale vom wahren Werth abweichend. Übersieht man die hier gemachten Angaben, so dürfte wohl die Behauptung gerechtfertigt erscheinen, dass in den meisten Fällen drei Versuche genügen werden, um den wahren Werth von $r_{,}+r_{,,,}$ zu finden. Eigentlich gibt die obige Methode den wahren Werth schon nach dem zweiten Ver-

such; es wird aber immer gut sein, den dritten Versuch durchzuführen als Controle für die vorausgehenden.

Nachdem ich nun gezeigt habe, wie ich die Versuche bei Olbers' Methode leite, will ich nun die Formeln zusammenstellen, die ich bei der Anwendung meiner Methode anempfehlen möchte, und die in Verwendung zu ziehen sind bei dem Ausnahmefalle. Bestimmt man nämlich vor Beginn der Rechnung

$$\operatorname{tg} W = -\frac{\beta_{\prime\prime\prime}-\beta_{\prime}}{\lambda_{\prime\prime\prime}-\lambda_{\prime}} \sec \beta_{\prime\prime} \qquad \operatorname{tg} W_0 = \operatorname{tg}(\lambda_{\prime\prime}-L_{\prime\prime}) \operatorname{cosec} \beta_{\prime\prime},$$

so wird Olbers' Methode schon ziemlich unsicher, wenn

$$\pm \cos(W - W_0) \leqq \frac{1}{2}$$

ist, völlig auch theoretisch unbrauchbar, wenn

$$\cos(W - W_0) = 0 = \text{Ausnahmefall wird.}$$

Ich möchte die obige Grenze $\cos(W - W_0) = \frac{1}{2}$ zur Scheidung beider Methoden vorschlagen, habe aber nichts einzuwenden, wenn jemanden dieselben zu eng gesteckt erscheinen; Olbers' Methode wird immerhin noch brauchbare Resultate liefern, wenn $\cos(W - W_0) = \frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ ist; meine Methode wird aber in allen Fällen die grössere Genauigkeit für sich in Anspruch nehmen dürfen.

1.

$$\operatorname{tg} J \sin(\lambda_{\prime\prime}-\Pi) = \operatorname{tg} \beta_{\prime\prime}$$

$$\operatorname{tg} J \cos(\lambda_{\prime\prime}-\Pi) = -\frac{\lambda_{\prime\prime\prime}-\lambda_{\prime}}{\beta_{\prime\prime\prime}-\beta_{\prime}}$$

$\operatorname{tg} J$ stets positiv

$$Z = \sin\beta_{\prime} \operatorname{cotg} J - \sin(\lambda_{\prime}-\Pi)\cos\beta_{\prime}$$

$$N = \sin(\lambda_{\prime\prime\prime}-\Pi)\cos\beta_{\prime\prime\prime} - \sin\beta_{\prime\prime\prime} \operatorname{cotg} J$$

$$\odot_{\prime\prime} = R_{\prime\prime} \sin(L_{\prime\prime}-\Pi)$$

$$\log 2k = 8{\cdot}536611-10.$$

$$t_{,,,} = 2k(T_{,,} - T_{,}) \qquad M = \frac{Z}{N} \cdot \frac{t_{,}}{t_{,,,}}$$

$$t_{,,} = 2k(T_{,,,} - T_{,}) \qquad F = t_{,}t_{,,} \frac{\odot_{,,}}{N}$$

$$t_{,} = 2k(T_{,,,} - T_{,,}) \qquad C = -\frac{F}{(R_{,} + R_{,,,})^3}.$$

2.

$$\begin{aligned}
\cos\psi_{,} &= \cos\beta_{,} \cos(\lambda_{,} - L_{,}) \\
\sin\psi_{,} \cos P_{,} &= \cos\beta_{,} \sin(\lambda_{,} - L_{,}) \\
\sin\psi_{,} \sin P_{,} &= \sin\beta_{,} \\
\cos\psi_{,,,} &= \cos\beta_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) \\
\sin\psi_{,,,} \cos P_{,,,} &= \cos\beta_{,,,} \sin(\lambda_{,,,} - L_{,,,}) \\
\sin\psi_{,,,} \sin P_{,,,} &= \sin\beta_{,,,}.
\end{aligned}$$

Da die Winkel $P_{,}$ und $P_{,,,}$ in der folgenden Rechnung nicht gebraucht werden, so genügt es, falls die Bestimmung von $\sin\psi_{,}$ und $\sin\psi_{,,,}$, welche Sinus stets positiv zu nehmen sind, aus $\cos\psi_{,}$ und $\cos\psi_{,,,}$ hinreichend sicher ist, nur die ersteren Gleichungen allein zur Bestimmung von $\psi_{,}$ und $\psi_{,,,}$ heranzuziehen.

$$f_{,} = R_{,} \cos\psi_{,} \qquad f_{,,,} = R_{,,,} \cos\psi_{,,,}$$

$$B_{,} = R_{,} \sin\psi_{,} \qquad B_{,,,} = R_{,,,} \sin\psi_{,,,}$$

3.

$$\begin{aligned}
g\cos(G - L_{,}) &= R_{,,,} \cos(L_{,,,} - L_{,}) - R_{,} \\
g\sin(G - L_{,}) &= R_{,,,} \sin(L_{,,,} - L_{,}) \\
h\cos\zeta \cos(H - \lambda_{,,,}) &= M\cos\beta_{,,,} - \cos(\lambda_{,,,} - \lambda_{,}) \cos\beta_{,} \\
h\cos\zeta \sin(H - \lambda_{,,,}) &= \sin(\lambda_{,,,} - \lambda_{,}) \cos\beta_{,} \\
h\sin\zeta &= M\sin\beta_{,,,} - \sin\beta_{,} \\
\cos\varphi &= \cos\zeta \cos(G - H) \\
\sin\varphi \cos Q &= \cos\zeta \sin(G - H) \\
\sin\varphi \sin Q &= \sin\zeta.
\end{aligned}$$

Der Winkel Q ist in der folgenden Rechnung nicht nöthig, $\sin\varphi$ ist stets positiv anzunehmen, ist daher die Bestimmung von

sin φ aus cos φ hinreichend sicher, so bedarf man der letzteren zwei Gleichungen nicht.

$$\nu = \cos\beta_{,,,} \cos\zeta \cos(H - \lambda_{,,,}) + \sin\beta_{,,,} \sin\zeta$$
$$\xi = 2g\{\nu \cos\varphi - \cos\beta_{,,,} \cos(G - \lambda_{,,,})\}$$

$$\gamma_1 = \frac{g}{h}\cos\varphi \qquad A = g\sin\varphi$$

$$\gamma_2 = -\frac{\nu}{h} \qquad \Phi = \frac{\xi}{A^2}$$

$$\Psi = \frac{1-\nu^2}{\xi}.$$

4. (Versuche.)

Im ersten Versuche setze man $\lg(r_{,}+r_{,,,}) = x_1 = \log(R_{,}+R_{,,,})$, wodurch $m = 0$ wird, der Endwerth aus diesem Versuche für die logarithmische Summe der Radienvectoren sei y_1; im zweiten Versuche setzt man $x_2 = y_1$ und erhält den Werth y_2; für den dritten Versuch und ähnlich für die folgenden

$$x_3 = x_2 + \Delta_2 n,$$

wobei n berechnet wird nach

$$\Delta_1 = y_1 - x_1, \quad \Delta_2 = y_2 - x_2.$$
$$n = \frac{x_2 - x_1}{\Delta_1 - \Delta_2}.$$

Die Versuche sind nach folgenden Formeln durchzuführen:

$$x = \log(r_{,}+r_{,,,})$$
$$\eta = \frac{t_{,,}}{(r_{,}+r_{,,})^{3/2}} \text{ (η als Argument für μ)}$$
$$s = \frac{t_{,,}\mu}{\sqrt{r_{,}+r_{,,,}}} \qquad m = C + \frac{F}{(r_{,}+r_{,,,})^3}$$
$$\chi = m\Phi(1+m\Psi) \qquad \sin\vartheta = \frac{A}{s}\sqrt{1+\chi}.$$ [1]

---

[1] χ positiv: $\operatorname{tg}^2\sigma = \chi$, $\sin\vartheta = \frac{A}{s}\sec\sigma$

χ negativ: $\sin^2\sigma = -\chi$, $\sin\vartheta = \frac{A}{s}\cos\sigma$.

$$\rho_{,} = \frac{s}{h}\cos\vartheta + \gamma_1 + \gamma_2 m$$

$\cos\vartheta$ stets positiv.

$$\rho_{,,,} = m + M\rho_{,}$$

$$\operatorname{tg}\theta_{,} = \frac{\rho_{,} - f_{,}}{B_{,}}$$

$$\operatorname{tg}\theta_{,,,} = \frac{\rho_{,,,} - f_{,,,}}{B_{,,,}}$$

$$r_{,} = B_{,}\sec\theta_{,} = (\rho_{,} - f_{,})\operatorname{cosec}\theta_{,}$$

$$r_{,,,} = B_{,,,}\sec\theta_{,,,} = (\rho_{,,,} - f_{,,,})\operatorname{cosec}\theta_{,,,}$$

$$y = \log(r_{,} + r_{,,,}).$$

Ich werde die vorstehenden Formel durch ein ausführliches Beispiel erläutern, und wähle für dieses ganz dasselbe, welches ich in der zweiten Abhandlung völlig durchgeführt mitgetheilt habe, wodurch ich Vergleichspunkte erhalten, die die erlangten Vortheile deutlich hervortreten lassen; ganz besonders kurz gestalten sich die Versuche im Verhältniss zur älteren Methode. Das Beispiel ist dem Kometen III 1869 entnommen, auf den anfänglich eine Bahnbestimmung nach Olbers' Methode durchaus nicht anwendbar war und im Falle der Anwendung auf völlig falsche Resultate führte, während meine Methode die Bahnbestimmung mit grosser Sicherheit lieferte. Die drei Beobachtungen sind:

	T	λ	β	L	$\log R$
I 1869	333·41600	351°46'47"2	+20°25'26"1	247°44'30"3	9·993819
II	338·42221	0 41 44·1	+19 48 54·3	252 49 24·5	9·993502
III	343·42722	10 9 7·7	+18 39 14·6	257 54 38·1	9·993222

Nach diesen Beobachtungen findet sich nach dem oben angeführten Kriterium

$$Wo = 96°14'$$
$$W = 5\ 51,$$

also $\cos(Wo - W)$ beiläufig $\frac{1}{150}$, daher Olbers' Methode unbrauchbar.

1.

$\frac{1}{2}(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})$	9°11'10"25	$\sin\beta_{,}$	9·542780
$\frac{1}{2}(\beta_{,,,}-\beta_{,})$	—0 53 5 75	$\cos\beta_{,}$	9·971803
$\log\frac{1}{2}(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})$ [1]	2·741286	$\sin(\lambda_{,}-\Pi)$	9_n081416
$\log\frac{1}{2}(\beta_{,,,}-\beta_{,})$ [1]	1_n725061	$\log II$	9_n053219
$\log J\sin(\lambda_{,,}-\Pi)$	9·556687	$\log I$	8·526293
$\cos(\lambda_{,,}-\Pi)$	9·999738	log. *Add.*	0·113013
$\operatorname{tg} J\cos(\lambda_{,,}-\Pi)$	1·016225	$\lg Z$	9·166232
$\operatorname{tg}\lambda_{,,}-\Pi$	8·540462	$\sin\beta_{,,,}$	9·504951
$\lambda_{,,}-\Pi$	1°59'16"7	$\cos\beta_{,,,}$	9·976564
$-\Pi$	1°17 32·6	$(\sin\lambda_{,,,}-\Pi)$	9·297583
$\operatorname{cotg} J$	8·983513	$\lg I$	9·274147
$\lambda_{,}-\Pi$	353° 4'19"8	$\lg II$	8·488464
$\lambda_{,,,}-\Pi$	11 26 40·3	log *Subt.*	9·922310
$L_{,,}-\Pi$	254 6 57·1	$\lg N$	9·196457
$\sin(L_{,,}-\Pi)$	9_n983092	$\lg\odot_{,,}$	9_n976594
$T_{,,}-T_{,}$	5·00621	$\lg Z:N$	9·969775
$T_{,,,}-T_{,}$	10·01122	$\lg t_{,}:t_{,,,}$	9·999896
$T_{,,,}-T_{,,}$	5·00501	$\lg M$	9·969671
$\lg(T_{,,}-T_{,})$	0·699509	$\lg\odot_{,,}:N$	0_n780137
$\lg(T_{,,,}-T_{,})$	1·000487	$\lg F$	9_n553251
$\lg(T_{,,,}-T_{,,})$	0·699405	log *Add.*	0·300731
$\lg t_{,,,}$	9·236120	$\lg(R_{,}+R_{,,,})$	0·294550
$\lg t_{,,}$	9·537098	$3\lg(R_{,}+R_{,,,})$	0·883650
$\lg t_{,}$	9·236016	$\lg C$	8·669601
$\lg t_{,}t_{,,}$	8·773114	C	+0·046731

2.

$\lambda_{,}-L_{,}$	104°2'16"9	$\lambda_{,,,}-L_{,,,}$	112°14'29"6
$\cos(\lambda_{,}-L_{,})$	9_n384 830	$\cos(\lambda_{,,,}-L_{,,,})$	9_n578 080
$\cos\psi_{,}$	9_n356 633	$\cos\psi_{,,,}$	9_n554 644
$\sin\psi_{,}$	9·988 479	$\sin\psi_{,,,}$	9·970 105
$\log B_{,}$	9·982 298	$\log B_{,,,}$	9·963 327
$\log f_{,}$	9_n350 452	$\lg f_{,,,}$	9_n547 866
$f_{,}$	—0·224 105	$f_{,,,}$	—0·353 074

3.

$L_{,,,}-L_{,}$	10°10'7"8	$g\cos(G-L_{,})$	8_n225817
$\sin(L_{,,,}-L_{,})$	9·246866	$\sin(G-L_{,})$	9·997976
$\cos(L_{,,,}-L_{,})$	9·993124	$g\sin(G-L_{,})$	9·240088
$R_{,,,}\cos(L_{,,,}-L_{,})$	9·986346	$\operatorname{cotg}(G-L_{,})$	8_n985729
log *Subt.*	8·239471	$G-L_{,}$	95°31'37"8

[1] In Bogenminuten.

G	343°16'8"1	$\sin\varphi$	9·947 644
$\log g$	9·242112	$\cos\beta_{,,,}:h$	0·499 804
$\lambda_{,,,}-\lambda_{,}$	18°22'20"5	$\sin\beta_{,,,}:h$	0·028 191
$\sin(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})$	9·498574	$\lg I$	8_n264 039
$\cos(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})$	9·977279	$\lg II$	8_n733 070
$M\cos\beta_{,,,}$	9·946235	$\log Add.$	0·126 975
$\cos(\lambda_{,,,}-\lambda_{,})\cos\beta_{,}$	9·949082	$\lg\nu$	$8_n860045$
$\log Subt.$	7·818000	$G-\lambda_{,,,}$	333°7'0"4
$M\sin\beta_{,,,}$	9·474622	$\cos(G-\lambda_{,,,})$	9·950330
$\log Subt.$	9·230257	$\cos\beta_{,,,}\cos(G-\lambda_{,,,})$	9·926894
$h\cos\zeta\cos(H-\lambda_{,,,})$	$7_n764235$	$\nu\cos\varphi$	8·525501
$\sin(H-\lambda_{,,,})$	9·999916	$\log Subt.$	9·982415
$h\cos\zeta\sin(H-\lambda_{,,,})$	9·470377	$\lg\xi:2g$	$9_n909309$
$h\sin\zeta$	$8_n704879$	$2g$	9·543142
$\cos\zeta$	9·993701	$\lg\xi$	$9_n452451$
$h\cos\zeta$	9·470461	$\lg A$	9·189756
$\operatorname{tg}\zeta$	$9_n234418$	$\lg A^2$	8·379512
$\operatorname{cotg}(H-\lambda_{,,,})$	$8_n293858$	$\lg\Phi$	$1_n072939$
$H-\lambda_{,,,}$	91°7'37"2	ν^2	7·720090
$\log h$	9·476760	$1-\nu^2$	9·997715
H	101°16'44"9	$\lg\Psi$	$0_n545264$
$G-H$	241 59 23·2	$\lg\gamma_1$	$9_n430808$
$\cos(G-H)$	9_n671 755	γ_1	—0·269655
$\cos\varphi$	9_n665 456	$\log\gamma_2$	9·383285
$g:h$	9·765 352		

4. (Versuche.)

Versuch	I	II	III	IV
x	0·294550	0·357736	0·353479	0·353841
$\frac{1}{2}x$	0·147275	0·178868	0·176874	0·176920
$\frac{3}{2}x$	0·441825	0·536604	0·530623	0·530761
$\lg\eta$	9·095273	9·000494	9·006475	9·006337
η	+0·124530	+0·100114	+0·101502	+0·101470
$\lg\mu$	0·000282	0·000182	0·000187	0·000187
$t_{,,}\mu$	9·537380	9·537280	9·537285	9·537285
s	9·390105	9·358412	9·360411	9·360365
$3x$		1·073208	1·061247	1·061523
$\log F:(r_{,}+r_{,,,})^2$		$8_n480043$	$8_n492004$	$8_n491728$
$F:(r_{,}+r_{,,,})^2$		—0·030202	—0·031046	—0·031026
m		+0·016529	+0·015685	+0·015705
$\lg m$		8·218247	8·195485	8·196038
Ψm		$8_n763511$	$8_n740749$	$8_n741302$
$1+\Psi m$		9·974045	9·975409	9·975377
$m\Phi$		$9_n291186$	$9_n268424$	$9_n268977$
$\sin^2\sigma$		9.265231	9·243833	9·244354

Versuch	I	II	III	IV
$\sin\sigma$		9·632616	9·621916	9·622177
$\cos\sigma$		9·955798	9·958143	9·958087
$A:s$	9·799651	9·831344	9·829345	9·829391
$\sin\vartheta$		9·787142	9·787488	9·787478
$\cos\vartheta$	9·889990	9·897864	9·897656	9·897662
$s:h$	9·913345	9·881652	9·883651	9·883605
$\lg\gamma o$	9·803335	9·779516	9·781307	9·781267
$\lg\gamma_2 m$		7·601532	7·578770	7·579323
$\gamma_2 m$		+0·003995	+0·003791	+0·003796
$\gamma_1+\gamma_2 m$		—0·265660	—0·265864	—0·265859
γo	+0·635821	+0·601889	+0·604376	+0·604320
$\rho_{,}$	+0·336166	+0·336229	+0·338512	+0·338461
$\log\rho_{,}$	9·563678	9·526635	9·529574	9·529508
$\log M\rho_{,}$	9·533349	9·496306	9·499245	9·499179
$M\rho_{,}$		+0·313549	+0·315679	+0·315631
$\rho_{,,,}$	+0·341467	+0·330078	+0·331364	+0·331336
$\rho_{,}-f_{,}$	+0·590271	+0·560334	+0·562617	+0·562566
$\rho_{,,,}-f_{,,,}$	+0·694541	+0·683152	+0·684438	+0·684410
$\lg(\rho_{,}-f_{,}$	9·771052	9·748447	9·750213	9·750174
$\log(\rho_{,,,}-f_{,,,})$	9·841698	9·834517	9·835334	9·835316
$\operatorname{tg}\theta_{,}$	9·788754	9·766149	9·767915	9·767876
$\operatorname{tg}\theta_{,,,}$	9·878371	9·871190	9·872007	9·871989
$\cos\theta_{,}$	9·930373	9·936344	9·935893	9·935904
$\cos\theta_{,,,}$	9·901893	9·904476	9·904184	9·904191
$\lg r_{,}$	0·051925	0·045954	0·046405	0·046394
$\lg r_{,,,}$	0·061434	0·058851	0·059143	0·059136
$\lg Add.$	0·296302	0·294629	0·294707	0·294705
y	0·357736	0·353480	0·353850	0·353841
Δ	+0·063186	—0·004256	+0·000101	
$\Delta_1-\Delta_2$		+0·067442	—0·04357	
x_2-x_1		+0·063186	—0·003987	
$\lg(\Delta_1-\Delta_2)$		8·82893	7_n6392	
$\lg(x_2-x_1)$		8·80062	7_n6006	
$\lg n$		0·02831	0·0386	
$\lg\Delta_2$		7_n62900	6·0043	
$\lg dx$		7_n60069	5·9657	
dx		—0·003987	+0·000092	

Man hat daher zur Berechnung der Elemente anzuwenden:

$$\rho_{,}=0\cdot338461$$
$$\rho_{,,,}=0\cdot331336,$$

welche Werthe um sechs Einheiten der letzten Decimale von jenen der zweiten Abhandlung abweichen, welche Differenz sich

aus der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung hinreichend erklärt. Vergleicht man dieses Versuchsschema mit dem der zweiten Abhandlung, in der die Vorversuche eine ziemliche Arbeit veranlassten, so wird man die Vortheile der neuen Transformationen sofort erkennen, und ich meine nun behaupten zu können, dass meine Methode in der That als nicht unbequem und nicht zeitraubend bezeichnet werden kann.

Ich habe oben als Regel aufgestellt, dass der Hilfswinkel ϑ nur im ersten Quadranten genommen werden darf, d. h. dass $\cos\vartheta$ das positive Zeichen erhält. Ich muss hiefür um so mehr den Nachweis liefern, da man auf Grundlage der Gleichung für $\rho_,$ im Falle dass $s<g$ wird, eine doppelte Lösung als zulässig erklärt hat. Vorerst möchte ich hervorheben, dass die Beschränkung $s<g$, welche mit der Annahme $r>2$ fast identisch ist, zeigt, dass in der Praxis kaum je ein Zweifel in der Wahl des Zeichens von $\cos\vartheta$ eintreten wird, indem selten genug Kometen in solcher Sonnenferne gesehen, geschweige entdeckt werden; doch scheint es mir aus theoretischem Interesse immerhin wünschenswerth, nachzuweisen, dass die Zulässigkeit einer doppelten brauchbaren Lösung ($\rho_,$ positiv) eine irrthümliche Annahme ist. Bei solchen übersichtlichen Betrachtungen wird es wünschenswerth sein, sich die Gleichungen möglichst einfach, ohne der Strenge allzuviel zu vergeben, zu Recht zu legen, ich werde daher annehmen, dass es hinreichend genau ist, zur Lösung des Problems (Bestimmung von $\rho_,$) die folgenden Gleichungen zu benützen

$$r_,^2 = (\rho_, - R_, \cos\psi_,)^2 + R_,^2 \sin\psi_,^2 \qquad (A)$$

$$s^2 = (h\rho_, - g\cos\varphi)^2 + g^2 \sin\varphi^2 \qquad (B)$$

$$s = \frac{t_{,,}}{\sqrt{2r_,}}. \qquad (C)$$

Man sieht sofort ein, dass diese Näherungen in der That völlig ausreichend sind. Die Gleichungen A und B deuten auf Hyperbeln hin; betrachtet man nämlich $\rho_,$ als Abscisse, so wird $r_,$ und s als die Ordinaten zweier Hyperbeln erscheinen. Die reciproken Werthe der Quadratwurzel der Ordinaten der ersten Hyperbel (A) werden multiplicirt mit einem constanten Faktor, die

Ordinaten einer neuen Curven ergeben, die für $\rho_, = f_,$ ein Maximum der Ordinate hat und zwar ist der Werth derselben nach der ersten Gleichung C,

$$s = \frac{t_{,,}}{\sqrt{2R_, \sin\psi_,}}$$

es ist nämlich in diesem Falle $r_,$ ein Minimum. Für unendliche Werthe von $\rho_,$ wird s der Null gleich; daraus kann man schliessen, dass diese Curve sich asymptotisch der Abscissenachse nähert und vermöge der quadratischen Form in symmetrischer Weise gegen den Werth $\rho_, = f_,$. Die Curve hat vermöge ihrer Construction zwei Wendepunkte, zwischen denen sie nach der Abscissenachse hin concav ist, ausserhalb derselben, wo sie in die Asymptote übergeht, ist dieselbe gegen die Abscissenaxe convex. Da die zweite Hyperbel, die durch die Gleichung (B) gebildet wird und die bisher noch nicht in Betracht gezogen war, ihre grosse Achse im Sinne der Ordinate gerichtet hat, so ist sofort klar, dass sich die beiden Curven in zwei oder vier Punkten schneiden werden.

Würde man die Gleichungen (A), (B) und (C) direct aufzulösen versuchen, so erhielte man eine Gleichung des sechsten Grades, mithin sechs Wurzeln; dass im Allgemeinen, wie dies schon das geometrische Bild gelehrt hat, aber nur vier reelle Wurzeln in Betracht kommen, erschliesst man leicht aus der folgenden Betrachtung. Macht man eine bestimmte Annahme über s^2, so wird die Gleichung (B) zwei verschiedene Werthe für $\rho_,$ liefern $\{B_1$ und $B_2\}$, die Gleichung C aber einen positiven Werth für $r_{,,}$ der mit Hilfe der Gleichung (A) auf zwei andere Werthe von $\rho_,$ führt, nämlich A_1 und A_2. Eine bestimmte Annahme über s^2 führt auf vier verschiedene Werthe von $\rho_,$, es werden demnach vier Wurzeln vorhanden sein, da s so bestimmt werden kann, das ist

$$A_1 = B_1 \qquad A_2 = B_1$$
$$A_1 = B_2 \qquad A_2 = B_2$$

wobei natürlich diese vier Gleichungen nicht gleichzeitig bestehen. Die Beschränkung, dass $\rho_,$ positiv gefunden werden muss, wird sofort noch weitere Einschränkungen finden lassen. Da

Gleichung (B) gibt bekanntlich für $\rho_,$ nur zwei positive Lösungen, so lange $s<g$ ist, was nahehin identisch ist mit $r_,>2$, die Gleichung (A) aber nur wenn $r_,<R$ ist, oder nahezu $r_,<1$. Diese Bedingungen $r_,>2$ und $r_,<1$ widersprechen sich, man kann daraus sofort den Schluss ziehen, dass für Kometen innerhalb der Entfernung 1 und 2 von der Sonne nur eine positive Lösung für $\rho_,$ denkbar ist, über diese Grenzen hinaus sind nach der vorläufigen Ableitung je zwei positive Lösungen aber auch nicht mehr möglich.

Ich kehre nun wieder zu der obigen geometrischen Betrachtung zurück. Für $\rho_, = 0$ steht nothwendig die aus der Gleichung (B) folgende Hyperbel innerhalb der anderen durch (A) und (C) bestimmten Curve; denn für diesen Fall ist die Ordinate der Hyperbel gleich g oder nahe $\frac{t_{,,}}{2}$, die Ordinate der anderen Curve ist aber da $r_, = R_, = 1$ ist $\frac{t_{,,}}{\sqrt{2}}$, welches ein grösserer Werth ist. Schneiden sich demnach die beiden Curven nur in zwei Punkten, so wird der eine Durchschnittspunkt einem positiven $\rho_,$ (also nur brauchbar) entsprechen, der andere einem negativen; findet der Durchschnitt in vier Punkten statt, so müssen nothwendig drei Schnittpunkte auf der einen Seite der Ordinatenachse liegen und nur einer auf der anderen, da ja für $\rho_, = 0$ die Hyperbel innerhalb der anderen Curve steht; es ist nach dieser Anschauung also nur der Fall denkbar, dass für positive $\rho_,$ entweder eine oder drei Lösungen vorhanden sind, da aber oben bewiesen wurde, dass nicht mehr als zwei positive Lösungen möglich sind, so wird man den Schluss ziehen, dass nur eine positive Lösung für das Problem überhaupt denkbar ist. Kehrt man nun zu der Gleichung

$$\rho_, = \pm \frac{s}{h} \cos \vartheta + \gamma$$

zurück, so wird man sofort einsehen, dass, mag γ wie immer beschaffen sein, die doppelte analytische Lösung des Problems ($\rho_,$ positiv oder negativ) in dem zweifelhaften Zeichen von $\cos \vartheta$ enthalten ist; nun ist aber $\frac{s}{h}$ stets positiv, demnach wird das

obere positive Zeichen Geltung haben für die positive, das untere für die negative (eventuell drei Lösungen) Lösung und man hat daher stets zur Berechnung der Distanz aus s anzuwenden

$$\rho_{,} = \frac{s}{h} \cos \vartheta + \gamma,$$

wobei $\cos \vartheta$ mit seinem positiven Werthe eingeführt werden muss.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

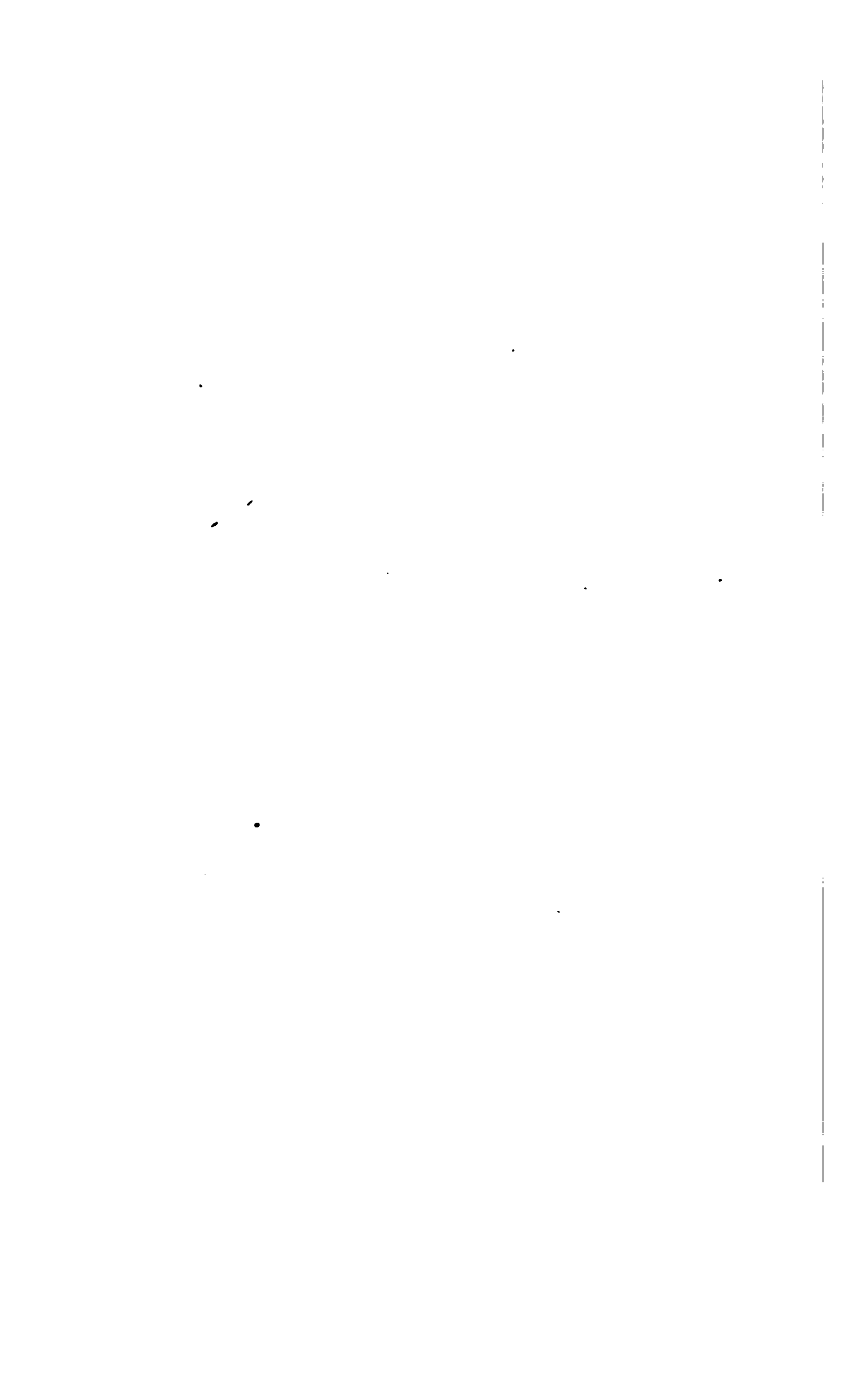
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXIV. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

10.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.



XXVII. SITZUNG VOM 7. DECEMBER 1871.

Herr Dr. A. Boué übermittelt seine Antwort auf das Schreiben des Herrn Eugen Bloek in Pulkowa vom 10. October 1871, betreffend seinen Katalog der Nord- und Südlichter.

Herr Hermann Fritz zu Zürich richtet unter dem 4. December ein Schreiben an die kais. Akademie, welches gleichfalls Herrn Bloek's Kritik des Katalogs der Nord- und Südlichter vom Herrn Dr. Boué zum Gegenstande hat.

Herr Prof. Leop. Gegenbauer in Krems übersendet eine Abhandlung: „Integration linearer Differentialgleichungen dritter Ordnung durch Bessel'sche Functionen".

Herr Schiffslieutenant K. Weyprecht setzt in einem längeren Vortrage die wissenschaftlichen Resultate der letzten in Gemeinschaft mit Oberlieutenant Julius Payer unternommenen Nordpolarfahrt auseinander.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia, R., delle Scienze di Torino: Memorie. Serie II[da] Tomo XXV & XXVI. Torino, 1871; 4°. — Atti. Vol. VI, disp. 1[a]—7[a] (Novembre 1870— Luglio 1871). Torino; 8°. — Bollettino meteorologico ed astronomico del R. Osservatorio dell' Università di Torino. Anno V. 1871. 4°. — Atlante di carte celesti contenenti le 634 stelle principali visibili alla latitudine boreale di 45° etc. Torino, 1871; folio.

Akademie der Wissenschaften, Königl. Bayer., zu München: Abhandlungen der philos.-philolog. Classe. XII. Bandes I. & II. Abtheilung (1870 & 1871). — Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe. X. Bandes III. Abtheilung (1870). — Abhandlungen der historischen Classe. XI. Bandes II. & III. Abtheilung (1869 & 1871). (Nebst den betreffenden Sepa-

ratabdrücken.) 4°. — Almanach für das Jahr 1871. 12°. — *Monumenta boica. Vol. XL. Monachii, MDCCCLXX; 4°.* — Preger, Wilh., Die Entfaltung der Idee des Menschen durch die Weltgeschichte. (Vortrag gehalten in der öffentl. Sitzung am 28. März 1870.) München 1870; 4°. — Haug, Martin, Brahma und die Brahmanen. (Vortrag, gehalten in der öffentl. Sitzung am 28. März 1871.) München, 1871; 4°.

Bonn, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1870. 4° & 8°.

Breslau, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus den Jahren 1869 und 1870. 4° & 8°.

Carl, Ph., Repertorium für Experimental-Physik etc. VII. Band. 4. Heft. München, 1871; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIII, Nrs. 20—21; Paris, 1871; 4°.

Gesellschaft der Wissenschaften, Königl., zu Göttingen: Abhandlungen. XV. Band. Göttingen, 1871; 4°. — Gelehrte Anzeigen. 1870, I. & II. Band. Göttingen; 8°. — Nachrichten aus dem Jahre 1870. Göttingen, 1870; 8°.

Grunert Joh. Aug., Archiv der Mathematik und Physik. LI. Theil, 4. Heft. Greifswald, 1869; 8°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1871, Nr. 22. Wien; 8°.

Nature. Nr. 109, Vol. V. London, 1871; 8°.

Rostock, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1869/70. 4° & 8°.

Society, The Zoological, of London: Transactions. Vol. VII. Parts 3—6. London, 1870 & 1871; 4°. — Proceedings for the Year 1870, Parts 1—3; for the Year 1871, Part 1. London; 8°.

Wiener Mediz. Wochenschrift. XXI. Jahrgang, Nr. 48. Wien. 1871; 4°.

Zürich, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1869/1870. 4° & 8°.

Auswerthung bestimmter Integrale.

Von Leopold Gegenbauer.

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. November 1871.)

Die vorliegende Abhandlung hat den Zweck, einige zur Auswerthung bestimmter Integrale verwendbare Formeln aufzustellen und deren Verwendbarkeit an einigen Beispielen zu zeigen.

Es sei:

1. $\varphi(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + a_3\rho^3 + \ldots$

2. $\psi(\rho) = b_0 + b_1\rho + b_2\rho^2 + b_3\rho^3 + \ldots$

noch giltig für $\rho : e^{\alpha xi}$ und $e^{-\alpha xi}$, so hat man:

3. $$\varphi(e^{\alpha xi}) = a_0 + a_1 \cos\alpha x + a_2 \cos 2\alpha x + a_3 \cos 3\alpha x + \ldots + i[a_1 \sin\alpha x + a_2 \sin 2\alpha x + a_3 \sin 3\alpha x + \ldots]$$

4. $$\begin{aligned}\varphi(e^{\alpha xi}).\psi(e^{-\alpha xi}) = {} & a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \\ & +[a_0b_1 + a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_4 + \ldots \\ & + b_0a_1 + b_1a_2 + b_2a_3 + b_3a_4 + \ldots]\cos\alpha x \\ & +[a_0b_2 + a_1b_3 + a_2b_4 + a_3b_5 + \ldots \\ & + b_0a_2 + b_1a_3 + b_2a_4 + b_3a_5 \ldots]\cos 2\alpha x \\ & +[a_0b_3 + a_1b_4 + a_2b_5 + a_3b_6 + \ldots \\ & + b_0a_3 + b_1a_4 + b_2a_5 + b_3a_6 + \ldots]\cos^3\alpha x \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + i\big[[b_0a_1 + b_1a_2 + b_2a_3 + b_3a_4 + \ldots \\ & - a_0b_1 - a_1b_2 - a_2b_3 - a_3b_4 - \ldots]\sin\alpha x \\ & +[b_0a_2 + b_1a_3 + b_2a_4 + b_3a_5 + \ldots \\ & - a_0b_2 - a_1b_3 - a_2b_4 - a_3b_5 - \ldots]\sin 2\alpha x \\ & +[b_0a_3 + b_1a_4 + b_3a_5 + b_3a_6 + \ldots \\ & - a_0b_3 - a_1b_4 - a_2b_5 - a_3b_6 - \ldots]\sin 3\alpha x \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\big]\end{aligned}$$

Wir multipliciren nun diese zwei Gleichungen mit den Ausdrücken:

$$e^{-q^2x^2}.dx, \qquad \frac{\sin rx}{q^2+x^2}dx, \qquad \frac{\cos rx}{q^2+x^2}dx, \qquad \sin rx\frac{xdx}{q^2+x^2},$$

$$\cos rx\frac{xdx}{q^2+x^2}, \qquad e^{-\frac{x}{\omega}}.x^{p-1}.dx \quad [\text{für } \lim\omega=\infty], \quad e^{pxi}.dx$$

und integriren in den fünf ersten Fällen von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$, im sechsten Falle von $x=0$ bis $x=+\infty$ und im letzten Falle von $x=0$ bis $x=2\pi$.

Berücksichtigt man nun, dass:

$$5. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2x^2}.dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q}$$

$$6. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2x^2}.\cos px.dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q}e^{-\frac{p^2}{4q^2}}$$

$$7. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2x^2}.\sin px.dx = 0$$

$$8. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin rx}{q^2+x^2}dx = 0$$

$$9. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin px.\sin rx.\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2q}e^{-pq}[e^{rq}-e^{-rq}]\,[\text{für } 0<r\leqq p$$

$$10. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos rx}{q^2+x^2}dx = \frac{\pi}{q}e^{-rq}$$

$$11. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos px.\sin rx.\frac{dx}{q^2+x^2} = 0$$

$$12. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos px\cos rx.\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{q}e^{-pq}[e^{rq}+e^{-rq}]$$

13. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin rx \frac{x \,.\, dx}{q^2+x^2} = \pi e^{-rq}$$

14. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin px \,.\, \sin rx \frac{x \,.\, dx}{q^2+x^2} = 0$$

15. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos px \,.\, \sin rx \frac{x \,.\, dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{q} e^{-pq}[e^{-rq} - e^{rq}]$$

16. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos rx \frac{x \,.\, dx}{q^2+x^2} = 0$$

17. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos px \,.\, \cos rx \,.\, \frac{x dx}{q^2+x^2} = 0$$

18. $$\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{\omega}} \sin qx \,.\, x^{p-1} \,.\, dx = q^{-p}\Gamma(p) \sin \tfrac{1}{2}p\pi \quad [\text{für } \lim \omega = \infty]$$

19. $$\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{\omega}} \,.\, \cos qx \,.\, x^{p-1} \,.\, dx = q^{-p}\Gamma(p) \cos \tfrac{1}{2}p\pi$$

20. $$\int_{0}^{2\pi} e^{pxi} \,.\, dx = 0$$

21. $$\int_{0}^{2\pi} \cos qx \,.\, e^{pxi} \,.\, dx = 0 \quad [\text{für } p \gtrless q]$$

22. $$\int_{0}^{2\pi} \sin qx \,.\, e^{pxi} \,.\, dx = 0 \quad [\text{für } p \gtrless q]$$

23. $$\int_{0}^{2\pi} \cos qx \,.\, e^{pxi} \,.\, dx = \pi \quad [\text{für } p = q]$$

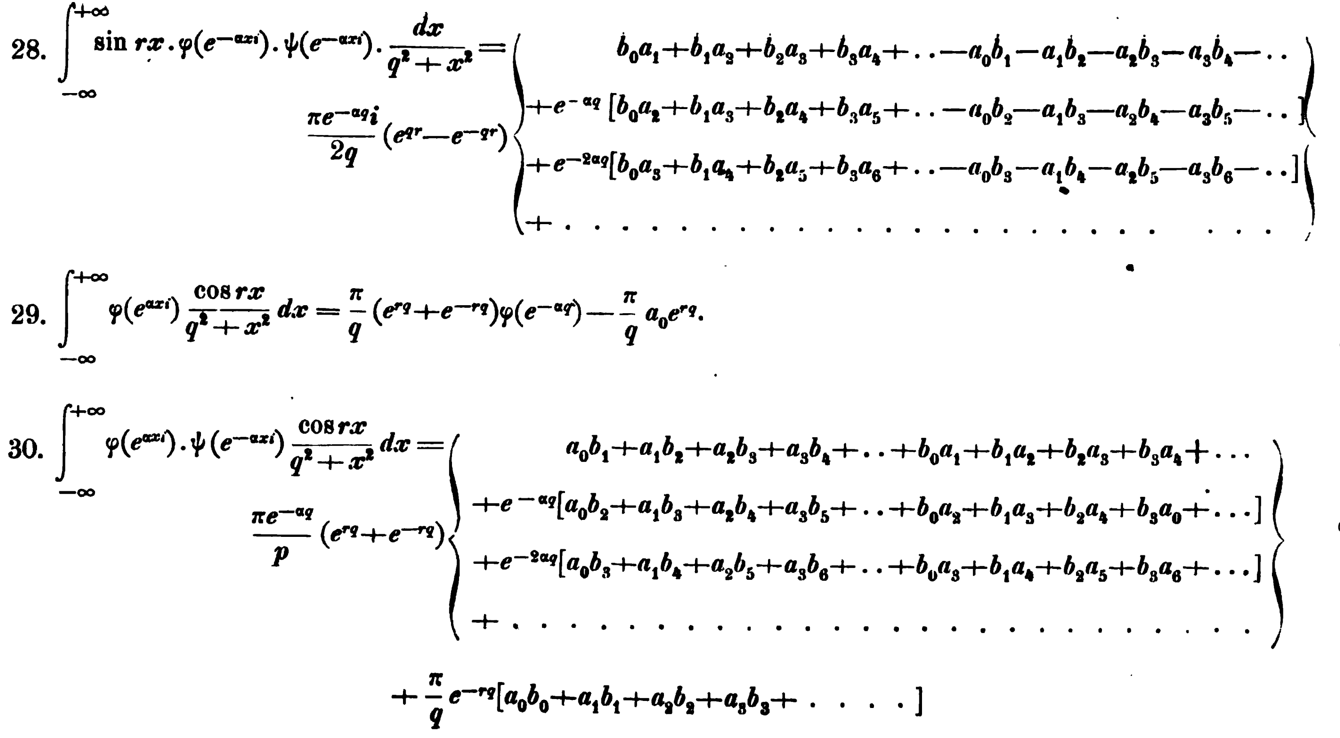
$$24. \int_0^{2\pi} \sin qx . {}^{pxi} . dx = \pi i \quad [\text{für } p = q]$$

ist, so erhält man durch die erwähnten Multiplicationen und Integrationen, sogleich folgende zur Auswerthung bestimmter Integrale verwendbare Formeln:

$$25. \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{\alpha x i}) . e^{-q^2 x^2} . dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q} [a_0 + a_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4q^2}} + a_2 e^{-\frac{4\alpha^2}{4q^2}} + a_3 e^{-\frac{9\alpha^2}{4q^2}}$$

$$26. \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{\alpha x i}) . \psi(e^{-\alpha x i}) e^{-q^2 x^2} . dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q} \left\{ \begin{array}{l} a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots \\ + e^{-\frac{\alpha^2}{4q^2}} [a_0 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_4 + \ldots + b_0 a_1 + b_1 a_2 + b_2 a_3 + b_3 a_4 + \ldots] \\ + e^{-\frac{4\alpha^2}{4q^2}} [a_0 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_4 + a_3 b_5 + \ldots + b_0 a_2 + b_1 a_3 + b_2 a_4 + b_3 a_5 + \ldots] \\ + e^{-\frac{9\alpha^2}{4q^2}} [a_0 b_3 + a_1 b_4 + a_2 b_5 + a_3 b_6 + \ldots + b_0 a_3 + b_1 a_4 + b_2 a_5 + b_3 a_6 + \ldots] \\ + \ldots \ldots \ldots \ldots \end{array} \right\}$$

$$27. \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{\alpha x i}) . \frac{\sin rx}{q^2 + x^2} . dx = \frac{\pi i}{2q} (e^{rq} - e^{-rq}) (\varphi(e^{-xp}) - a_0)$$



$$28.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin rx \,.\, \varphi(e^{-axi}) \,.\, \psi(e^{-axi}) \,.\, \frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi e^{-aq} i}{2q}(e^{qr}-e^{-qr}) \left\{ \begin{array}{l} \quad b_0a_1+b_1a_2+b_2a_3+b_3a_4+\ldots-a_0b_1-a_1b_2-a_2b_3-a_3b_4-\ldots \\ +e^{-aq}[b_0a_2+b_1a_3+b_2a_4+b_3a_5+\ldots-a_0b_2-a_1b_3-a_2b_4-a_3b_5-\ldots] \\ +e^{-2aq}[b_0a_3+b_1a_4+b_2a_5+b_3a_6+\ldots-a_0b_3-a_1b_4-a_2b_5-a_3b_6-\ldots] \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

$$29.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{axi}) \frac{\cos rx}{q^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{q}(e^{rq}+e^{-rq})\varphi(e^{-aq}) - \frac{\pi}{q}\,a_0e^{rq}.$$

$$30.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{axi}) \,.\, \psi(e^{-axi}) \frac{\cos rx}{q^2+x^2}\,dx = \frac{\pi e^{-aq}}{p}(e^{rq}+e^{-rq}) \left\{ \begin{array}{l} \quad a_0b_1+a_1b_2+a_2b_3+a_3b_4+\ldots+b_0a_1+b_1a_2+b_2a_3+b_3a_4+\ldots \\ +e^{-aq}[a_0b_2+a_1b_3+a_2b_4+a_3b_5+\ldots+b_0a_2+b_1a_3+b_2a_4+b_3a_0+\ldots] \\ +e^{-2aq}[a_0b_3+a_1b_4+a_2b_5+a_3b_6+\ldots+b_0a_3+b_1a_4+b_2a_5+b_3a_6+\ldots] \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

$$+\frac{\pi}{q}e^{-rq}[a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots\ldots]$$

$$31.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{\alpha x i}) \sin rx \frac{x\,dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2}(e^{-rq}-e^{rq})(\varphi(e^{-\alpha q})+a_0)$$

$$32.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{\alpha x i}).\psi(e^{-\alpha x i}) \sin rx \frac{x\,dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi e^{-\alpha q}}{2}(e^{-rq}-e^{rq}) \left\{ \begin{array}{l} \quad a_0b_1+a_1b_2+a_2b_3+a_3b_4+\ldots+b_0a_1+b_1a_2+b_2a_3+b_3a_4+\ldots] \\ +e^{-\alpha q}[a_0b_2+a_1b_3+a_2b_4+a_3b_5+\ldots+b_0a_2+b_1a_3+b_2a_4+b_3a_5+\ldots] \\ +e^{-2\alpha q}[a_0b_3+a_1b_4+a_2b_5+a_3b_6+\ldots+b_0a_3+b_1a_4+b_2a_5+b_3a_6+\ldots] \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

$$+\pi e^{-rq}(a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\ldots\ldots)$$

$$33.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{\alpha x i}) \cos rx \frac{x\,dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi e^{-rq}}{2} i[\varphi(e^{-\alpha q})-\varphi(e^{\alpha q})]$$

$$34.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{\alpha x i}).\psi(e^{-\alpha x i}).\cos rx \frac{x\,dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi i}{2} e^{-rq} \left\{ \begin{array}{l} \quad (e^{-\alpha q}-e^{\alpha q})[b_0a_1+b_1a_2+b_2a_3+b_3a_4+\ldots-a_0b_1-a_1b_2-a_2b_3-a_3b_4-\ldots] \\ +(e^{-2\alpha q}-e^{2\alpha q})[b_0a_2+b_1a_3+b_2a_4+b_3a_5+\ldots-a_0b_2-a_1b_3-a_2b_4-a_3b_5\ldots] \\ +(e^{-3\alpha q}-e^{3\alpha q})[b_0a_3+b_1a_4+b_2a_5+b_3a_6+\ldots-a_0b_3-a_1b_4-a_2b_5-a_3b_6-\ldots] \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

$$35.\quad \int_0^\infty \varphi(e^{\alpha x i}).e^{-\frac{x}{\omega}}.x^{p-1}.dx = \frac{\Gamma(p)e^{\frac{p\pi i}{2}}}{\alpha^{+p}}\left[a_1 + \frac{a_2}{2^p} + \frac{a_3}{3^p} + \frac{a_4}{4^p} + \ .\ .\ .\ \right], \quad [\text{für } \lim \omega = \infty;\ a_0 = 0]$$

$$36.\quad \int_0^\infty \varphi(e^{\alpha x i}).\psi(e^{-\alpha x i}).e^{-\frac{x}{\omega}}.x^{p-1}.dx = \frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}\left\{\begin{array}{l} \quad [a_0b_1 + a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_4 + \ .\ .\ . \\ + \frac{1}{2^p}(a_0b_2 + a_1b_3 + a_2b_4 + a_3b_5 + \ .\ .\ .\ ) \\ + \frac{1}{3^p}(a_0b_3 + a_1b_4 + a_2b_5 + a_3b_6 + \ .\ .\ .\ ) \\ + \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ]e^{-\frac{p\pi i}{2}} \\ + [b_0a_1 + b_1a_2 + b_2a_3 + b_3a_4 + \ .\ .\ .\ . \\ + \frac{1}{2^p}(b_0a_2 + b_1a_3 + b_2a_4 + b_3a_5 + \ .\ .\ .\ .\ ) \\ + \frac{1}{3^p}(b_0a_3 + b_1a_4 + b_2a_5 + b_3a_6 + \ .\ .\ .\ .\ ) \\ + \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ]e^{\frac{p\pi i}{2}} \end{array}\right\}$$

$$[\text{für: } a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ .\ .\ . = 0]$$

$$37.\quad \int_0^{2\pi} \varphi(e^{\alpha x i})e^{p x i}.dx = \pi a_{\frac{p}{\alpha}}(1 + i)$$

$$38.\quad \int_0^{2\pi} \varphi(e^{\alpha xi}).\psi(e^{-\alpha xi})e^{pxi}.dx = \pi[(a_0 b_{\frac{p}{\alpha}} + a_1 b_{\frac{p}{\alpha}+1} + a_2 b_{\frac{p}{\alpha}+2} + \ldots + b_0 a_{\frac{p}{\alpha}} + b_1 a_{\frac{p}{\alpha}+1} + b_2 a_{\frac{p}{\alpha}+2} + \ldots)$$

$$+ (b_0 a_{\frac{p}{\alpha}} + b_1 a_{\frac{p}{\alpha}+1} + b_2 a_{\frac{p}{\alpha}+2} + \ldots - a_0 b_{\frac{p}{\alpha}} - a_1 b_{\frac{p}{\alpha}+1} - a_2 b_{\frac{p}{\alpha}+2} - \ldots)i]$$

Die zwei letzten Formeln sind unter der Voraussetzung entwickelt, dass $\frac{p}{\alpha}$ eine ganze Zahl ist.

Diese Formeln können daher auch in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$39.\quad \int_0^{2\pi} \varphi(e^{\alpha xi})e^{n\alpha xi}.dx = \pi a_n(1+i)$$

$$40.\quad \int_0^{2\pi} \varphi(e^{\alpha xi}).\psi(e^{-\alpha xi})e^{n\alpha xi}.dx = \pi[(a_0 b_n + a_1 b_{n+1} + a_2 b_{n+2} + \ldots + b_0 a_n + b_1 a_{n+1} + b_2 a_{n+2} + \ldots)$$

$$+ (b_0 a_n + b_1 a_{n+1} + b_2 a_{n+2} + \ldots - a_0 b_n - a_1 b_{n+1} - a_2 b_{n+2} - \ldots)i]$$

Zur Erläuterung der eben entwickelten Formeln mögen folgende Beispiele dienen:

I. Es sei:

$$41.\quad \varphi(\rho) = \cos\rho = 1 - \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^4}{4!} - \ldots$$

$$42.\quad \psi(\rho) = \sin\rho = \rho - \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^5}{5!} - \ldots$$

so ist:

$$43.\quad \varphi(e^{\alpha x i}) = \cos(e^{\alpha x i}) = \cos(\cos\alpha x)\frac{e^{\sin\alpha x}+e^{-\sin\alpha x}}{2} - i\sin(\cos\alpha x)\frac{e^{\sin\alpha x}-e^{-\sin\alpha x}}{2}$$

$$44.\quad \psi(e^{-\alpha x i}) = \sin(e^{-\alpha x i}) = \sin(\cos\alpha x)\frac{e^{\sin\alpha x}+e^{-\sin\alpha x}}{2} - i\cos(\cos\alpha x)\frac{e^{\sin\alpha x}-e^{-\sin\alpha x}}{2}$$

Unsere Formeln liefern daher folgende bestimmte Integrale:

$$45.\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\cos\alpha x)[e^{\sin\alpha x}+e^{-\sin\alpha x}]e^{-q^2x^2}.dx = \frac{2\sqrt{\pi}}{q}\left[1-\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{q^2}}}{2!}+\frac{e^{-\frac{4\alpha^2}{q^2}}}{4!}-\frac{e^{-\frac{9\alpha^2}{q^2}}}{6!}+\ldots\right]$$

$$46.\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\cos\alpha x)[e^{\sin\alpha x}+e^{-\sin\alpha x}]e^{-q^2x^2}.dx = \frac{2e^{-\frac{\alpha^2}{4q^2}}\sqrt{\pi}}{q}\left[1-\frac{e^{-\frac{2\alpha^2}{q^2}}}{3!}+\frac{e^{-\frac{6\alpha^2}{q^2}}}{5!}-\frac{e^{-\frac{12\alpha^2}{q^2}}}{6!}+\ldots\right]$$

$$47.\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\sin(2\cos\alpha x).e^{-q^2x^2}.dx = \frac{2\sqrt{\pi}e^{-\frac{\alpha^2}{4q^2}}}{q}\Big[\left(\frac{1}{1!}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3!}\right)^2\left(3-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5!}\right)^2\left(5-\frac{1}{6}\right)+\ldots$$

$$-e^{-\frac{2\alpha^2}{q^2}}\left(\left(\frac{1}{1!}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2\cdot3}+\left(\frac{1}{3!}\right)^2\left(3-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{4\cdot5}+\left(\frac{1}{5!}\right)^2\left(5-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{6\cdot7}+\ldots\right)$$

$$+e^{-\frac{6\alpha^2}{q^2}}\left(\left(\frac{1}{1!}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\left(\frac{1}{3!}\right)^2\left(3-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7}+\left(\frac{1}{5!}\right)^2\left(5-\frac{1}{10}\right)\frac{1}{6\cdot7\cdot8\cdot9}+\ldots\right)$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]$$

48. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\cos\alpha x)[e^{\sin\alpha x} - e^{-\sin\alpha x}]\frac{\sin rx}{q^2+x^2}\,.\,dx = \frac{\pi}{q}(e^{qr}-e^{-qr})\left(1-\cos(e^{-\alpha q})\right)$$

49. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\cos\alpha x)[e^{\sin\alpha x} - e^{-\sin\alpha x}]\frac{\sin rx}{q^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{q}\sin(e^{-\alpha q})(e^{qr}-e^{-qr})$$

50. $$\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{2\sin\alpha x} - e^{-2\sin\alpha x})\frac{\sin rx}{q^2+x^2}\,.\,dx =$$

$$= \frac{2\pi e^{-\alpha q}}{q}(e^{qr}-e^{-qr})\Bigg[\left(\frac{1}{1!}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3!}\right)^2\left(3+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5!}\right)^2\left(5+\frac{1}{6}\right) + \;\cdot\;\cdot$$

$$- e^{-2\alpha q}\left(\left(\frac{1}{1!}\right)^2\left(1+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2.3} + \left(\frac{1}{3!}\right)^2\left(3+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{4.5} + \left(\frac{1}{5!}\right)^2\left(5+\frac{1}{8}\right)\frac{1}{6.7} + \;\cdot\;\cdot\right)$$

$$+ e^{-4\alpha q}\left(\left(\frac{1}{1!}\right)^2\left(1+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{2.3.4.5} + \left(\frac{1}{3!}\right)^2\left(3+\frac{1}{8}\right)\frac{1}{4.5.6.7} + \left(\frac{1}{5!}\right)^2\left(5+\frac{1}{10}\right)\frac{1}{6.7.8.9} + \;\cdot\;\cdot\right)$$

$$- \;\cdot\;\Bigg]$$

51. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\cos\alpha x)\cos rx(e^{\sin\alpha x}+e^{-\sin\alpha x})\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{q}[(e^{rq}+e^{-rq})\cos(e^{-\alpha q}) - e^{rq}]$$

52. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\cos \alpha x) \cos rx (e^{\sin \alpha x} + e^{-\sin \alpha x}) \frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{q} (e^{rq} + e^{-rq}) \sin(e^{-\alpha q})$$

53. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2 \cos \alpha x) \cos(rx) \frac{dx}{q^2+x^2} =$$

$$= \frac{2\pi e^{-\alpha q}}{q} (e^{rq} + e^{-rq}) \Big[\left(\frac{1}{1!}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3!}\right)^2 \left(3 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5!}\right)^2 \left(5 - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$

$$- e^{-2\alpha q} \left(\left(\frac{1}{1!}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{2.3} + \left(\frac{1}{3!}\right)^2 \left(3 - \frac{1}{6}\right) \frac{1}{4.5} + \left(\frac{1}{5!}\right)^2 \left(5 - \frac{1}{8}\right) \frac{1}{6.7} + \ldots \right)$$

$$+ e^{-4\alpha q} \left(\left(\frac{1}{1!}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right) \frac{1}{2.3.4.5} + \left(\frac{1}{3!}\right)^2 \left(3 - \frac{1}{8}\right) \frac{1}{4.5.6.7} + \left(\frac{1}{5!}\right)^2 \left(5 - \frac{1}{10}\right) \frac{1}{6.7.8.9} + \ldots \right)$$

$$- \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \Big]$$

54. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\cos \alpha x) \sin rx (e^{\sin \alpha x} + e^{-\sin \alpha x}) \frac{x dx}{q^2+x^2} = \pi (e^{-rq} - e^{rq}) \left(1 + \cos(e^{-\alpha q})\right)$$

55. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\cos \alpha x) \sin rx (e^{\sin \alpha x} + e^{-\sin \alpha x}) \frac{x dx}{q^2+x^2} = \pi \sin(e^{-\alpha q})(e^{-rq} - e^{rq})$$

$$56.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\cos rx)\sin rx \frac{x\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$= \pi e^{-aq}(e^{-rq}-e^{rq})\Big[\Big(\frac{1}{1!}\Big)^2\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{3!}\Big)^2\Big(3-\frac{1}{4}\Big)+\Big(\frac{1}{5!}\Big)^2\Big(5-\frac{1}{6}\Big)+\dots$$

$$-e^{-2aq}\Big(\Big(\frac{1}{1!}\Big)^2\Big(1-\frac{1}{4}\Big)\frac{1}{2.3}+\Big(\frac{1}{3!}\Big)^2\Big(3-\frac{1}{6}\Big)\frac{1}{4.5}+\Big(\frac{1}{5!}\Big)^2\Big(5-\frac{1}{8}\Big)\frac{1}{6.7}+\dots\Big)$$

$$+e^{-4aq}\Big(\Big(\frac{1}{1!}\Big)^2\Big(1-\frac{1}{6}\Big)\frac{1}{3.4.5.6}+\Big(\frac{1}{3!}\Big)^2\Big(3-\frac{1}{8}\Big)\frac{1}{4.5.6.7}+\Big(\frac{1}{5!}\Big)^2\Big(5-\frac{1}{10}\Big)\frac{1}{6.7.8.9}+\dots\Big)$$

$$-\dots\dots\dots\dots\dots\dots\Big]$$

$$57.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\cos \alpha x)\cos rx(e^{\sin \alpha x}-e^{-\sin \alpha x})\frac{x\,dx}{q^2+x^2} = \pi e^{-rq}[\cos(e^{aq})-\cos(e^{-aq})]$$

$$58.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\cos \alpha x)\cos rx(e^{\sin \alpha x}-e^{-\sin \alpha x})\frac{x\,dx}{q^2+x^2} = \pi e^{-rq}[\sin(e^{-aq})-\sin(e^{aq})]$$

59. $$\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{2\sin\alpha x} - e^{-2\sin\alpha x}) \cos rx \frac{x\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$= 2\pi e^{-rq}\Big[(e^{\alpha q} - e^{-\alpha q})\Big(\Big(\frac{1}{1!}\Big)^2\Big(1+\frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{3!}\Big)^2\Big(3+\frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5!}\Big)^2\Big(5+\frac{1}{6}\Big) + \dots\Big)$$

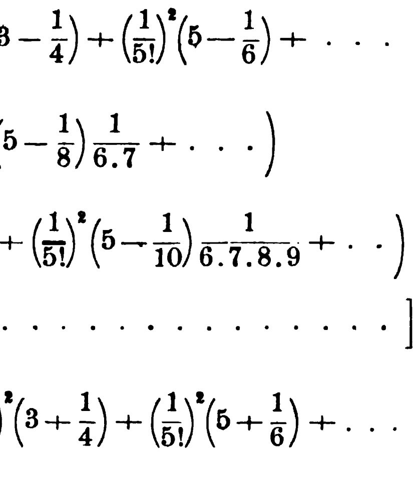
$$- (e^{3\alpha q} - e^{-3\alpha q})\Big(\Big(\frac{1}{1!}\Big)^2\Big(1+\frac{1}{4}\Big)\frac{1}{2.3} + \Big(\frac{1}{3!}\Big)^2\Big(3+\frac{1}{6}\Big)\frac{1}{4.5} + \Big(\frac{1}{5!}\Big)^2\Big(5+\frac{1}{8}\Big)\frac{1}{6.7} + \dots\Big)$$

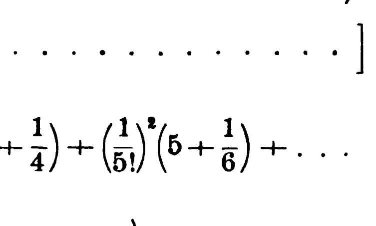
$$+ (e^{5\alpha q} - e^{-5\alpha q})\Big(\Big(\frac{1}{1!}\Big)^2\Big(1+\frac{1}{6}\Big)\frac{1}{2.3.4.5} + \Big(\frac{1}{3!}\Big)^2\Big(3+\frac{1}{8}\Big)\frac{1}{4.5.6.7} + \Big(\frac{1}{5!}\Big)^2\Big(5+\frac{1}{10}\Big)\frac{1}{6.7.8.9} + \dots\Big)$$

$$- \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\Big]$$

60. $$\int_0^\infty \sin(\cos\alpha x)(e^{\sin\alpha x} + e^{-\sin\alpha x}) e^{-\frac{x}{\omega}} . x^{p-1} . dx = \frac{2\Gamma(p)\cos\frac{1}{2}p\pi}{\alpha^p}\Big[1 - \frac{1}{3!3^p} + \frac{1}{5!5^p} - \frac{1}{7!7^p} + \dots\Big]$$

61. $$\int_0^\infty \cos(\cos\alpha x)(e^{\sin\alpha x} - e^{-\sin\alpha x}) e^{-\frac{x}{\omega}} . x^{p-1} . dx = \frac{2\Gamma(p)\sin\frac{1}{2}p\pi}{\alpha^p}\Big[1 - \frac{1}{3!3^p} + \frac{1}{5!5^p} - \frac{1}{7!7^p} + \dots\Big]$$





62. $$\int_0^\infty \sin(2\cos\alpha x).e^{-\frac{x}{\omega}}.x^{p-1}.dx = \frac{2\Gamma(p)\cos\frac{1}{2}p\pi}{\alpha^p}\Big[\left(\frac{1}{1!}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3!}\right)^2\left(3-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5!}\right)^2\left(5-\frac{1}{6}\right)+\dots$$

$$+\frac{1}{3^p}\left(\left(\frac{1}{1!}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2.3}+\left(\frac{1}{3!}\right)^2\left(3-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{4.5}+\left(\frac{1}{5!}\right)^2\left(5-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{6.7}+\dots\right)$$

$$+\frac{1}{5^p}\left(\left(\frac{1}{1!}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{2.3.4.5}+\left(\frac{1}{3!}\right)^2\left(3-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{4.5.6.7}+\left(\frac{1}{5!}\right)^2\left(5-\frac{1}{10}\right)\frac{1}{6.7.8.9}+\dots\right)$$

$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\Big]$$

63. $$\int_0^\infty (e^{2\sin\alpha x}-e^{-2\sin\alpha x})e^{-\frac{x}{\omega}}x^{p-1}.dx = \frac{4\Gamma(p)\sin\frac{1}{2}p\pi}{\alpha^p}\Big[\left(\frac{1}{1!}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3!}\right)^2\left(3+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5!}\right)^2\left(5+\frac{1}{6}\right)+\dots$$

$$+\frac{1}{3^p}\left(\left(\frac{1}{1!}\right)^2\left(1+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2.3}+\left(\frac{1}{3!}\right)^2\left(3+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{4.5}+\left(\frac{1}{5!}\right)^2\left(5+\frac{1}{8}\right)\frac{1}{6.7}+\dots\right)$$

$$+\frac{1}{5^p}\left(\left(\frac{1}{1!}\right)^2\left(1+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{2.3.4.5}+\left(\frac{1}{3!}\right)^2\left(3+\frac{1}{8}\right)\frac{1}{4.5.6.7}+\left(\frac{1}{5!}\right)^2\left(5+\frac{1}{10}\right)\frac{1}{6.7.8.9}+\dots\right)$$

$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\Big]$$

64. $$\int_0^{2\pi} [e^{\sin ax} . \cos(\cos ax - nax) + e^{-\sin ax} . \cos(\cos ax + nax)]dx =$$

$$\int_0^{2\pi} [e^{-\sin ax} . \sin(\cos ax + nax) - e^{\sin ax} \sin(\cos ax - nax)]dx = 0 \text{ [wenn } n \text{ ungerade ist]}; \quad = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\pi}{n!}$$

[wenn n gerade ist]

65. $$\int_0^{2\pi} [e^{\sin ax} . \sin(\cos ax - nax) + e^{-\sin ax} . \sin(\cos ax + nax)]dx =$$

$$\int_0^{2\pi} [e^{-\sin ax} . \cos(\cos ax + nax) - e^{\sin ax}(\cos ax - nax)]dx = 0 \text{ [wenn } n \text{ gerade ist]}; \quad = (-1^{\frac{n+1}{2}} \frac{\pi}{n!}$$

[wenn u ungerade ist]

66. $$\int_0^{2\pi} [2 \sin(2 \cos ax) \cos nax + \sin nax(e^{2 \sin ax} - e^{-2 \sin ax})]dx = 0 \text{ [wenn } n \text{ gerade ist]};$$

$$= 4(-1)^{\frac{n-1}{2}} \pi \left[\left(\frac{1}{1!}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{2.3\ldots n} + \left(\frac{1}{3!}\right)^2 \left(3 - \frac{1}{n+3}\right) \frac{1}{4.5..\overline{n+2}} + \ldots\right]$$

[wenn n ungerade ist]

67. $$\int_0^{2\pi}[2\sin(\cos\alpha x)\sin n\alpha x - \cos n\alpha x(e^{2\sin\alpha x} - e^{-2\sin\alpha x})]dx = 0 \text{ [wenn } n \text{ gerade ist]}$$

$$= 4(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi\left[\left(\frac{1}{1!}\right)^2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2.3..n}\left(\frac{1}{3!}\right)^2\left(3+\frac{1}{n+3}\right)\frac{1}{4.5..\overline{n+2}}+\ldots\right] \text{ [wenn } n \text{ ungerade ist]}$$

II. Es sei:

68. $$\varphi(\rho) = e^\rho = 1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \ldots$$

69. $$\psi(\rho) = e^{-\rho} = 1 - \rho + \frac{\rho^2}{2!} - \frac{\rho^3}{3!} + \ldots$$

so ist:

70. $$\varphi(e^{\alpha xi}) = e^{e^{\alpha xi}} = e^{\cos\alpha x}\big(\cos(\sin\alpha x) + i\sin(\sin\alpha x)\big)$$

71. $$\psi(e^{-\alpha xi}) = e^{-e^{-\alpha xi}} = e^{\cos\alpha x}\big(\cos(\sin\alpha x) + i\sin(\sin\alpha x)\big)$$

Unsere Formeln liefern daher folgende bestimmte Integrale:

72. $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\cos\alpha x - q^2x^2}.\cos(\sin\alpha x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1 + e^{-\frac{\alpha^2}{4q^2}} + \frac{e^{-\frac{4\alpha^2}{4q^2}}}{2!} + \frac{e^{-\frac{9\alpha^2}{4q^2}}}{3!} + \ldots\right]$$

$$73.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\cos \alpha x + q^2x^2)} . \cos (\sin \alpha x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q} \left[1 - e^{-\frac{\alpha^2}{4q^2}} + \frac{e^{-\frac{4\alpha^2}{4q^2}}}{2!} - \frac{e^{-\frac{9\alpha^2}{4q^2}}}{3!} + \ldots \right]$$

$$74.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos (2 \sin \alpha x) . e^{-q^2x^2} . dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q} \left[\left(\frac{1}{2!}\right)^2 - \left(\frac{1}{3!}\right)^2 + \left(\frac{1}{4!}\right)^2 - \ldots \right.$$

$$+ 2e^{-\frac{\alpha^2}{q^2}} \left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{1!}\right)^2 + \frac{1}{3.4}\left(\frac{1}{2!}\right)^2 - \frac{1}{4.5}\left(\frac{1}{3!}\right)^2 + \ldots \right]$$

$$+ 2e^{-\frac{4\alpha^2}{q^2}} \left[\frac{1}{1.2.3.4} - \frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{1}{1!}\right)^2 + \frac{1}{3.4.5.6}\left(\frac{1}{2!}\right)^2 - \frac{1}{4.5.6.7}\left(\frac{1}{3!}\right)^2 + \ldots \right]$$

$$\left. + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right]$$

$$75.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\cos \alpha x} \sin (\sin \alpha x) \sin rx \frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2q} (e^{rq} - e^{-rq})(e^{e^{-\alpha q}} - 1)$$

$$76.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\cos \alpha x} \sin (\sin \alpha x) \sin rx \frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2q} (e^{rq} - e^{-rq})(1 - e^{-e^{-\alpha q}})$$

$$77.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\sin\alpha x)\sin rx\,\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi e^{-\alpha q}}{q}(e^{rq}-e^{-rq})\Big[1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1!}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2!}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3!}\right)^2+\ldots$$

$$+e^{-2\alpha q}\left[\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}\left(\frac{1}{1!}\right)^2+\frac{1}{3.4.5}\left(\frac{1}{2!}\right)^2-\frac{1}{4.5.6}\left(\frac{1}{3!}\right)^2+\ldots\right]$$

$$+e^{-4\alpha q}\left[\frac{1}{1.2.3.4.5}-\frac{1}{2.3.4.5.6}\left(\frac{1}{1!}\right)^2+\frac{1}{3.4.5.6.7}\left(\frac{1}{2!}\right)^2-\frac{1}{4.5.6.7.8}\left(\frac{1}{3!}\right)^2+\ldots\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]$$

$$78.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\cos\alpha x}\cos(\sin\alpha x)\cos rx\,\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi e^{e^{-\alpha q}}}{q}(e^{rq}+e^{-rq})-\frac{\pi}{q}e^{rq}$$

$$79.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\cos\alpha x}\cos(\sin\alpha x)\cos rx\,\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi e^{-e^{-\alpha q}}}{q}(e^{rq}+e^{-rq})-\frac{\pi}{q}e^{-rq}$$

$$80.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\sin\alpha x)\cos rx\,\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{2e^{-2\alpha q}\pi}{q}(e^{rq}+e^{-rq})\Big[\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{1!}\right)^2+\frac{1}{3.4}\left(\frac{1}{2!}\right)^2-\frac{1}{4.5}\left(\frac{1}{3!}\right)^2+\ldots$$

$$+e^{-2\alpha q}\left[\frac{1}{1.2.3.4}-\frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{1}{1!}\right)^2+\frac{1}{3.4.5.6}\left(\frac{1}{2!}\right)^2-\frac{1}{4.5.6.7}\left(\frac{1}{3!}\right)^2+\ldots\right]$$

$$+e^{-4\alpha q}\left[\frac{1}{1.2.3.4.5.6}-\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{1}{1!}\right)^2+\frac{1}{3.4.5.6.7.8}\left(\frac{1}{2!}\right)^2-\frac{1}{4.5.6.7.8.9}\left(\frac{1}{3!}\right)^2+\ldots\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]$$

$$+\frac{2\pi}{q}e^{-rq}\left[\left(\frac{1}{2!}\right)^2-\left(\frac{1}{3!}\right)^2+\left(\frac{1}{4!}\right)^2-\ldots\right]$$

81. $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\cos ax}.\cos(\sin ax)\sin rx\,\frac{xdx}{q^2+x^2}=\frac{\pi}{2}(e^{-rq}-e^{rq})(e^{e^{-aq}}+1)$$

82. $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\cos ax}.\cos(\sin ax).\sin rx\,\frac{xdx}{q^2+x^2}=\frac{\pi}{2}(e^{-rq}-e^{rq})(e^{-e^{-aq}}+1)$$

83. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(2\sin ax).\sin rx.\frac{xdx}{q^2+x^2}=\pi e^{-2aq}(e^{-rq}-e^{rq})\Big[\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{1!}\right)^2+\frac{1}{3.4}\left(\frac{1}{2!}\right)^2-\frac{1}{4.5}\left(\frac{1}{3!}\right)^2+\dots$$
$$+e^{-2aq}\left[\frac{1}{1.2.3.4}-\frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{1}{1!}\right)^2+\frac{1}{3.4.5.6}\left(\frac{1}{2!}\right)^2-\frac{1}{4.5.6.7}\left(\frac{1}{3!}\right)^2+\dots\right]$$
$$+e^{-4aq}\left[\frac{1}{1.2.3.4.5.6}-\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{1}{1!}\right)^2+\frac{1}{3.4.5.6.7.8}\left(\frac{1}{2!}\right)^2-\frac{1}{4.5.6.7.8.9}\left(\frac{1}{3!}\right)^2+\dots\right]$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\Big]$$

84. $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\cos ax}\sin(\sin ax)\sin rx\,.\,\frac{xdx}{q^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{2}e^{-rq}[e^{e^{-aq}}-e^{e^{aq}}]$$

85. $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\cos ax}\sin(\sin ax)\sin rx\,\frac{xdx}{q^2+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-rq}[e^{-e^{-aq}}-e^{-e^{aq}}]$$

$$86.\ \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\sin\alpha x)\sin rx \frac{x\,dx}{q^2+x^2} = \pi e^{-rq}\Big[\Big[1-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1!}\Big)^2+\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2!}\Big)^2-\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{3!}\Big)^2+\ldots\Big](e^{-\alpha q}-e^{\alpha q})$$

$$+\Big[\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}\Big(\frac{1}{1!}\Big)^2+\frac{1}{3.4.5}\Big(\frac{1}{2!}\Big)\frac{1}{4.5.6}\Big(\frac{1}{3!}\Big)^2+\ldots\Big](e^{-3\alpha q}-e^{3\alpha q})$$

$$+\Big[\frac{1}{1.2.3.4.5}-\frac{1}{2.3.4.5.6}\Big(\frac{1}{1!}\Big)^2+\frac{1}{3.4.5.6.7}\Big(\frac{1}{2!}\Big)^2+\frac{1}{4.5.6.7.8}\Big(\frac{1}{3!}\Big)^2+\ldots\Big](e^{-5\alpha q}-e^{5\alpha q})$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]$$

$$+2\pi e^{-rq}\Big[\Big(\frac{1}{2!}\Big)^2-\Big(\frac{1}{3!}\Big)^2+\Big(\frac{1}{4!}\Big)^2-\ldots\ldots\Big]$$

$$87.\ \int_0^{2\pi} e^{\cos\alpha x}\cos(\sin\alpha x+n\alpha x)dx = \int_0^{2\pi} e^{\cos\alpha x}\sin(\sin\alpha x+n\alpha x)dx = \frac{\pi}{n!}$$

$$88.\ \int_0^{2\pi} e^{-\cos\alpha x}\cos(\sin\alpha x+n\alpha x)dx = \int_0^{2\pi} e^{-\cos\alpha x}\sin(\sin\alpha x+n\alpha x)dx = (-1)^n\frac{\pi}{n!}$$

$$89.\ \int_0^{2\pi}\cos(2\sin\alpha x+n\alpha x).dx = 0\ [\text{wenn } n \text{ ungerade ist}]$$

$$= 2\pi\Big[\frac{1}{1.2\ldots n}-\frac{1}{2.3..\overline{n+1}}\Big(\frac{1}{1!}\Big)^2+\frac{1}{3.4..\overline{n+2}}\Big(\frac{1}{2!}\Big)^2-\frac{1}{4.5..\overline{n+3}}\Big(\frac{1}{3!}\Big)^2+\ldots\Big]$$

[wenn n gerade ist]

90. $\int_0^{2\pi} \sin(2\sin\alpha x + n\alpha x).d\alpha = 0$ [wenn n gerade ist]

$$= 2\pi\left[\frac{1}{1.2..n} - \frac{1}{2.3..\overline{n+1}}\left(\frac{1}{1!}\right)^2 + \frac{1}{3.4..\overline{n+2}}\left(\frac{1}{2!}\right)^2 - \frac{1}{4.5..\overline{n+3}}\left(\frac{1}{3!}\right)^2 + \ldots\right]$$

[wenn n ungerade ist]

III. Es sei:

91. $\varphi(\rho) = \frac{1}{1+a\rho} = 1 - a\rho + a^2\rho^2 - a^3\rho^3 + \ldots$

92. $\psi(\rho) = \frac{1}{1-a\rho} = 1 + a\rho + a^2\rho^2 + a^3\rho^3 + \ldots$

so ist:

93. $\varphi(e^{\alpha x i}) = \frac{1}{1+ae^{\alpha x i}} = \frac{1 + a\cos\alpha x - ia\sin\alpha x}{1 + 2a\cos\alpha x + a^2}$

94. $\psi(e^{-\alpha x i}) = \frac{1}{1-ae^{-\alpha x i}} = \frac{1 - a\cos\alpha x + ia\sin\alpha x}{1 - 2a\cos\alpha x + a^2}$

Unsere Formeln liefern daher folgende bestimmte Integrale:

95. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + a\cos\alpha x}{1+2a\cos\alpha x+a^2} e^{-q^2x^2}.dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q}\left[1 - ae^{-\frac{\alpha^2}{4q^2}} + a^2e^{-\frac{4\alpha^2}{4q^2}} - a^3e^{-\frac{9\alpha^2}{4q^2}} + \ldots\right]$

$$96.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-a\cos\alpha x}{1-2a\cos\alpha x+a^2}\, e^{-q^2x^2}.\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q}\left[1+ae^{-\frac{\alpha^2}{4q^2}}+a^2e^{-\frac{4\alpha^2}{4q^2}}+a^3e^{-\frac{9\alpha^2}{4q^2}}+\ldots\right]$$

$$97.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-q^2x^2}.\,dx}{(1+a^2)^2-4a^2\cos^2\alpha x} = \frac{\sqrt{\pi}}{q}\cdot\frac{1}{1-a^4}\left[1+2a^2e^{-\frac{\alpha^2}{q^2}}\left(1+a^2e^{-\frac{3\alpha^2}{q^2}}+a^4e^{-\frac{8\alpha^2}{q^2}}+\ldots\right)\right]$$

$$98.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x.\sin rx}{1+a^2+2a\cos\alpha x}\cdot\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2q}\left(e^{+rq}-e^{-rq}\right)\frac{e^{-\alpha q}}{1+ae^{-\alpha q}}$$

$$99.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\alpha x.\sin rx}{(1+a^2)^2-4a^2\cos^2\alpha x}\,\frac{dx}{d^2+x^2} = \frac{\pi}{aq(1+a^2)}\cdot\frac{e^{\alpha q}(e^{rq}-e^{-rq})}{a^2-e^{2\alpha q}}$$

$$100.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+a\cos\alpha x}{1+2a\cos\alpha x+a^2}\,\frac{\cos rx.\,dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{q}\cdot\frac{(e^{rq}+e^{-rq})}{(1+ae^{-\alpha q})}-\frac{\pi}{q}e^{rq}$$

$$101.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+a\cos\alpha x}{1+2a\cos\alpha x+a^2}\,\frac{\sin rx.\,x.\,dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\left(e^{-rq}-e^{rq}\right)\cdot\frac{2+ae^{-\alpha q}}{1+ae^{-\alpha q}}$$

$$102.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos rx}{(1+a^2)^2 - 4a^2 \cos^2 \alpha x} \, \frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{2a^2\pi}{q^{(1-a^4)}} \cdot \frac{e^{qr}+e^{-qr}}{e^{2\alpha q} - a^2} - \frac{\pi e^{qr}}{q^{(1-a^4)}}$$

$$103.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin rx}{(1+a^2)^2 - 4a^2 \cos^2 \alpha x} \, \frac{x dx}{q^2+x^2} = \frac{a^2\pi}{1-a^4} \cdot \frac{e^{-rq}-e^{rq}}{e^{2\alpha q} - a^2} + \frac{\pi e^{-rq}}{1-a^4}$$

$$104.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \, . \cos rx}{1+2a \cos \alpha x + a^2} \, \frac{x dx}{q^2+x^2} = \frac{a\pi e^{-rq}(e^{\alpha q} - e^{-\alpha q})}{2[1+a^2+a(e^{\alpha q}+e^{-\alpha q})]}$$

$$105.\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\alpha x \, . \cos rx}{(1+a^2)^2 - 4a^2 \cos^2 \alpha x} \, \frac{x dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi e^{-rq}}{a(1+a^2)} [e^{\alpha q} - e^{-\alpha q} + a^2(e^{3\alpha q} - e^{-3\alpha q}) + a^4(e^{5\alpha q} - e^{-5\alpha q}) + \ldots]$$

$$106.\quad \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos n\alpha + a \cos (n+1)}{1+2a \cos \alpha x + a^2} \alpha x = (-1)^n \pi a^n$$

$$107.\quad \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos n\alpha x - a^2 \cos (n-2) \alpha x}{(1+a^2)^2 - 4a^2 \cos^2 \alpha x} = 0 \text{ [wenn } n \text{ ungerade ist]}$$

$$= \frac{2\pi a^n}{1+a^2} \text{ [wenn } n \text{ gerade ist]}$$

108. $$\int_0^{2\pi} \frac{\sin n\alpha x - a^2 \sin (n+2)\alpha x}{(1+a^2)^2 - 4a^2 \cos^2 \alpha x}\, dx = 0 \text{ [wenn } n \text{ gerade ist]}$$
$$= -\frac{2\pi a^n}{1+a^2} \text{ [wenn } n \text{ ungerade ist].}$$

Diese Beispiele mögen zur Erläuterung der entwickelten Formeln genügen. Schliesslich wollen wir noch erwähnen, dass die entwickelten Werthe natürlich nur so lange giltig sind, als die unendlichen Reihen auf der rechten Seite convergiren. Die Convergenzbedingungen für dieselben aufzustellen, unterliegt keinerlei Schwierigkeit.

XXVIII. SITZUNG VOM 14. DECEMBER 1871.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Beiträge zur graphischen Bestimmung des Durchschnittes von Geraden mit Kegelschnittslinien", vom Herrn Em. Koutny, Professor an der technischen Hochschule in Graz.

„Über das Problem der Glanzpunkte", vom Herrn Karl Pelz, Assistenten der descriptiven Geometrie am k. deutschen Polytechnicum zu Prag.

Herr Prof. Dr. Th. Ritt. v. Oppolzer legt eine Abhandlung „über den in Verlust gerathenen Planeten (91) Ägina" vor.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift. 9. Jahrgang, Nr. 35. Wien, 1871; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1869 (Bd. 78. 21). Altona, 1871; 4°.

Basel, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1870/71. 4° & 8°.

Breslau, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1870/71. 4° & 8°.

Cox, E. T., First Annual Report of the Geological Survey of Indiana, made during the Year 1869. With Maps and colored Section. Indianopolis, 1869; 8°.

Deby, Julien, Notice sur la chaleur réelle ou effective considérée comme un mode de la force dans son application à la théorie des machines à vapeur. Bruxelles, 1870; 8°.

Gesellschaft, geographische, in Wien: Mittheilungen. N. F. 4. 1871, Nr. 11. Wien; 8°.

— Österr., für Meteorologie: Zeitschrift. VI. Band, Nr. 23. Wien, 1871; 4°.

Gesellschaft der Wissenschaften, K. Sächsische, zu Leipzig: Abhandlungen der philolog.-histor. Classe. V. Band, Nr. 6—7 (1870); Abhandlungen der mathem.-phys. Classe. IX. Band. Nr. 4—5 (1870). 4°. — Berichte der phil.-hist. Classe. 1867, I; 1868, II—III.; 1869, I—III.; Berichte der math.-phys. Classe. 1869, II—IV; 1870, I—II. 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXII. Jahrgang, Nr. 49—50. Wien, 1871; 4°.

Halle, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1870. 4° & 8°.

Hammerschmied, Johann, Die Physik auf Grundlage einer rationellen Molecular- und Äthertheorie zur Erklärung sämmtlicher Natur-Erscheinungen. Wien, 1872; 8°.

Hinrichs, Gustavus, Contributions to Molecular Science, or Atomechanics. Salem, 1870; 8°. — The School Laboratory of Physical Science. Vol. I, Nr. 2. Iowa City, 1871; 8°. — The American Scientific Monthly. Juli—December, 1870. Davenport & Iowa City, 1870; 8°. — The Principles of Pure Crystallography; a Lecture-Guide. Davenport, 1871; 8°. — Report of the Committee on Building Stone etc. 1871. Des Moines, 1871; 8°.

Jahrbuch, Neues, für Pharmacie und verwandte Fächer, von F. Vorwerk. Band XXXVI, Heft 4. Speyer, 1871; 8°.

Landbote, Der steirische: 4. Jahrgang, Nr. 25. Graz, 1871; 4°.

Lyceum of Natural History of New York: Annals. Vol. IX, Sign. 21—26. 8°.

Magazijn voor Landbouw en Kruidkunde. Derde reeks. I. deel, 5°—12° aflev. 1870—71; II. deel, 1°—3° aflev. Utrecht, 1871; 8°.

Museum of Comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass.: Bulletin. Vol. II, Nrs. 1—3. Cambridge; 8°. — Illustrated Catalogue. Nr. III. Cambridge, 1870; 4°.

Nature. Nr. 110, Vol. V. London, 1871; 4°.

Neubegründung, Die —, der Strassburger Bibliothek und die Göthe-Feier am 9. August 1871. Strassburg, 1871; 8°.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXI. Band, Jahrgang 1871, October-Heft; Wien; 8°.

Reslhuber, Augustin, Resultate aus den im Jahre 1869 auf der Sternwarte zu Kremsmünster angestellten meteorologischen Beobachtungen. Linz, 1872; 8°.

„Revue politique et littéraire", et „La Revue scientifique de la France et de létranger." I[re] Année, (2[e] Série) Nrs. 23—24. Paris & Bruxelles, 1871; 4°.

Siebold, C. Th. E. v., Beiträge zur Parthenogenesis der Arthropoden. Leipzig, 1871; 8°.

Sociedad Mexicana de historia natural: La Naturaleza. Entrega 13[a]—18[a] (Junio—Noviembre de 1870). Mexico; 4°.

Society, The Boston, of Natural History: Memoirs. Vol. II, Part 1. 1871. — Proceedings. Vol. XIII. Sign. 15—23. April to December, 1870. 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXI. Jahrgang, Nr. 49. Wien, 1871; 4°.

Würzburg, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus den Jahren 1869—1871. 4° & 8°.

Zeitschrift für Chemie, von Beilstein, Fittig & Hübner. XIV. Jahrgang. N. F. VII. Band, 12. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

— des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereines. XXIII. Jahrgang, 15. Heft. Wien, 1871; 4°.

Über das Problem der Glanzpunkte.

Von **Carl Pelz,**

Assistenten der descriptiven Geometrie am k. deutschen Polytechnicum in Prag.

(Mit 2 Tafeln.)

Das Problem der Glanzpunkte bei beliebiger Lage der Lichtquelle und des Auges ist eines von jenen Problemen der beschreibenden Geometrie, welche auch das Interesse der Geometer überhaupt herausfordern.

Wenn sich in einem von zwei in der Ebene einer Curve C liegenden Punkten F, F' die Lichtquelle und im anderen das Auge des Beobachters befindet, und man soll für die Curve C die Glanzpunkte construiren, d. h. also jene Punkte, in welchen das von der Quelle kommende Licht direct ins Auge reflectirt wird, so kommt es offenbar nur darauf an, jene Kegelschnitte zu finden, welche F, F' zu Brennpunkten besitzen und die gegebene Curve C berühren.

Wenn auch alle von den Berührungspunkten dieser Kegelschnitte nicht den physikalischen Anforderungen des Problemes Genüge leisten, so haben sie doch alle die Eigenschaft, dass die Winkel, welche die von F, F' nach einem solchen Berührungspunkte gehenden Strahlen mit der zugehörigen Tangente der Curve C einschliessen, einander gleich sind. Die zuletzt ausgesprochene Bedingung der Winkelgleichheit ist jedoch die geometrische Bedingung für das Auftreten eines Glanzpunktes.

Wir wollen uns nur mit den Curven zweiten Grades beschäftigen und hiebei die Lösung des besagten Problems mit den möglichst einfachen Mitteln der constructiven Geometrie durchzuführen trachten. Wenn wir eine Untersuchung des vielleicht schon öfters behandelten Problems für den Kreis vorausschicken, so dürfte es vollkommen gerechtfertigt sein, da sich bisher nir-

gends die, die Lösung liefernde geometrische Construction mit dem Minimum der constructiven Hilfsmittel durchgeführt vorfindet.

I. Der Kreis.

Es sei (Fig. 1, Taf. I) *K* der Kreis mit dem Mittelpunkt *o*, *F* und *F'* das Auge und die Lichtquelle und *U* einer von den, den Kreis berührenden Kegelschnitten, welche *F* und *F'* zu Brennpunkten haben, und es sei *b* der Berührungspunkt von *K* und *U*, so dass beide Curven in *b* die gemeinschaftliche Tangente *T* und die gemeinschaftliche (durch *o* gehende) Normale *N* besitzen. Wenn wir den Pol *n* von *N* bezüglich *U* construiren, so ist offenbar, dass die von *n* auf *N* gefällte Senkrechte die Tangente *T* selbst ist.

Dieser einfache Zusammenhang in der Figur (1) ist nun geeignet, uns zu folgender Lösung des gestellten Problemes zu führen. Denkt man sich am Punkte *o* ein Strahlenbüschel (*G*) und construirt dessen Polreihe (*g*), so umhüllen bekanntlich die Senkrechten (*G'*), welche man von dem jeweiligen Pole *g* auf die entsprechenden Polare *G* fällen kann, eine Parabel *P*[1]), und es ist klar, dass *T* eine von den Parabeltangenten ist, welche gleichzeitig den Kreis *K* berührt.

Wenn man für die durch *o* gehende Polare *G* jene Lagen annimmt, in welchen sie zu beiden Axen von *U* senkrecht steht, und jene, in denen sie die Winkel *FoF'*, (180—*FoF'*) halbirt, so erkennt man sogleich, dass die Parabel *P* die beiden Axen von *U* und die Winkelhalbirenden von *FoF'* zu Tangenten hat, und dass sie also schon durch die drei Punkte *F*, *F'*, *o* vollkommen fixirt und von *U* selbst durchaus unabhängig ist[2]). Und nun ergibt sich uns als Lösung des gestellten Problems Folgendes: „Die Berührungspunkte der vier, dem Kreise *K* und der Parabel *P* gemeinsamen Tangenten (*T*) sind die gesuchten Glanzpunkte“.

---

[1] Siehe J. Steiner „Systematische Entwickelung“. §. 60. p. 302.

[2] Denn zwei Parabeln, welche vier Tangenten im Endlichen gemein haben, sind identisch.

Denn diese Punkte (b) sind nach dem über Fig. (1) Gesagten in der That die Berührungspunkte von Kegelschnitten (U), welche FF' zu Brennpunkten haben, mit dem Kreise K. Zur Bestimmung der Parabel P haben wir somit die folgenden vier Tangenten, erstens die beiden Halbirungslinien H, H' des Winkels FoF', dann die Geraden A, A' (Axen von U) von denen A die Verbindungslinie der Punkte F, F' ist, und A' im Halbirungspunkte c von F, F' auf dieser Linie senkrecht steht. Da $A \perp A'$ und $H \perp H'$, so ist nach bekannten Sätzen über die Parabel die Gerade oc die Directrix D derselben, und ihr Brennpunkt f kann als Schnittpunkt der Geraden $(\overline{AH})$ $(\overline{A'H'})$ und $(\overline{AH'})$ $(\overline{A'H})$ erhalten werden.

Da das Bestimmen der dem Kreise K und der Parabel P gemeinschaftlichen Tangenten T, wie überhaupt das Construiren gemeinschaftlicher Tangenten zweier Curven, nicht so vortheilhaft geschehen kann, wie das Bestimmen gemeinschaftlicher Schnittpunkte zweier Curven, so werden wir unser Problem darauf zurückführen, die vier Schnittpunkte des Kreises K mit einem zu zeichnenden Hilfskegelschnitt (der sich uns als gleichseitige Hyperbel präsentiren wird) zu finden.

Zu dem Zwecke brauchen wir blos die Polarcurve der Parabel P in Bezug auf den Kreis K zu construiren, denn diese schneidet nothwendiger Weise den letzteren in den vier Berührungspunkten der Tangenten (T), d. h. in den gesuchten Glanzpunkten. Diese Polarfigur ist jedoch eine gleichseitige Hyperbel Σ, da der Pol jeder von den aufeinander senkrecht stehenden Parabeltangenten H, H' unendlich weit auf der zweiten liegt. Gleichzeitig sehen wir also, dass die Geraden H, H' uns die Asymptotenrichtungen für die Hyperbel Σ liefern. Der Punkt o ist ein Hyperbelpunkt, da er der Pol der unendlich weiten Parabeltangente ist, und die Hyperbeltangente in o erhalten wir als die Polare der Axenrichtung von P, was offenbar D ist, da die Axenrichtung von P unendlich weit auf der zu D senkrecht stehenden Geraden liegt.

Auch den Mittelpunkt m der Hyperbel können wir sehr leicht bestimmen. Die Polare O von o bezüglich P erhalten wir nämlich einfach (weil o auf D liegt) als die durch f zu of senkrecht gezogene Gerade, und da uns die durch o gehenden Para-

beltangenten die Asymptotenrichtungen liefern, so wird uns der Pol von O bezüglich K den Mittelpunkt von Σ geben müssen. m ist also der zu f harmonische Punkt bezüglich des durch f gehenden Kreisdurchmessers.

Legt man nun durch m (Fig. 2) zu H, H' Parallele, so sind dies die Asymptoten der Hyperbel Σ, von der man überdies einen Punkt o nebst dessen Tangente D kennt, so dass man Σ ohne weiters lineal construiren kann.

Die vier Schnittpunkte I, II, III, IV, von K mit Σ sind die gesuchten Glanzpunkte, von denen jedoch in unserer Figur nur zwei I, III (den berührenden in F und F' Brennpunkte habenden Ellipsen entsprechend) den optischen Bedingungen des Problemes genüge leisten.

II. Glanzpunkte der Kegelschnitte im Allgemeinen.

1. Das Problem der Glanzpunkte bei Kegelschnitten unter Zugrundelegung einer beliebigen Lage der Lichtquelle und des Auges (in der Ebene des Kegelschnittes) dürfte, so viel mir bekannt, bisher noch nicht in seiner völligen Allgemeinheit behandelt worden sein. Da dieses Problem, welches eine unzerfällbare geometrische Aufgabe des sechsten Grades ist, mittelst einer leicht construirbaren und mit elementaren Mitteln behandelbaren Curve dritter Ordnung gelöst werden kann, und auch diese hier auftretende Curve selbst sehr viele interessante Eigenschaften aufweist, so erlaube ich mir im Nachfolgenden eine kurze Auseinandersetzung der Lösung des Problemes und der wichtigsten Eigenschaften der cubischen Hilfscurve mitzutheilen.

2. Sei K (Fig. 3) der gegebene feste Kegelschnitt mit den Brennpunkten F, F', und A, A' seien zwei feste Punkte, von denen einer das Auge und der andere die Lichtquelle darstellt.

Wäre g ein Glanzpunkt, so müssten die Linien Ag, $A'g$ mit der Tangente T und Normale N von K in g dieselben Winkel einschliessen. Hieraus folgt jedoch sofort dreierlei:

a) Dass die Strahlen Ag, $A'g$ von einem und demselben, mit K confocalen Kegelschnitt S' berührt werden und

b) dass Fg, $F'g$ Tangenten eines und desselben, die Punkte A, A' zu Brennpunkten besitzenden Kegelschnittes S'' sind, und schliesslich

c) dass in g der feste Kegelschnitt K von einem Kegelschnitt S berührt wird, welcher A, A' zu Brennpunkten hat.

Nach dem eben Gesagten stellen sich die Glanzpunkte (g) als Durchschnitte des festen Kegelschnittes K mit einer Hilfscurve dar, welche auf dreierlei Art (entsprechend den Ergebnissen in *a)*, *b)* respective *c)*) entstanden gedacht werden kann. Entweder legen wir an Kegelschnitte, welche mit K confocal sind, aus A und A' Tangenten und verfolgen den continuirlichen Durchschnitt derselben (a), oder wir legen aus F, F' Tangenten an die confocalen Kegelschnitte, welche A, A' zu gemeinschaftlichen Brennpunkten haben und verfolgen deren continuirlichen Durchschnitt (b), oder schliesslich wir bestimmen die vier gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte, von denen der eine F, F' und der andere A, A' zu Brennpunkten hat und verfolgen die sechs variablen Ecken des entstehenden vollständigen Vierseits.

Dass die in den drei eben aufgezählten Fällen resultirende Curve, für alle dieselbe ist, ergibt sich sehr einfach in folgender Weise: Es sei S Fig. 4 ein beliebiger Kegelschnitt mit den Brennpunkten F, F und S' ein beliebiger Kegelschnitt mit den Brennpunkten A, A', ferner seien T' T'' zwei von den vier gemeinschaftlichen Tangenten beider Kegelschnitte und m sei der Schnittpunkt von T', T''.

Dann ist m ein Punkt der Hilfscurve, welche nach der dritten von den angegebenen Erzeugungsarten entsteht. Dann sind aber bekanntlich die Winkel, welche Am, $A'm$ mit T' und T'' einschliesst, einander gleich, woraus weiter folgt, dass Am, $A'm$ gleichzeitig Tangenten eines zu S confocalen Kegelschnittes sind, und dass somit m auch ein Punkt der Curve ist, welche nach der ersten der angegebenen Erzeugungsarten entsteht. Ebenso ergibt sich aus der Gleichheit der Winkel, welche Fm, $F'm$ mit T', T einschliessen, dass die Geraden Fm, $F'm$ gleichzeitig Tangenten eines zu S' confocalen Kegelschnittes sind, und dass somit m auch ein Punkt der Curve ist, welche nach der zweiten Erzeugungsmethode entsteht. Der Punkt m gehört also allen drei Curven an, und da das eben Gesagte von jeder anderen Lage des Punktes m gilt, so ergibt sich sofort, dass wirklich nach allen drei Erzeugungsmethoden eine und dieselbe Hilfscurve entsteht.

Um die Ordnung dieser Hilfscurve zu bestimmen, untersuchen wir, wie viel von ihren Punkten auf einer beliebigen Geraden G liegen. Die Gerade G wird nun von je einem einzigen Kegelschnitt berührt, von denen der eine F, F' und der andere A, A' zu Brennpunkten hat.

Ausser der Geraden G werden diese Kegelschnitte noch drei weitere gemeinschaftliche Tangenten besitzen, welche G in drei der fraglichen Hilfscurve angehörigen Punkten schneiden. Die Curve ist daher von der dritten Ordnung, wir wollen sie somit mit C^3 bezeichnen.

3. Die cubische Hilfscurve C^3 entsteht somit auf eine der folgenden drei Arten:

1. Als Ort der Schnittpunkte der von A, A' an Kegelschnitte, welche F, F' zu Brennpunkten haben, gelegten Tangentenpaare; jeder Kegelschnitt liefert dann vier Punkte von C^3.

2. Als Ort der Schnittpunkte der von F, F' an Kegelschnitte, welche A, A' zu Brennpunkten haben, gelegten Tangentenpaare. Auch hier liefert jeder Kegelschnitt des Systems A, A' vier Punkte von C^3.

3. Als Ort der Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte, welche A, A', und jener, welche F, F' zu Brennpunkten haben. Je ein Kegelschnitt des Systems A, A' liefert mit jedem Kegelschnitte des Systems F, F' vier gemeinschaftliche Tangenten, also sechs Punkte (nämlich die Scheitel des von jenen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits) der Curve C^3.

4. Bekanntlich bilden die von einem festen Punkte an die, vier Gerade berührenden Kegelschnitte gelegten Tangentenpaare eine Involution, deren Doppelstrahlen von den beiden, durch den festen Punkt gehenden. Kegelschnitten der Reihe berührt werden. Daher bilden die von A an das System confocaler Kegelschnitte, welche F, F' zu Brennpunkten haben gelegten Tangentenpaare eine Involution, deren Doppelstrahlen auf einander senkrecht stehen. Dasselbe gilt auch von der Involution am Punkte A'. Da nun jedem Kegelschnitte des Systems (F, F') je ein Paar von Strahlen in den Involutionen (A, A') entspricht, so folgt, dass diese beiden Involutionen projectivisch sind. Diese Bemerkung liefert die nachstehende Methode der Vervollständi-

gung dieser Involutionen, welche gleichzeitig eine sehr einfache Construction der Hilfscurve C^3 angibt.

Wir legen (siehe Taf. II, Fig. 1, 2) durch die beiden Punkte A, A' einen sonst beliebigen Constructionskreis K, dieser bestimmt mit der Involution (A) eine Punktinvolution, deren Centrum unendlich weit liegt, da die rechtwinkligen Doppelstrahlen den Kreis in den Endpunkten eines Durchmessers schneiden. Ebenso ist das Centrum der auf K durch die Strahleninvolution (A') bestimmten Punktinvolution unendlich weit und zwar wieder wegen der Rechtwinkligkeit der Doppelstrahlen.

Jedes Paar der Involution (A) liefert somit eine Sehne des Kreises K, deren Richtung constant bleibt, und ebenso liefert jedes Paar der Involution (A') eine Sehne des Kreises von constanter Richtung. Da nun die beiden Involutionen (A), (A') projectivisch sind, so müssen ebenso die beiden Parallelstrahlenbüschel projectivisch sein. Diese beiden Strahlenbüschel sind jedoch überdies perspectivisch, da sich die unendlich weite Gerade als beiden gemeinschaftlicher Strahl selbst entspricht. In der That, unter den Strahlenpaaren sowohl der Involution (A) als auch der Involution (A') befindet sich (weil die Doppelstrahlen beider rechtwinkelig sind) jenes Strahlenpaar, welches durch die imaginären Kreispunkte geht. Da überdies diese Kreispunkte bekanntlich auch einen Grenzfall des confocalen Kegelschnittsystems (F, F') bilden, so sind die beiden nach ihnen gehenden Strahlenpaare der Involutionen (A), (A') einander projectivisch entsprechende, und die Verbindungslinie der beiden imaginären Kreispunkte, d. h. die unendlich weite Gerade, stellt zwei sich entsprechende Strahlen der erwähnten Parallelbüschel dar. Hiemit ist der Beweis für die Perspectivität der beiden Parallelbüschel geliefert.

Diese beiden perspectivischen Parallelbüschel werden somit eine Gerade M als perpectivischen Durchschnitt liefern, welche man mittelst der Punkte F, F' in folgender Weise erhalten kann. Die beiden Brennpunkte F, F' sind als ein Grenzfall des confocalen Systems zu betrachten, so dass also die beiden Geradenpaare AF, AF' und $A'F$, $A'F'$ einander projectivisch entsprechen.

Das erste liefert nun am Kreise K die Punkte α, β und das zweite die Punkte α', β', so dass die beiden Sehnen $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ ein-

ander projectivisch entsprechen und ihr Schnittpunkt m ein Punkt der gesuchten Geraden M ist. Die Gerade AA' wird von einem einzigen Kegelschnitte des Systemes berührt, sie gehört daher beiden diesem Kegelschnitte entsprechenden Tangentenpaaren an, so dass also die durch A' zu $\alpha\beta$ parallel gezogene Sehne projectivisch jener entspricht, welche man durch A parallel zu $\alpha'\beta'$ legen kann. Diese beiden Sehnen schneiden sich in einem neuen Punkte m' der Geraden M, so dass also diese vollkommen bestimmt ist.

Legt man nun durch einen variablen Punkt x von M Parallele zu den Sehnen $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, so erhält man zwei projectivisch entsprechende Sehnen $\gamma\delta \| \alpha\beta$, $\gamma'\delta' \| \alpha'\beta'$, so dass die Strahlen $A\gamma$, $A\delta$, den Strahlen $A'\gamma'$ $A'\delta'$ entsprechen und sich somit in Punkten der Curve C^3 schneiden. Auf diese Art lässt sich die Construction von C^3 mit Hilfe des einzigen festen Kreises K in einfachster Weise durchführen.

Diese Hilfscurve C^3 schneidet dann nach früherem den gegebenen sowie jeden anderen mit ihm confocalen Kegelschnitt in den resp. Glanzpunkten, deren Zahl, da C^3 von der dritten Ordnung ist, im allgemeinen sechs ist. Unter diesen sechs Punkten erfüllen nicht alle die physikalischen Bedingungen, da es vorkommen kann, dass nur die rückwärtige Verlängerung des reflectirten Strahles durch das Auge geht. Im geometrischen Sinne kann man selbstverständlich eine Trennung der wirklichen von den scheinbaren Glanzpunkten nicht durchführen. So sind z. B. in der Fig. 1 nur die Punkte I, II, III, V eigentliche Glanzpunkte, und in Fig. 2 nur III und IV.

5. Ohne uns auf die vielen aus der angegebenen Construction fliessenden interessanten Eigenschaften der Curve C^3 einzulassen, wollen wir in diesem Artikel nur der einfachen Tangentenconstruction Erwähnung thun.

Bei jeder der drei angeführten Erzeugungsarten der Curve C^3 treten vollständige Vierseite auf, deren sechs Scheitel, Punkte der Curve sind. Je zwei gegenüberliegende Scheitel eines solchen Vierseits müssen demnach conjugirte Punkte der Curve sein, d. h. solche Punkte, deren Tangenten sich ebenfalls in einem Punkte der Curve schneiden. Nehmen wir z. B. an, das zu einem Kegelschnitte der Schaar (FF) (Fig. 5, Taf. I) gehörige, von den

aus AA' an den Kegelschnitt gelegten Tangentenpaaren gebildete Vierseit habe die Punkte CC' zu Gegenecken. Wir zeigen nun zunächst, dass dieselbe Curve C^3 entsteht, wenn man den Punkten F, F' die Punkte C, C' substituirt. In der That geht diese zweite Curve durch alle sechs Ecken des Vierseits $CAC'A'$, ferner auch durch die imaginären Brennpunkte des Systems (AA') und schliesslich durch die imaginären Kreispunkte, und hat somit mit C^3 zehn Punkte gemeinschaftlich, d. h. ist mit C^3 identisch. Wenn wir aber zeigen können, dass FF' oder was (der Äquivalenz der angeführten Erzeugungsmethoden wegen) dasselbe ist, dass AA' zwei conjugirte Punkte sind, so gilt das ebenso von CC' und überhaupt von jedem Gegeneckenpaare der auftretenden vollständigen Vierseite.

Betrachtet man nun jenen Kegelschnitt Σ (Fig. 6), welcher FF' zu Brennpunkten hat und AA' berührt, so fallen von dem zugehörigen vollständigen Tangentenvierseit zwei Seiten in AA' zusammen und ihr Schnittpunkt C' wird der Berührungspunkt von Σ mit AA', während C der Schnittpunkt der beiden übrigen Tangenten ist. Überdies liegen jedoch die fünfte und sechste Ecke des vollständigen Vierseits unendlich nahe bei A und A', und zwar die fünfte auf der Seite AC und die sechste auf $A'C$, so dass wirklich AC und $A'C$ die Tangenten der Curve C^3 in den Punkten A, A' sind, und da der Schnittpunkt C dieser Tangenten auch ein Punkt der Curve ist, so sind A, A' wirklich conjugirte Punkte und C ihr gemeinschaftlicher Tangentialpunkt.

Gleichzeitig erhalten wir folgende Art, die Tangente in einem Punkte P der Curve, welchem P' conjugirt ist, zu construiren. „Wenn QQ' ein weiteres conjugirtes Paar ist, so betrachte man QQ' als Brennpunkte eines Kegelschnittes, welcher die Gerade PP' berührt. Die zweite Tangente von P an diesen Kegelschnitt ist zugleich die Tangente der Curve C^3 im Punkte P."

Wir bemerken, dass gemäss der Curvenconstruction in Fig. 1 und 2, Taf. II, die Tangente des Punktes A z. B. gefunden wird, wenn man den zweiten Schnittpunkt des Constructionskreises und der Geraden $A'm'$, mit dem Punkt A verbindet.

Den dritten Schnitt-Punkt der Verbindungslinie zweier conjugirter Punkte erhält man als Berührungspunkt dieser Linie m-

einem Kegelschnitte, welcher irgend zwei andere conjugirte Punkte zu Brennpunkten hat.

Da man nach dem in diesem Artikel bewiesenen irgend zwei conjugirte Punkte als Brennpunkte eines Systems confocaler Kegelschnitte betrachten kann, an die man dann, um Punkte der Curve zu erhalten, aus irgend zwei anderen conjugirten Punkten Tangentenpaare legen muss, so kann man auch eine sehr allgemeine Methode angeben, nach welcher die durch irgend einen Punkt P der Curve gehenden vier Tangenten der Curve C^3 construirt werden können. Sei PP' ein Paar conjugirter Punkte und QQ' ein zweites, welches letztere man als Brennpunktepaar des Systemes confocaler Kegelschnitte betrachten möge. Legt man nun durch den Punkt P' die beiden Kegelschnitte der Schaar (Ellipse, Hyperbel) und durch P an jeden dieser Kegelschnitte die beiden Tangenten, so sind diese offenbar gleichzeitig Tangenten der Curve C^3, indem jede von ihnen die Curve in zwei unendlich nahen Punkten schneidet und zwar an jener Stelle, wo sie von der Tangente des Punktes P', welche dem entsprechenden Kegelschnitte angehört, geschnitten wird.

Die aufeinander senkrecht stehenden Tangenten der beiden verwendeten Kegelschnitte im Punkte P' sind somit sozusagen die beiden Berührungssehnen für die zwei durch P gehenden Tangentenpaare.

Es zeigt sich also aus allem die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass die eigentlich biquadratische Aufgabe des Tangentenziehens sich in zwei quadratische Aufgaben zerlegen lässt.

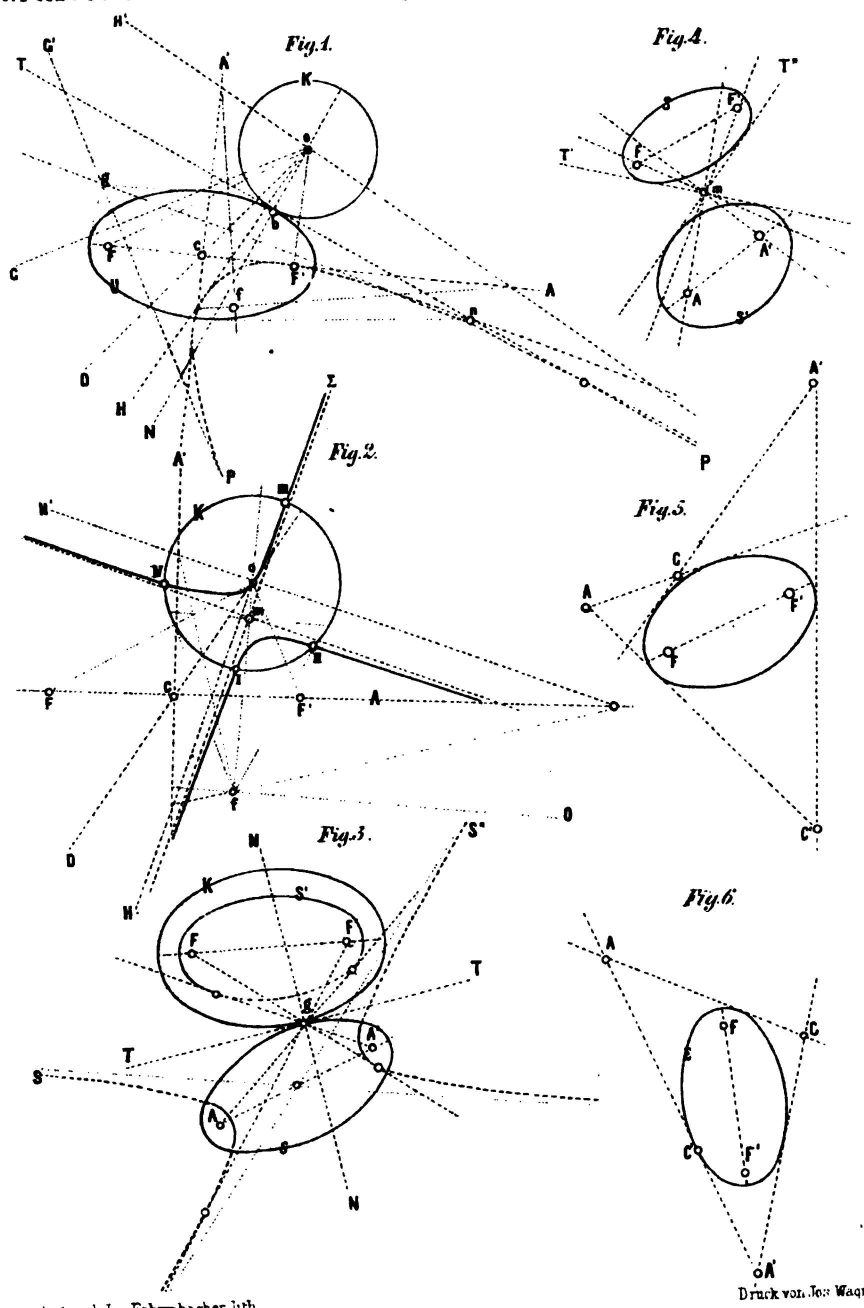
Aus unserer Curvenconstruction (siehe Fig. 2, Taf. II) ergibt sich nun folgendes Verfahren zur Bestimmung der z. B. durch A gehenden (hier sämmtlich reellen) vier Tangenten. Verwendet man nämlich statt einer beliebigen, zu $\alpha'\beta' \parallel$ Sehne jede von den beiden zu $\alpha'\beta'$ parallelen Tangenten von K, so erhält man vier durch A gehende Strahlen, welche die durch diesen Punkt gehenden Tangenten sind. Ihre Berührungspunkte liegen zu zweien auf den von A' nach den Berührungspunkten der verwendeten parallelen Kreistangenten gehenden Strahlen.

6. Aus dem Vorhergehenden fliessen uns auch die Mittel, um erkennen zu können, wann die cubische Curve specieller Natur wird. Es ergibt sich sofort, dass die Curve C^3 einen Doppel-

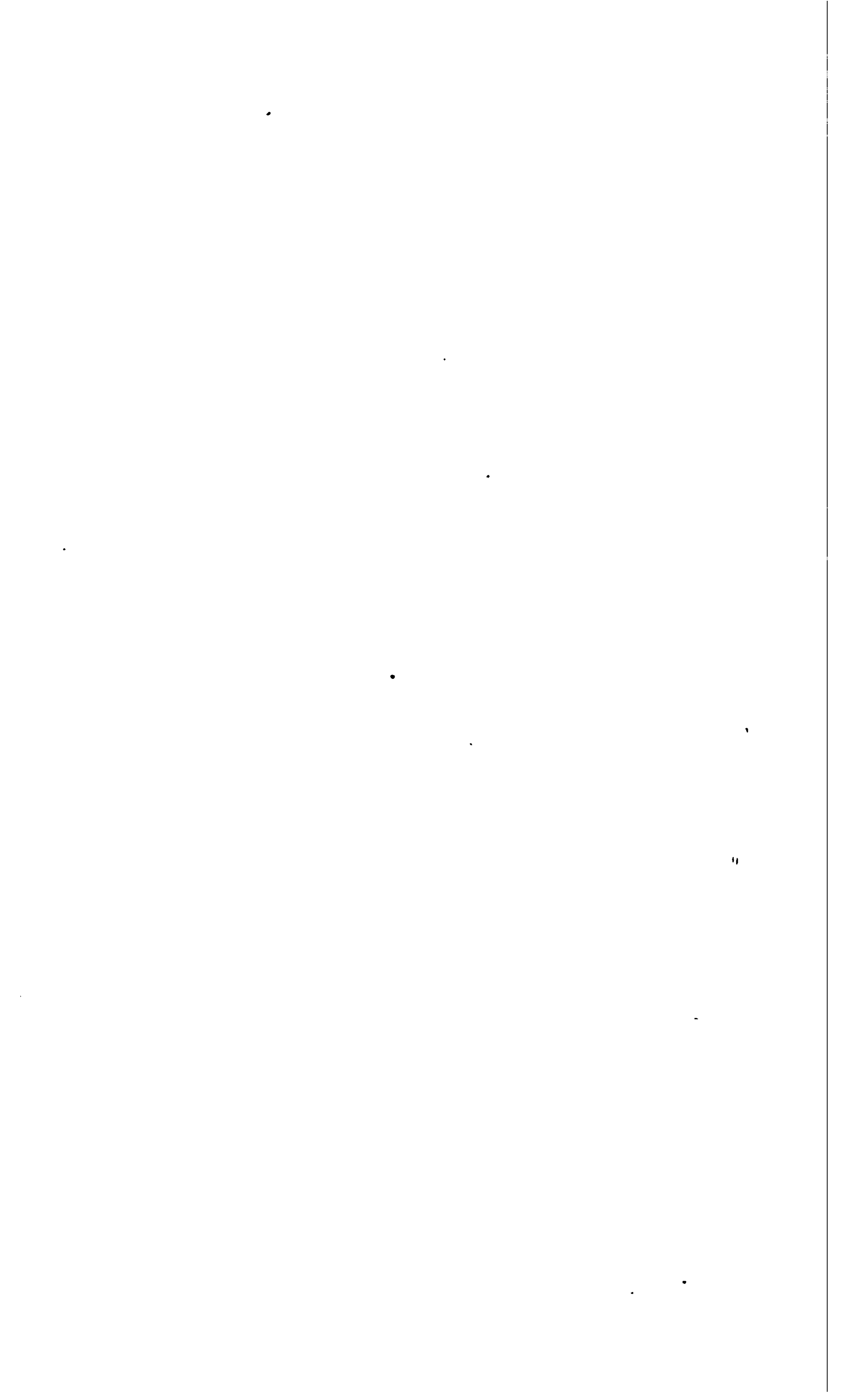
punkt Δ (siehe Fig. 3, Taf. II) erhält, wenn die beiden Punkte (A, A') auf einem Kegelschnitte des Systems (F, F') liegen, oder was dasselbe ist, wenn F, F' auf einem Kegelschnitte des Systems AA' liegen. In diesem Falle fallen nämlich von den vier durch einen Punkt gehenden Tangenten je zwei für die beiden auf einem und demselben Kegelschnitte liegenden Punkte zusammen, nämlich in der Tangente des durch die beiden Punkte gehenden Kegelschnittes. Hieraus folgt also, dass der Punkt Δ als Schnitt dieser Tangenten, d. h. der Pol der Verbindungslinie der beiden auf demselben Kegelschnitt liegenden Punkte, bezüglich dieses Kegelschnittes, ein Doppelpunkt der Curve C^3 sein müsse. Die Curve C^3 wird eine Quetelet'sche Focale und die Tangenten ihres Doppelpunktes stehen auf einander senkrecht, indem sie den Winkel der oben erwähnten Kegelschnittstangenten halbiren.

Wenn schliesslich FF' die Durchschnittspunkte zweier confocaler Kegelschnitte sind, welche AA' zu Brennpunkten haben, oder umgekehrt, so zerfällt C^3, weil sie zwei Doppelpunkte haben muss, in eine Gerade (die Axe, zu welcher FF' symmetrisch liegen, oder die unendlich weite Gerade, wenn FF' auf einem Durchmesser liegen) und einen Kegelschnitt (welcher im ersten Falle ein Kreis ist, weil C^3 durch die imaginären Kreispunkte geht) und welcher im zweiten Falle in ein Geradenpaar zerfällt.

7. Ausser den beiden imaginären Kreispunkten wird die Curve C^3 die unendlich weite Gerade in einem reellen Punkte schneiden, dessen Kenntniss für die Construction der Curve von Wichtigkeit sein kann. Denselben erhielte man als Schnittpunkt zweier durch AA' gehenden parallelen Tangenten eines und desselben Kegelschnittes vom System FF'. Hieraus folgt aber unmittelbar, dass dieser Punkt die Richtung derjenigen Geraden ist, welche die Mittelpunkte der Strecken AA' und FF' verbindet.



Autor del. - Fahrmbacher lith. Druck von Jos. Wagner
Sitzungsb. der kais. Akad. d. W. math. naturw. Cl. LXIV. Bd. II Abth. 1871.

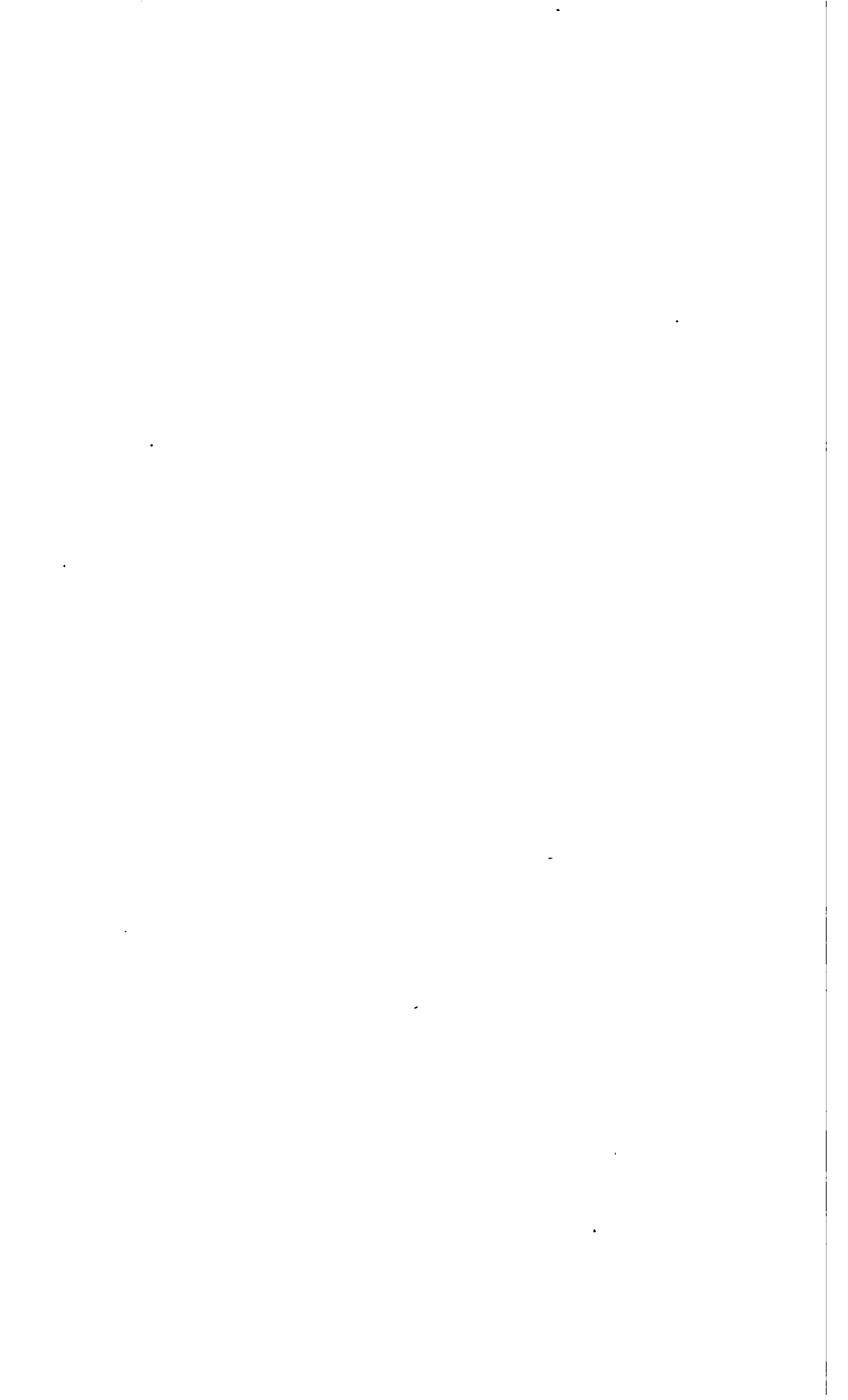


Taf. II

Fig. 5.

C³
M
F
F
E
A
A
m
K
α
β
β
T₂
T₁
M
C³

Druck von [illegible]



Über die Bahn des Planeten (91) Ägina.

Von dem c. M. Prof. Dr. **Theodor Ritter v. Oppolzer.**

Im LXIII. Bande der Sitzungsberichte (Aprilheft) der kais. Akademie der Wissenschaften habe ich bei der Veröffentlichung der Arbeiten, die ich zur Wiederauffindung der Erato unternommen hatte, den Beginn einer Bearbeitung des Planeten (91) Ägina zu demselben Zwecke angezeigt und hiemit lege ich die in Aussicht gestellten Rechnungen vor, in der Hoffnung, dass die Wiederauffindung dieses Planeten mit Hilfe derselben eben so ermöglicht wird, wie dies bei Erato der Fall war. Der Abschluss dieser Rechnungen und hiemit deren Vorlage hat sich in Folge ausständiger Vergleichssternbestimmungen sehr verspätet; die mir so wichtigen Leidener Beobachtungen der Vergleichssterne konnten mir durch Ungunst der Witterung lange verzögert erst am 9. December zugestellt werden; ich hatte aber die Rechnungen so weit vorbereitet und durchgeführt, dass nach Einlangen derselben durch viertägiges angestrengtes Arbeiten die vorliegende Abhandlung zu Ende gebracht werden konnte.

Mit dieser Abhandlung gedenke ich die Untersuchungen für die Wiederauffindung verlorener Planeten abzuschliessen, will aber mit derselben eine Arbeit liefern, welche gewissermassen in der Folge in ähnlichen Fällen für jüngere Astronomen als Muster dienen kann. Ich habe deshalb die Untersuchung und die folgende Mittheilung in mancher Beziehung vollständiger durchgeführt, als es für die Erreichung des nächsten Zweckes gerade nothwendig war, um die Einsicht in den Vorgang zu erleichtern und für schwierigere Fälle Vorsorge zu treffen.

Die folgende Arbeit zerfällt in vier Abschnitte, deren Inhalt der Reihe nach ist: 1. die Grundlagen der Rechnung; 2. Ableitung der wahrscheinlichsten Elemente; 3. Ermittlung der Unsicherheit der Elemente; 4. Ephemeriden zur Aufsuchung des Planeten.

I. Grundlagen. Der Planet (91) Ägina wurde am 4. November 1866 vom Herrn Stefan, Vorstand der Sternwarte in Marseille, entdeckt; an der Beobachtung dieses Planeten betheiligten sich die Sternwarten in Berlin, Cambridge U. S., Marseille und Leipzig; der Planet wurde bis zum 7. Februar 1867 verfolgt und seitdem nicht mehr gesehen. Die Beobachtungen vertheilen sich ziemlich gut auf den Zeitraum von 95 Tagen, und es hat daher die Hoffnung für die Herleitung angemessen genauer Elemente die vollste Berechtigung, wiewohl der Abstand des Planeten von der Ekliptik ein kleiner war. Es müsste in der That der Verlust dieses Planeten etwas wunderbar erscheinen, wenn nicht die grosse Anzahl der kleinen Planeten bei den Kräften, die für dieses Feld der Astronomie thätig sind, es unmöglich machen würde, jedem einzelnen Planeten die hinreichende Aufmerksamkeit zu schenken, und so ist zufällig für diesen Planeten bis zur Angriffnahme meiner Rechnungen kein einziges Elementensystem abgeleitet worden, welches sich den vorhandenen Beobachtungen in einigermassen genügender Weise anschliesst; das bekannt gewordene Elementensystem, welches einem grösseren Beobachtungsbogen angeschlossen ist, verdient kein Vertrauen, weil nur drei Beobachtungen der Rechnung zu Grunde gelegt sind, was bei der Kleinheit der Breiten zu keinem sicheren Resultate führen kann. Ich musste mir daher vorerst annähernd richtige Elemente beischaffen. Aus den Beobachtungen Leipzig Nov. 10, Berlin Dec. 8, Januar 5 und Februar 2 erhielt ich nach meiner Methode, welche die Elemente an die vier beobachteten Längen und äusseren Breiten anschliesst, durch sechsstellige Rechnung das folgende System, welches ich für die Epoche als osculirend annehme, wiewohl bei der Ableitung dieser Elemente auf Störungen nicht Rücksicht genommen wurde.

(91) Ägina.

Osculation und Epoche 1866 Dec. 8·0 mittl. Berl. Zeit
mittl. Äquinoct. 1866·0.

$L = 50°46'38"6$ $\quad i = 2° 8' 0"2$
$M = 330\ 7\ 57·3$ $\quad \varphi = 6\ 5\ 59·2$
$\pi = 80\ 38\ 41·3$ $\quad \mu = 853"460$
$\Omega = 10\ 59\ 34·9$ $\quad \log a = 0·412549.$

Zur Herleitung der Ephemeride aus diesen Elementen wurden die rechtwinkligen Äquatorcoordinaten als Functionen der excentrischen Anomalie dargestellt, und man erhält, wenn man die logarithmisch angesetzten Coëfficienten in eckige Klammern einschliesst, hiefür:

$$x = [0·410138] \sin (E+170°35'\ 6"0) - 0·044694$$
$$y = [0·367794] \sin (E+\ 80\ 52\ 58·1) - 0·244704$$
$$z = [0·047312] \sin (E+\ 79\ 50\ 36·0) - 0·116633.$$

Daraus leitet sich die folgende Ephemeride ab:

12ʰ Berl. Zeit	α	δ	log. Δ	Abrrzt.
1866 Nov. 2	1ʰ47ᵐ35ˢ01	+12°37' 5"6	0·1466	11ᵐ38ˢ
3	1 46 41·91	+12 33 3·0	0·1472	11 39
4	1 45 49·56	+12 29 2·6	0·1479	11 40
5	1 44 58·04	+12 25 4·7	0·1487	11 41
6	1 44 7·41	+12 21 9·7	0·1495	11 42
7	1 43 17·74	+12 17 18·1	0·1504	11 44
8	1 42 29·09	+12 13 30·3	0·1514	11 45
9	1 41 41·53	+12 9 46·6	0·1525	11 47
10	1 40 55·11	+12 6 7·5	0·1536	11 49
11	1 40 9·91	+12 2 33·3	0·1548	11 51
12	1 39 25·97	+11 59 4·5	0·1561	11 53
13	1 38 43·37	+11 55 41·4	0·1575	11 55
14	1 38 2·15	+11 52 24·4	0·1589	11 58
15	1 37 22·34	+11 49 13·7	0·1604	12 0
16	1 36 43·99	+11 46 9·6	0·1619	12 3
17	1 36 7·14	+11 43 12·3	0·1635	12 5
18	1 35 31·82	+11 40 22·2	0·1652	12 8
19	1 34 58·07	+11 37 39·5	0·1669	12 11
20	1 34 25·91	+11 35 4·5	0·1687	12 14
21	1 33 55·39	+11 32 37·4	0·1705	12 17

12ʰ Berl. Zeit		α	δ	log Δ	Aberrzt.
1866 Nov.	22	1ʰ33ᵐ26ˢ53	+11°30'18"4	0·1724	12ᵐ20ˢ
	23	1 32 59·34	+11 28 7·6	0·1743	12 24
	24	1 32 33·84	+11 26 5·3	0·1763	12 27
	25	1 32 10·04	+11 24 11·6	0·1784	12 31
	26	1 31 47·97	+11 22 26·6	0·1805	12 34
	27	1 31 27·65	+11 20 50·5	0·1826	12 38
	28	1 31 9·09	+11 19 23·3	0·1848	12 42
	29	1 30 52·32	+11 18 5·2	0·1870	12 46
	30	1 30 37·35	+11 16 56·3	0·1892	12 50
Dec.	1	1 30 24·18	+11 15 56·7	0·1915	12 54
	2	1 30 12·81	+11 15 6·6	0·1938	12 58
	3	1 30 3·26	+11 14 26·2	0·1961	13 2
	4	1 29 55·53	+11 13 55·5	0·1985	13 6
	5	1 29 49·62	+11 13 34·4	0·2009	13 11
	6	1 29 45·54	+11 13 23·1	0·2034	13 15
	7	1 29 43·29	+11 13 21·5	0·2059	13 20
	8	1 29 42·85	+11 13 29·7	0·2084	13 24
	9	1 29 44·23	+11 13 47·5	0·2109	13 29
	10	1 29 47·41	+11 14 15·0	0·2135	13 34
	11	1 29 52·40	+11 14 52·2	0·2160	13 39
	12	1 29 59·19	+11 15 39·0	0·2186	13 44
	13	1 30 7·75	+11 16 35·4	0·2212	13 48
	14	1 30 18·08	+11 17 41·3	0·2238	13 53
	15	1 30 30·17	+11 18 56·8	0·2264	13 58
	16	1 30 43·99	+11 20 21·8	0·2291	14 4
	17	1 30 59·53	+11 21 56·1	0·2317	14 9
	18	1 31 16·77	+11 23 39·6	0·2344	14 15
	19	1 31 35·70	+11 25 32·3	0·2370	14 19
	20	1 31 56·29	+11 27 34·1	0·2397	14 25
	21	1 32 18·54	+11 29 44·8	0·2423	14 30
	22	1 32 42·41	+11 32 4·3	0·2450	14 35
	23	1 33 7·89	+11 34 32·4	0·2477	14 41
	24	1 33 34·96	+11 37 9·0	0·2504	14 46
	25	1 34 3·61	+11 39 54·1	0·2531	14 52
	26	1 34 33·83	+11 42 47·5	0·2558	14 57
	27	1 35 5·59	+11 45 49·2	0·2585	15 3

12ʰ Berl. Zeit		α	δ	log Δ	Abrrzt.
1866 Dec.	28	1ʰ35ᵐ38ˢ87	+11°48'59"1	0·2612	15ᵐ 8ˢ
	29	1 36 13·68	+11 52 17·2	0·2639	15 14
	30	1 36 49·98	+11 55 43·2	0·2665	15 20
	31	1 37 27·76	+11 59 16·9	0·2692	15 25
1867 Jän.	1	1 38 7·00	+12 2 58·2	0·2719	15 31
	2	1 38 47·68	+12 6 47·0	0·2746	15 37
	3	1 39 29·79	+12 10 43·3	0·2773	15 43
	4	1 40 13·30	+12 14 47·0	0·2800	15 49
	5	1 40 58·23	+12 18 57·7	0·2827	15 55
	6	1 41 44·53	+12 23 15·2	0·2853	16 0
	7	1 42 32·19	+12 27 39·6	0·2880	16 6
	8	1 43 21·19	+12 32 10·7	0·2906	16 12
	9	1 44 11·49	+12 36 48·3	0·2933	16 18
	10	1 45 3·09	+12 41 32·4	0·2959	16 24
	11	1 45 55·97	+12 46 22·7	0·2985	16 30
	12	1 46 50·11	+12 51 19·1	0·3011	16 36
	13	1 47 45·48	+12 56 21·5	0·3037	16 42
	14	1 48 42·07	+13 1 29·6	0·3062	16 48
	15	1 49 39·85	+13 6 43·4	0·3088	16 54
	16	1 50 38·82	+13 12 2·6	0·3113	17 0
	17	1 51 38·95	+13 17 27·2	0·3139	17 6
	18	1 52 40·22	+13 22 56·9	0·3164	17 12
	19	1 53 42·62	+13 28 31·6	0·3189	17 18
	20	1 54 46·12	+13 34 11·2	0·3214	17 24
	21	1 55 50·70	+13 39 55·3	0·3239	17 30
	22	1 56 56·35	+13 45 43·9	0·3264	17 36
	23	1 58 3·07	+13 51 36·9	0·3289	17 42
	24	1 59 10·83	+13 57 34·3	0·3313	17 48
	25	2 0 19·63	+14 3 35·9	0·3338	17 54
	26	2 1 29·46	+14 9 41·5	0·3362	18 0
	27	2 2 40·30	+14 15 51·1	0·3386	18 6
	28	2 3 52·13	+14 22 4·4	0·3410	18 12
	29	2 5 4·94	+14 28 21·4	0·3434	18 18
	30	2 6 18·72	+14 34 41·8	0·3457	18 24
	31	2 7 33·46	+14 41 5·6	0·3481	18 31
Febr.	1	2 8 49·15	+14 47 32·4	0·3504	18 36

12h Berl. Zeit		α	δ	log. Δ	Abrrzt.
1867 Febr.	2	2h 10m 5s78	+14°54' 2"0	0·3527	18m42s
	3	2 11 23·33	+15 0 34·5	0·3550	18 47
	4	2 12 41·79	+15 7 9·7	0·3573	18 53
	5	2 14 1·15	+15 13 47·7	0·3595	18 59
	6	2 15 21·39	+15 20 28·4	0·3618	19 5
	7	2 16 42·50	+15 27 11·5	0·3640	19 11
	8	2 18 4·47	+15 33 56·9	0·3662	19 17
	9	2 19 27·29	+15 40 44·4	0·3684	19 23

Die vorstehende Ephemeride gibt den geocentrischen Ort des Planeten bezogen auf das zugehörige wahre Äquinoctium.

Bevor ich aber an die Vergleichung der Beobachtungen mit der eben angegebenen Ephemeride schreite, um Normalorte zu bilden, werde ich eine erneute Reduction der Beobachtungen vornehmen, einerseits liess mir dies die Neubestimmung der Vergleichssterne wünschenswerth erscheinen, andererseits habe ich dadurch mehrere kleine Fehler entdeckt, die fast von der Ordnung der Beobachtungsfehler waren, und die bei der Reduction von Seite der Beobachter vorgefallen waren; ich meine dadurch ganz wesentlich die Genauigkeit der Normalorte gefördert zu haben. Zunächst werde ich die vorgenommenen Positionen der Vergleichssterne mittheilen; dieselben erfreuen sich einer aussergewöhnlichen Schärfe, da alle Bestimmungen auf wohlverbürgten Beobachtungen beruhen; besonders bin ich Prof. F. Kaiser und Dr. Valentiner in Leiden zu grossem Danke verpflichtet, indem mehrere Sterne, deren Bestimmung mir wünschenswerth erschien, am dortigen Meridiankreis mit grosser Sorgfalt beobachtet wurden. Beim Sterne a und c habe ich die jährliche Eigenbewegung ($d\alpha = -0^s005$, $d\delta = +0"02$, $d\alpha = +0^s011$ und $d\delta = -0"01$) berücksichtigt.

Mittlere Orte der Vergleichssterne für 1866·0.

	α	δ	
a	1h29m59s80	+11°27'19"8	Robinson 358,
	59·84	18·2	Mädler 214,
	59·82	17·5	Radcliffe II. 188,
	59·92	19·6	2 Berl. Merid. Beob. (Astr. Nachr. 1712),
angen.	1 29 59·85	+11 27 18·8.	
b	1 30 27·63	+11 17 55·2	Berl. Merid. Beob. (Astr. Nachr. 1712),
	27·58	53·3	Berl. Mikr. Vergl. mit c,
	27·55	51·8	3 Leidener Merid. Beob.
angen.	1 30 27·58	+11 17 53·0.	

c	$1^h30^m33^s22$	+11°23'39"9	Robinson 360,
	33·20	37·8	Mädler 217,
	33·14	37·6	Radcliffe II. 189,
	33·18	39·7	2 Berl. Merid. Beob. (Astr. Nachr. 1712),
angen.	1 30 33·18	+11 23 38·7.	
d	1 32 3·74	+11 45 27·8	2 Berl. Merid. Beob. (Astr. Nachr. 1712),
	3·65	28·2	Schjellerup 492,
angen.	1 32 3·70	+41 45 28·0.	
e	1 35 54·34	+11 53 27·6	2 Berl. Merid. Beob. (Astr. Nachr. 1712),
f	1 37 13·47	+12 9 27·5	2 Leipz. Mer. Beob. (Astr. Nachr. 1639),
g	1 43 58·02	+12 21 59·5	3·2 Leidener Merid. Beob.
h	1 48 57·87	+12 31 18·2	3 Leidener Merid. Beob.

Mittlere Orte der Vergleichssterne für 1867·0.

i	1 40 23·52	+12 18 36·0	Berl. Merid. Beob. (Astr. Nachr. 1712),
k	2 8 29·89	+14 40 2·3	Leipz. Mikr. Vergl. mit Schjeller. 644,
	29·90	39 57·5	3·2 Leidener Merid. Beob.
angen.	2 8 29·90	+14 39 59·1.	
l	2 14 32·49	+15 33 8·1	3 Leidener Merid. Beob.
m	2 16 2·31	+14 48 17·3	2 Berl. Mer. Beob. (Astr. Nachr. 1712.)

Übersieht man die Autoritäten, die ich für die Vergleichssternpositionen benützen konnte, so wird man zugeben müssen, dass selten für einen Planeten eine Reihe von so ausserordentlich genau bestimmten Vergleichssternpositionen zu Gebote steht, und in der That ist bis auf seltene Ausnahmen die Übereinstimmung zwischen den einzelnen Beobachtungen des Planeten, wie dies die später anzuführende Vergleichung mit der Ephemeride zeigt, eine vorzügliche.

Die folgende Übersicht enthält das Resultat der erneuten Reduction; die erste Columne gibt den Beobachtungsort, die zweite das Datum und die Ortszeit, die dritte Columne enthält den Hinweis auf den benützten Vergleichsstern, die vierte Columne gibt in zwei Theilcolumnen die Reduction desselben auf den scheinbaren Ort, in der fünften Columne, ebenfalls in zwei Theilcolumnen zerfallend, sind die beobachteten Differenzen zwischen dem Planeten und Stern aufgenommen, die sechste und siebente Columne führt die so erhaltenen scheinbaren Orte des Planeten an.

Ort	Ortszeit	*	Reduction $d\alpha$	Reduction $d\delta$	(91) — * $\Delta\alpha$	(91) — * $\Delta\delta$	(91) app α	(91) app δ
Marseille . . 1866	Nov. 4. 11h 32m 25s	h	+4·02	+17"5	−3m 12·84	−2' 37"0	1h 45m 49·05	+12° 28' 58"7
„	„ 5. 11 26 46	g	+4·01	+17·9	+0 56·16	+2 44·6	1 44 58·19	+12 25 2·0
Leipzig	„ 10. 9 5 23	f	+3·97	+18·6	+3 43·65	−3 14·4	1 41 1·09	+12 6 31·7
Berlin	„ 17. 8 46 3	d	+3·94	+18·8	+4 4·64	−2 11·9	1 36 12·28	+11 43 34·9
„	„ 22. 6 17 7	a	+3·92	+18·9	+3 30·02	+3 9·4	1 33 33·79	+11 30 47·1
Marseille	„ 23. 11 15 21	a	+3·91	+18·9	+2 56·10	+0 32·6	1 32 59·86	+11 28 10·3
Berlin	„ 27. 8 11 1	c	+3·90	+18·7	+0 53·79	−2 53·4	1 31 30·87	+11 21 4·0
Leipzig	„ 29. 9 56 5	b	+3·88	+18·6	+0 22·37	+0 2·2	1 30 53·83	+11 18 13·8
Berlin	„ 30. 8 14 12	b	+3·88	+18·6	+0 8·92	. . . .	1 30 40·38	. . . . . .
Leipzig	„ 30. 10 4 52	b	+3·88	+18·6	+0 6·94	−1 9·7	1 30 38·40	+11 17 1·9
Berlin	Dec. 2. 6 11 13	b	+3·86	+18·5	−0 15·88	−2 53·8	1 30 15·56	+11 15 17·7
„	„ 8. 5 25 15	b	+3·82	+18·3	−0 48·70	−4 43·0	1 29 42·70	+11 13 28·3
„	„ 8. 11 28 28	b	+3·82	+18·3	−0 48·84	−4 40·4	1 29 42·56	+11 13 30·9
„	„ 11. 5 18 7	b	+3·80	+18·2	−0 40·57	−3 30·9	1 29 50·81	+11 14 40·3
Leipzig	„ 21. 8 16 52	c	+3·71	+17·8	+1 37·84	+5 28·2	1 32 14·73	+11 29 24·7
„	„ 21. 8 34 36	a	+3·71	+17·7	+2 11·36	+1 49·5	1 32 14·92	+11 29 26·0
Berlin	„ 28. 11 4 58	d	+3·65	+17·3	+3 29·15	+3 6·5	1 35 36·50	+11 48 51·8
„	„ 30. 11 6 28	e	+3·65	+16·9	+0 49·52	+1 48·4	1 36 47·51	+11 55 32·9
„ 1867	Jän. 5. 7 50 55	i	+0·43	− 1·8	+0 25·74	−0 21·1	1 40 49·69	+12 18 13·1
Leipzig	Febr. 1. 9 12 45	k	+0·24	− 3·8	+0 8·87	+6 49·3	2 8 39·01	+14 36 44·6
Berlin	„ 2. 8 15 50	m	+0·27	− 4·1	−6 9·92	+4 39·2	2 9 52·66	+14 52 52·4
Cambridge U. S.	„ 7. 7 7 54	l	+0·19	− 4·1	+2 13·15	−5 29·3	2 16 45·83	+15 27 34·8

Die Vergleichung der vorstehenden Beobachtungen mit der obigen Ephemeride enthält die folgende Zusammenstellung, in die ich ebenfalls die Reduction für Parallaxe, die mit der Newcomb'schen Constante berechnet ist, aufgenommen habe; die Überschrift über den Columnen erläutert deren Inhalt auf hinreichende Weise, die Horizontalstriche deuten auf die Zusammenfassung der Beobachtungen in die Normalorte hin

Datum			Ort	Corr. f. Parallaxe in		Beob.—Rechn.	
				A. R.	Decl.	$d\alpha$	$d\delta$
1866	Nov.	4	Marseille	+0·06	+3·2	—0·71	—1·9
	„	5	„	+0·06	+3·2	—0·24	—1·7
	„	10	Leipzig	—0·09	+3·9	+0·08	+0·6
	„	17	Berlin	—0·07	+4·0	—0·11	+1·7
	„	22	„	—0·18	+4·1	+0·12	—0·7
	„	23	Marseille	+0·14	+3·2	+0·20	+3·7
	„	27	Berlin	—0·06	+3·8	—0·12	+1·8
	„	29	Leipzig	+0·06	+3·7	+0·10	+5·5
	„	30	Berlin.........	—0·04	..	+0·63	..
	„	30	Leipzig	+0·08	+3·7	—0·09	+3·7
	Dec.	2	Berlin.........	—0·15	+3·9	—0·09	+3·3
	„	8	Berlin.........	—0·16	+3·8	—0·25	+5·7
	„	8	„	+0·17	+3·8	—0·11	+5·4
	„	11	„	—0·15	+3·7	—0·12	+3·5
	„	21	Leipzig	+0·04	+3·2	—0·05	+4·9
	„	21	„	+0·06	+3·3	—0·12	+4·6
	„	28	Berlin.........	+0·17	+3·4	—0·54	+5·5
	„	30	„	+0·18	+3·4	—0·52	+3·1
1867	Jän.	5	„	+0·06	+3·0	—0·11	+5·0
	Febr.	1	Leipzig	+0·14	+2·6	—0·39	+3·8
	„	2	Berlin.........	+0·12	+2·6	—0·01	—1·1
	„	7	Cambridge U.S.	+0·13	+1·9	—0·69	+4·6

Aus diesen Zahlen habe ich die folgenden Correctionen der Ephemeride, und die auf das zugehörige wahre Äquinoctium bezogenen sieben Normalorte abgeleitet, denen ich bei der Genauigkeit der zu Grunde gelegten Vergleichssterne die Gewichte nach Massgabe der Anzahl der Beobachtungen zugetheilt habe; hievon macht jedoch der dritte Ort eine theilweise Ausnahme, dem ich in Rectascension nur das Gewicht 4 zuerkannt habe.

		$d\alpha$	$d\delta$	α	δ	Gewicht
1866 Nov.	6·5	—0ˢ29	—1″0	1ʰ44ᵐ 7ˢ12	+12°21′ 8″7	3
„	21·5	+0·07	+1·6	1 33 55·46	+11 32 39·0	3
„	30·5	+0·08	+3·6	1 30 37·43	+11 16 59·9	4
Dec.	9·5	—0·16	+4·9	1 29 44·07	+11 13 52·4	3
„	21·5	—0·08	+4·7	1 32 18·46	+11 29 49·5	2
„	31·5	—0·39	+4·5	1 37 27·37	+11 59 21·4	3
1867 Febr.	3·5	—0·36	+2·4	2 11 22·97	+15 0 36·9	3.

Diese Normalorte habe ich nun alle auf das fixe mittlere Äquinoctium 1866,0 bezogen und ebenso die zugehörigen rechtwinkligen Sonnencoordinaten, die ich aus den polaren Coordinaten des Berliner Jahrbuches unmittelbar abgeleitet hatte; um aber die allerdings ganz geringen Störungen zu berücksichtigen, die der Planet während der ersten Opposition erlitten hat, habe ich vorerst dieselben ermittelt und finde dieselben bezogen auf den mittleren Äquator 1866,0 in Einheiten der siebenten Decimale unter Annahme 1866 Dec. 8·0 für die Osculationsepoche.

		Δx	Δy	Δz
1866 Oct.	29	—37	+1	0
Nov.	18	— 9	0	0
Dec.	8	0	0	0
„	28	— 9	+1	0
1867 Jän.	17	—37	+4	+2
Febr.	6	—85	+7	+3

Vereinigt man die erhaltenen Störungswerthe sofort mit den rechtwinkligen Sonnencoordinaten, wodurch jene die einfachste Berücksichtigung finden, so erhält man als Grundlage für die weiteren Rechnungen die folgenden Angaben, die sich durchaus auf das mittlere Äquinoctium 1866,0 beziehen.

m. Berliner Zeit			α	δ	Gew.	X	Y	Z
I.	1866 Nov.	6·5	26° 1′ 5″4	+12°20′57″9	3	—0·7085298	—0·6350252	—0·2755435
II.	„	21·5	28 28 8·9	+11 32 26·9	3	—0·5017840	—0·7799542	—0·3384341
III.	„	30·5	22 38 37·2	+11 16 47·1	4	—0·3602519	—0·8417211	—0·3652829
IV.	Dec.	9·5	22 25 15·4	+11 13 39·1	3	—0·2096351	—0·8824784	—0·3829147
V.	„	21·5	23 3 49·3	+11 29 35·7	2	—0·0013825	—0·9022125	—0·3914332
VI.	„	31·5	24 21 1·1	+11 59 7·8	3	+0·1725889	—0·8879882	—0·3858056
VII.	1867 Febr.	3·5	32 49 48·8	+15 0 28·5	3	+0·6936300	—0·6428883	—0·2789535

II. Ableitung der wahrscheinlichsten Elemente. Ich habe, um die wahrscheinlichsten Elemente zu erhalten, den strengsten Weg eingeschlagen, indem ich die Fehler nach Mass-

gabe der Gewichte auf die Normalorte nach der Methode der kleinsten Quadrate vertheilt habe. Zu diesem Ende war es nöthig, die Eingangs angeführten Elemente einerseits mit den obigen Normalorten zu vergleichen und andererseits die Differentialquotienten zwischen den Fehlern in den Orten und den Änderungen in den Elementen aufzustellen. Um vorerst die folgenden Rechnungen abzukürzen, habe ich die ersteren Elemente auf den Äquator übertragen und habe so erhalten:

A.

Epoche und Osculation 1866 Dec. 8·0
mittl. Äquinoct. 1866·0

$$L = 50°51'43"68$$
$$M = 330\ 7\ 57·28$$
$$\pi' = 80\ 43\ 46·40$$
$$\Omega' = 0\ 56\ 34·50$$
$$i' = 25\ 33\ 14·20$$
$$\varphi = 6\ 5\ 59·20$$
$$\mu = 853"4600$$
$$\log a = 0·4125489$$

und finde nach genauer siebenstelliger Rechnung die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung (im Sinne Beob.-Rechg.) wie folgt:

			$d\alpha$	$d\delta$
1866	Nov.	6·5	−3"93	−1"18
	„	21·5	+1·00	+1·61
	„	30·5	+1·15	+3·60
	Dec.	9·5	−1·81	+5·08
	„	21·5	−0·72	+4·94
	„	31·5	−5·55	+4·25
1867	Febr.	3·5	−5·62	+2·51

Bei der Aufstellung der Differentialquotienten zwischen diesen Fehlern und den Elementen schien es mir wünschenswerth, denselben den möglichst linearen Charakter, den die Methode der kleinsten Quadrate für diese fordert, aufzudrücken; die Änderungen der Elemente π' und φ aber besitzen den grossen Nachtheil, dass die Änderungen des ersteren durch das Quadrat, des letzteren aber durch die erste Potenz der Excentricität dividirt erscheinen,

wenn man die Elemente abändert, innerhalb der durch die Beobachtungen als zulässig erscheinenden Grenzen, ich habe deshalb zwei andere Elemente Φ' und Ψ' eingeführt, die von diesem Nachtheile frei sind, und dieselben bestimmt durch

$$\Phi' = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''}\sin\pi'$$

$$\Psi' = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''}\cos\pi'$$

Wählt man für die Entwicklung der Differentialformeln die von mir vorgeschlagene Form, so wird man demnach für einen jeden einzelnen Ort das folgende Formelsystem zu berechnen haben, in welchem die verschiedenen Buchstaben die allgemein übliche Bezeichnung haben, (t ist in Tagen von der Epoche an zu zählen, u' ist das Argument der Breite für die äquatorealen Elemente).

$$A\sin A' = \cos(\alpha - \Omega')\cos i',$$

$$A\cos A' = \sin(\alpha - \Omega')$$

$$m\sin M = \sin i'$$

$$m\cos M = -\sin(\alpha - \Omega')\cos i'$$

$$B\sin B' = m\sin(M + \delta)$$

$$B\cos B' = \cos(\alpha - \Omega')\sin\delta$$

$$F\sin F' = -\frac{a}{r}\operatorname{tg}\varphi\sin v$$

$$F\cos F' = \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi$$

$$G\sin G' = t\,.\,F\sin F' + \frac{2}{3\sin 1''\mu}$$

$$G\cos G' = t\,.\,F\cos F'$$

$$\log\frac{2}{3\sin 1''} = 5\cdot 13833$$

$$\eta\sin\eta' = \frac{a}{r}\,.\,\frac{\sin v}{\cos\varphi}$$

$$\eta\cos\eta' = \frac{a}{r}\cos v$$

$$\varepsilon \sin \varepsilon' = \frac{a^2}{r^2} \{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi - \cos E(\frac{r}{a}+1)\}$$

$$\varepsilon \cos \varepsilon' = \frac{2 \sin v}{\cos \varphi^2} \{1+\tfrac{1}{2} \sin \varphi \cos v\}$$

$$Q \sin Q' = \eta \sin (\eta'+\pi')$$
$$Q \cos Q' = \varepsilon \sin (\varepsilon'+\pi')$$
$$W \sin W' = \eta \cos (\eta'+\pi')$$
$$W \cos W' = \varepsilon \cos (\varepsilon'+\pi')$$

dann ist

$$\frac{d\alpha \cos \delta}{dL'} = \frac{r}{\Delta} A . F \sin (F'+A'+u')$$

$$\frac{d\delta}{dL'} = \frac{r}{\Delta} B . F \sin (F'+B'+u')$$

$$\frac{d\alpha \cos \delta}{d\mu} = \frac{r}{\Delta} A . G \sin (G'+A'+u')$$

$$\frac{d\delta}{d\mu} = \frac{r}{\Delta} B . G \sin (G'+B'+u')$$

$$\frac{d\alpha \cos \delta}{d\Phi'} = \frac{r}{\Delta} A . Q \sin (Q'+A'+u')$$

$$\frac{d\delta}{d\Phi'} = \frac{r}{\Delta} B . Q \sin (Q'+B'+u')$$

$$\frac{d\alpha \cos \delta}{d\Psi'} = \frac{r}{\Delta} A \ \ W \sin (W'+A'+u')$$

$$\frac{d\delta}{d\Psi'} = \frac{r}{\Delta} B . W \sin (W'+B'+u')$$

$$\frac{d\alpha \cos \delta}{\sin i' d\Omega'} = \frac{r}{\Delta} \cos (\alpha - \Omega' + u') \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i'$$

$$\frac{d\delta}{\sin i' d\Omega'} = -\frac{r}{\Delta} \{\sin \delta \sin (\alpha - \Omega' + u') \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i' + \cos u' \cos \delta\}$$

$$\frac{d\alpha \cos \delta}{di'} = -\frac{r}{\Delta} \sin u' \cos (\alpha - \Omega') \sin i'$$

$$\frac{d\delta}{di'} = \frac{r}{\Delta} \{\sin \delta \sin (\alpha - \Omega') \sin i' + \cos i' \cos \delta\} \sin u'$$

Die Rechnung nach diesen Formeln führte mit Rücksicht auf die Fehler der obigen Elemente zu den folgenden Bedingungsgleichungen (logarithmisch) für die

Rectascensionen.

0_n58422	$= 0\cdot25894\,dL'$	$+1_n93549\,d\mu$	$+0_n44728\,d\Phi'$	$+0\cdot29159\,d\Psi'$	$+9\cdot29051\,d\Omega'\sin i'$	$+9_n56890\,di'$
$9\cdot99113$	$= 0\cdot22073$	1_n92181	0_n41437	$0\cdot26602$	$9\cdot24561$	9_n59758
$0\cdot05223$	$= 0\cdot19419$	1_n89340	0_n38637	$0\cdot24755$	$9\cdot20147$	9_n60338
0_n24929	$= 0\cdot16552$	1_n84969	0_n35416	$0\cdot22972$	$9\cdot14267$	9_n60249
9_n84854	$= 0\cdot12733$	1_n76639	0_n30731	$0\cdot20967$	$9\cdot03692$	9_n59343
0_n73472	$= 0\cdot09754$	1_n67090	0_n26634	$0\cdot19740$	$8\cdot91635$	9_n58063
0_n73467	$= 0\cdot02027$	0_n69412	0_n11994	$0\cdot18372$	7_n79704	9_n51112

Declinationen.

0_n07188	$= 9\cdot88503\,dL'$	$+1_n51262\,d\mu$	$+0_n07105\,d\Phi'$	$+9\cdot93858\,d\Psi'$	$+0_n15605\,d\Omega'\sin i'$	$+9\cdot94104\,di'$
$0\cdot20683$	$= 9\cdot86344$	1_n49692	0_n04870	$9\cdot92408$	0_n11079	$9\cdot95958$
$0\cdot55630$	$= 9\cdot84889$	1_n46502	0_n02409	$9\cdot91119$	0_n07592	$9\cdot96231$
$0\cdot70586$	$= 9\cdot81757$	1_n41506	9_n99292	$9\cdot89561$	0_n03683	$9\cdot96065$
$0\cdot69373$	$= 9\cdot77823$	1_n31710	9_n94370	$9\cdot87340$	9_n98018	$9\cdot95390$
$0\cdot62839$	$= 9\cdot74380$	1_n20077	9_n89752	$9\cdot85509$	9_n93033	$9\cdot94600$
$0\cdot39967$	$= 9\cdot62397$	$9\cdot84855$	9_n70965	$9\cdot79308$	9_n74904	$9\cdot91600$

Vor Allem wollte ich mir die Überzeugung schaffen, ob die hier berechneten Differentialquotienten völlig richtig berechnet sind; zu diesem Ende habe ich dieselben der bekannten Prüfung unterzogen, indem ich mit willkürlich stark veränderten Elementen die Darstellung der Orte rechnete und das Resultat der directen Rechnung mit den aus den Differentialformeln resultirenden Änderungen verglich. Vorerst habe ich in dem Systeme A die Elemente π' und φ auf die neuen Elemente Φ' und Ψ' transformirt und so gefunden

$$\Phi' = +21631''47$$

$$\Psi' = +3530''83.$$

und hierauf angenommen

$$dL' = +400'' \qquad d\mu = +10''$$

$$d\Phi' = +300'' \qquad d\Omega' \sin i' = +300''$$

$$d\Psi' = +500'' \qquad di' = +300''.$$

Ich finde nun, wenn ich mit den so abgeänderten Elementen die geocentrischen Orte für die Zeiten der Normalorte berechne, dass sich die Darstellung den Zahlen der ersten zwei Columnen gemäss geändert hat, während die dritte und vierte Columne die aus den Differentialformeln resultirenden Änderungen angibt.

			Änderung nach			
			directer Rechnung		Differentialformeln	
			$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
1866	Nov.	6·5	— 57″62	—111″87	— 58″52	—110″61
	„	21·5	— 91·25	— 49·57	— 92·62	— 50·19
	„	30·5	— 73·55	— 2·69	— 75·61	— 4·35
	Dec.	9·5	— 27·41	+ 50·83	— 29·81	+ 48·23
	„	21·5	+ 71·93	+129·41	+ 68·86	+125·73
	„	31·5	+180·03	+197·97	+176·30	+193·57
1867	Febr.	3·5	+643·34	+416·43	+638·32	+411·01.

Beide Zahlenreihen stimmten in Folge des vernachlässigten Einflusses der Glieder zweiter Ordnung nicht völlig, doch bilden deren Differenzen eine sehr schöne continuirliche Reihe, ein Beweis für die Richtigkeit der Rechnung; es findet sich nämlich:

			$dd\alpha \cos\delta$	$dd\delta$
1866	Nov.	6·5	—0″90	+1″26
	„	21·5	—1·37	—0·62
	„	30·5	—2·06	—1·66
	Dec.	9·5	—2·40	—2·60
	„	21·5	—3·07	—3·68
	„	31·5	—3·73	—4·40
1867	Febr.	3·5	—5·02	—5·42.

Diese Unterschiede müssen bei den enormen Änderungen ($d\pi'$ ändert sich mehr als um einen vollen Grad) als mässig bezeichnet werden, und zeigen den durch die Einführung der Elemente Φ' und Ψ' erlangten Vortheil einer grösseren Linearität.

Nachdem so die obigen Coëfficienten völlig geprüft erscheinen, konnte daran gegangen werden, die obigen Bedingungsgleichungen in die Normalgleichungen zusammenzufassen; die ersteren mussten zunächst mit den Quadratwurzeln aus den zugehörigen Gewichten durchmultiplicirt werden, und um ferner in die bekannten Prüfungsrechnungen bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate die grösste Schärfe zu legen, habe ich die Coëfficienten dadurch homogen gemacht, dass ich andere Unbekannte eingeführt habe, welche so gewählt wurden, dass der grösste Coëfficient für jede derselben der positiven Einheit gleich wurde; ausserdem habe ich als Fehlereinheit 10″ angenommen.

Unter diesen Voraussetzungen war zunächst gesetzt worden (logarithmisch)

$$\begin{aligned}
a &= [0\cdot 26336]\,di' \\
b &= [0_n\,39461]\,d\Omega'\sin i' = [0_n 02945]\,d\Omega' \\
c &= [0\cdot 49522]\,dL' \\
d &= [0\cdot 54858]\,d\Psi' \\
e &= [0_n\,68740]\,d\Phi' \\
f &= [2_n\,19443]\,d\mu
\end{aligned}$$

und hiermit erhalten die Bedingungsgleichungen die folgende Gestalt, in welcher wieder die Coëfficienten logarithmisch zu verstehen sind.

Rectascensionen.

$9_n82278 = 9_n54410a$	$+9_n13446b$	$+9\cdot99728c$	$+9\cdot98157d$	$+9\cdot99844e$	$+9\cdot97962f$
$9\cdot22969 = 9_n57278$	9_n08956	$9\cdot96407$	$9\cdot95600$	$9\cdot96553$	$9\cdot96594$
$9_n35326 = 9_n64105$	9_n10789	$0\cdot00000$	$0\cdot00000$	$0\cdot00000$	$0\cdot00000$
$9_n48785 = 9_n57769$	8_n98662	$9\cdot90886$	$9\cdot91970$	$9\cdot90532$	$9\cdot89382$
$8_n99905 = 9_n48058$	8_n79282	$9\cdot78262$	$9\cdot81160$	$9\cdot77042$	$9\cdot72247$
$9_n97328 = 9_n55585$	8_n76030	$9\cdot84088$	$9\cdot88738$	$9\cdot81750$	$9\cdot71503$
$9_n97323 = 9_n48632$	$7\cdot64099$	$9\cdot76361$	$9\cdot87370$	$9\cdot67110$	$8\cdot73825$

Declinationen.

$9_n31044 = 9\cdot91624a$	$+0\cdot00000b$	$+9\cdot62837c$	$+9\cdot62356d$	$+9\cdot62221e$	$+9\cdot55675f$
$9\cdot44539 = 9\cdot93478$	$9\cdot95474$	$9\cdot60878$	$9\cdot61406$	$9\cdot59986$	$9\cdot54105$
$9\cdot85733 = 0\cdot00000$	$9\cdot98234$	$9\cdot64970$	$9\cdot66364$	$9\cdot63773$	$9\cdot57162$
$9\cdot94442 = 9\cdot93585$	$9\cdot88078$	$9\cdot56091$	$9\cdot58559$	$9\cdot54408$	$9\cdot45919$
$9\cdot84424 = 9\cdot84105$	$9\cdot78608$	$9\cdot43352$	$9\cdot47533$	$9\cdot40681$	$9\cdot27318$
$9\cdot86695 = 9\cdot92120$	$9\cdot77428$	$9\cdot48714$	$9\cdot54507$	$9\cdot44868$	$9\cdot24490$
$9\cdot63828 = 9\cdot89120$	$9\cdot59299$	$9\cdot36731$	$9\cdot48306$	$9\cdot26081$	7_n89268

Die Summe der Fehlerquadrate in der oben gewählten Einheit ist: $[nn] = 5\cdot0256$.

Diese Bedingungsgleichungen vereinigen sich nach den bekannten Methoden in die folgenden Normalgleichungen, wobei die Anordnung der Unbekannten schon so getroffen ist, dass die voraussichtlich besonders unsicher zu bestimmenden Elemente, insbesondere f, welches eine Function von $\Delta\mu$ ist, als die letzten erscheinen.

$+5\cdot85873a$	$+4\cdot61889b$	$+0\cdot03922c$	$+0\cdot10232d$	$-0\cdot01661e$	$-0\cdot28826f$	$= +3\cdot83069$
$+4\cdot61889a$	$+4\cdot18166b$	$+1\cdot38731c$	$+1\cdot48465d$	$+1\cdot31013e$	$+0\cdot94378f$	$= +2\cdot52224$
$+0\cdot03922a$	$+1\cdot38731b$	$+5\cdot57645c$	$+5\cdot77094d$	$+5\cdot43613e$	$+4\cdot81421f$	$= -0\cdot60143$
$+0\cdot10232a$	$+1\cdot48465b$	$+5\cdot77094c$	$+6\cdot01169d$	$+5\cdot60243e$	$+4\cdot87664f$	$= -0\cdot70847$
$-0\cdot01661a$	$+1\cdot31013b$	$+5\cdot43613c$	$+5\cdot60243d$	$+5\cdot31379e$	$+4\cdot75988f$	$= -0\cdot53460$
$-0\cdot28826a$	$+0\cdot94378b$	$+4\cdot81421c$	$+4\cdot87664d$	$+4\cdot75988e$	$+4\cdot46803f$	$= -0\cdot23271$

Führt man nun die Elimination in der bekannten Weise aus, so erhält man für die Bestimmungsgleichungen die Werthe

$$\begin{array}{rrrrrrl}
+5\cdot85873a & +4\cdot61889b & +0\cdot03922c & +0\cdot10232d & -0\cdot01661e & -0\cdot28826f & = +3\cdot83069 \\
 & +0\cdot54022b & +1\cdot85639c & +1\cdot40398d & +1\cdot32322e & +1\cdot17104f & = -0\cdot49781 \\
 & & +2\cdot17055c & +2\cdot24512d & +2\cdot11389e & +1\cdot87588f & = +0\cdot62284 \\
 & & & +0\cdot03888d & -0\cdot02271e & -0\cdot10208f & = -0\cdot12585 \\
 & & & & +0\cdot00065e & +0\cdot00410f & = +0\cdot01542 \\
 & & & & & -0\cdot00006f & = +0\cdot01849
\end{array}$$

Der Anblick dieser Bestimmungsgleichung lehrt, dass die Unbekannte e nahezu, f völlig unbestimmt bleibt; der Coëfficient der ersteren Unbekannten $[ee4]$ überschreitet in der massgebenden fünften Gleichung nicht sehr wesentlich die unvermeidliche Unsicherheit der Rechnung, der Coëfficient von f in der sechsten Gleichung $[ff5]$ wird in Folge der unvermeidlichen Unsicherheit der Rechnung sogar negativ, während er theoretisch eine positive Grösse sein muss; da ich für die Richtigkeit der obigen Rechnung bürgen kann, so zeigt dieser Umstand, dass f völlig unbestimmt bleibt und in der That gibt eine oberflächliche Betrachtung sofort zu erkennen, dass der Coëfficient $[ee4]$ um weniger als eine Einheit der letzten Decimale nur verändert zu werden braucht (also $[ee4] = +0\cdot00066$) um $[ff5]$ der Theorie entsprechend positiv zu finden. Man kann demnach als Resultat festhalten, dass die Bestimmungsgleichungen an sich keinen sicheren Schluss auf die Unbekannten e und f gestatten. Ich habe daher die vier übrigen Unbekannten als Functionen von e und f dargestellt. Denkt man sich vorerst rechts vom Gleichheitszeichen in den Bestimmungsgleichungen durchaus Null gesetzt, um die Abhängigkeit der Unbekannten a, b, c und d von e und f unabhängig von den Fehlern darzustellen, so findet man hiefür, wenn man die Coëfficienten der Bequemlichkeit halber logarithmisch ansetzt:

$$\left.\begin{aligned}
d &= [9\cdot76705]e + [0\cdot41977]f \\
c &= [0_n\,19834]e + [0_n\,55430]f \\
b &= [7_n\,71768]e + [7_n\,41044]f \\
a &= [7\cdot86364]e + [8\cdot46694]f
\end{aligned}\right\}\ \text{I.}$$

Verzichtet man vorerst auf die Bestimmung von e und f aus den Bestimmungsgleichungen, so wird man dieselben der Null gleich setzen (also $e = f = 0$) und hiemit die Bestimmung so vornehmen, dass sich die Unbekannten a, b, c und d, wenn über

μ und Φ' die Annahmen der Ausgangselemente festgehalten werden, den Beobachtungen möglichst anschliessen. Man wird finden

$$\log d = 0_n 51069 \qquad \log b = 0_n 21379$$
$$\log c = 0 \cdot 56102 \qquad \log a = 0 \cdot 29576.$$

Die Summe der Fehlerquadrate in den Orten soll hiedurch herabgebracht werden auf 1·4756. Ich werde zuerst zeigen, dass in der That diesem Eliminationsresultate genügt wird. Setzt man die hier gefundenen Werthe für die Unbekannten *abcd* und deren Relationen zu e und f in die Bedingungsgleichungen ein, so dass gesetzt wird

$$\left.\begin{aligned} a &= [0 \cdot 29576] + [7 \cdot 86364]e + [8 \cdot 46694]f \\ b &= [0_n 21379] + [7_n 71768]e + [7_n 41044]f \\ c &= [0 \cdot 56102] + [0_n 19834]e + [0_n 55430]f \\ d &= [0_n 51069] + [9 \cdot 76705]e + [0 \cdot 41977]f \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

so werden die neu entstehenden Bedingungsgleichungen nur mehr Functionen von e und f sein und links vom Gleichheitszeichen werden die Fehler stehen, die in den Beobachtungen übrig bleiben, falls man nur a, b, c und d als veränderlich annimmt; man erhält so

$$\left.\begin{aligned} &\text{Rectascensionen.} \\ -0 \cdot 7064 &= [8_n 1421]e + [8_n 9876]f \\ +0 \cdot 2859 &= [7_n 5263]e + [7_n 9736]f \\ +0 \cdot 4822 &= [7 \cdot 5416]e + [8 \cdot 5180]f \\ +0 \cdot 0246 &= [7 \cdot 9042]e + [8 \cdot 7185]f \\ +0 \cdot 2904 &= [7 \cdot 9745]e + [8 \cdot 7026]f \\ -0 \cdot 3461 &= [8 \cdot 0538]e + [8 \cdot 7215]f \\ -0 \cdot 0161 &= [8_n 0860]e + [8_n 8328]f \\ &\text{Declinationen.} \\ -0 \cdot 3821 &= [7_n 7292]e + [8_n 5565]f \\ -0 \cdot 0931 &= [7_n 1239]e + [7_n 6284]f \\ +0 \cdot 1844 &= [7 \cdot 1303]e + [8 \cdot 0770]f \\ +0 \cdot 3427 &= [7 \cdot 4955]e + [8 \cdot 2971]f \\ +0 \cdot 2001 &= [7 \cdot 5705]e + [8 \cdot 2916]f \\ +0 \cdot 0807 &= [7 \cdot 6464]e + [8 \cdot 3172]f \\ -0 \cdot 3245 &= [7_n 6021]e + [8_n 3294]f \end{aligned}\right\} \text{III.}$$

Die Summe der jetzt bestehenden Fehlerquadrate findet sich der obigen Probe gemäss 1·4759.

Diese Gleichungen kann man als neue Bedingungsgleichungen für die Bestimmung von e und f benützen; die Kleinheit dieser Coëfficienten zeigt die hier obwaltende Unsicherheit und es wird von denselben im dritten Abschnitte der vorliegenden Abhandlung wieder Gebrauch gemacht werden. Um nun die weiteren numerischen Operationen bequemer zu gestalten, habe ich vermöge der Relationen

$$g = [8_n 1421]e \quad \text{und} \quad h = [8_n 9876]f$$

neue Unbekannte eingeführt und dann die Normalgleichungen gebildet und gefunden

$$+3\cdot8323g + 3\cdot2209h = -1\cdot1262$$
$$+3\cdot2209g + 2\cdot7973h = -1\cdot1969.$$

Die gleichzeitige Bestimmung von g und h ist wieder mit einiger Unsicherheit behaftet; ich habe daher die erste Gleichung allein benützt (ähnlich wie früher) um eine Bestimmung von g zu erhalten, so bald man $h = 0$ setzt, d. h. mit Beibehaltung von μ die wahrscheinlichsten Elemente zu ermitteln; ich fand so

$$g = [9_n 46816] + [9_n 92452]\, h$$

oder sofort den Übergang machend auf e und f

$$e = [1\cdot32606] + [0_n 77002]f.$$

Setzt man $f = 0$, so wird die so resultirende Bestimmung von e die obige Summe der Fehlerquadrate (1·4759) herabmindern auf 1·1449. Es ist klar, dass hiebei nicht allein das Element Φ' der Bestimmung von e entsprechend abgeändert werden muss, sondern auch die übrigen Elemente den oben mitgetheilten Relationen I gemäss, um die geforderte Herabminderung zu erzielen. Führt man nun die zuletzt für e ermittelte Relation in die Bedingungsgleichungen III und in die Relationen I ein, so erhält man links vom Gleichheitszeichen das Fehlerquadratminimum, so lange μ ungeändert belassen wird, die Fehler selbst aber und die Elemente erscheinen nun blos als Functionen von f. Man erhält so, wenn man mit den früher angegebenen Coëfficienten auch den Übergang auf die Elementenänderungen ausführt

$$\left.\begin{array}{lll} a=[8_n 13716]f & \text{oder} & \Delta i'=[0\cdot 06823]\Delta\mu \\ b=[8\cdot 44974]f & \text{„} & \Delta\Omega'=[0\cdot 61472]\Delta\mu \\ c=[0\cdot 75694]f & \text{„} & \Delta L'=[2_n 45615]\Delta\mu \\ d=[9_n 91126]f & \text{„} & \Delta\Psi'=[1\cdot 55711]\Delta\mu \\ e=[0_n 77002]f & \text{„} & \Delta\Phi'=[2_n 27705]\Delta\mu \end{array}\right\} \text{IV.}$$

und die neuen Bedingungsgleichungen zur Bestimmung von f

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Rectascensionen} & \text{Declinationen} \\ -0\cdot 4125=[8_n 1903]f & -0\cdot 2685=[7_n 6493]f \\ +0\cdot 3571=[8\cdot 0158]f & -0\cdot 0649=[7\cdot 5539]f \\ +0\cdot 4085=[8\cdot 0959]f & +0\cdot 1558=[7\cdot 6010]f \\ -0\cdot 1454=[7\cdot 7050]f & +0\cdot 2764=[7\cdot 1430]f \\ +0\cdot 0906=[7_n 7076]f & +0\cdot 1213=[7_n 3674]f \\ -0\cdot 5859=[8_n 1458]f & -0\cdot 0132=[7_n 7267]f \\ +0\cdot 2422=[7\cdot 5717]f & -0\cdot 2397=[7\cdot 3444]f \end{array}\right\} \text{V.}$$

Die Summe der Fehlerquadrate ist dem oben erwähnten Proberesultate entsprechend gefunden, nämlich 1·1453. Aus den Bedingungsgleichungen V erhält man nun die Bestimmung von f. Es findet sich

$$\log f=1\cdot 45460 \quad \text{oder} \quad \Delta\mu=-1''8204$$

und die Summe der Fehlerquadrate soll durch diese Annahme auf 0·4527 herabgebracht werden; setzt man den Werth für f ein, so finden sich die nicht weiter herabdrückbaren Fehler. wie folgt:

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Rectascensionen} & \text{Declinationen} \\ +0\cdot 0290 & -0\cdot 1415 \\ +0\cdot 0617 & -0\cdot 1669 \\ +0\cdot 0533 & +0\cdot 0421 \\ -0\cdot 2898 & +0\cdot 2368 \\ +0\cdot 2359 & +0\cdot 1877 \\ -0\cdot 1874 & +0\cdot 1386 \\ +0\cdot 1360 & -0\cdot 3026 \end{array}\right\} \text{VI.}$$

Die Summe dieser Fehlerquadrate ist in der That 0·4526. Bestimmt man nun e entsprechend der oben gefundenen Relation

$$e=[1\cdot 32606]+[0_n 77002]f$$

und dann die übrigen Elemente nach den Gleichungen II, so finden sich die Correctionen der Elemente, die auf die eben angeführten unausgleichbaren Fehler führen sollen, wie folgt:

$$\Delta\mu = -1\text{"}8204 \qquad \Delta L' = +425\text{"}06$$
$$d\Phi' = +301\text{"}01 \qquad \Delta\Omega' = +8\text{"}82$$
$$d\Psi' = -39\text{"}79 \qquad \Delta i' = +9\text{"}49$$

Man ist nun in der Lage, eine durchgreifende Prüfung der bisherigen Rechnungen vorzunehmen; führt man nämlich diese Correctionen der Elemente in die ersten Bedingungsgleichungen, die den Ausgangspunkt dieser Untersuchung bildeten, ein, so erhält man die Fehler, die in den Normalorten übrig bleiben; dieselben Zahlen muss man aber erhalten, wenn man die Fehler die in VI angeführt sind, der gewählten Einheit entsprechend mit 10 multiplicirt und durch das Mass der Präcision (Quadratwurzel des Gewichtes) des Normalortes dividirt. Es gibt in der That diese Prüfung eine höchst befriedigende Übereinstimmung, um so mehr da ich mich bei diesen Rechnungen stets mit der zweiten Decimale der Bogensekunde begnügte, also bei der Summirung leicht Fehler von einigen Hunderttheilen der Bogensekunde entstehen konnten.

			Die Fehler in den Normalorten			
			nach VI		nach den ersten Bedingungsgleichungen	
			$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
1866	Nov.	6·5	+0"17	−0"82	+0"18	−0"82
	„	21·5	+0·36	−0·96	+0·36	−0·96
	„	30·5	+0·27	+0·21	+0·28	+0·21
	Dec.	9·5	−1·67	+1·37	−1·66	+1·37
	„	21·5	+1·67	+1·33	+1·69	+1·33
	„	31·5	−1·08	+0·80	−1·07	+0·81
1867	Febr.	3·5	+0·79	−1·75	+0·79	−1·75

Man könnte dieselbe Darstellung nur dann von den entsprechend verbesserten Elementen erwarten, wenn in der That der Zusammenhang zwischen den Fehlern und den Elementenänderungen ein völlig linearer wäre, was doch thatsächlich nicht der Fall ist; man muss sich demnach durch eine directe Nachrechnung überzeugen, ob die Glieder zweiter Ordnung nicht

merklich sind, eine Befürchtung, die bei den gefundenen beträchtlichen Correctionen der Elemente einige Berechtigung hat.

Bringt man die oben gefundenen Correctionen an die Elemente A an, so erhält man:

B.

Epoche und Osculation 1866, Dec. 8·0.

$$L' = 50°58'48"74 \qquad \Omega' = 0°56'43"32$$
$$\Phi' = +21932"48 \qquad i' = 25°33'23"69$$
$$\Psi' = +3491"04 \qquad \mu' = 851"6396.$$

Verwandelt man Φ' und Ψ' in die sonst üblichen Elemente π' und φ, so erhält man

$$\pi' = 80°57'21"52$$
$$\varphi = \ 6\ 10\ 51·72.$$

Rechnet man nun aus diesen Elementen die Darstellung der Orte, so findet man

			$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
1866	Nov.	6·5	−0"23	−0"98
	„	21·5	−0·01	−1·13
	„	30·5	−0·09	+0·04
	Dec.	9·5	−1·93	+1·22
	„	21·5	+1·44	+1·16
	„	31·5	−1·42	+0·69
1867	Febr.	3·5	+0·53	−1·87

welche Fehler mit dem obigen Werth in nicht genügender Übereinstimmung sind, wenn man bedenkt, dass ich die Rechnung sorgfältig siebenstellig durchgeführt habe; dass es in der That aber die übergangenen Glieder zweiter Ordnung sind, die diese Differenzen verursachen, ersieht man sofort, wenn man die Unterschiede der beiden Fehlerreihen bildet; man findet:

			$dd\alpha \cos\delta$	$dd\delta$
1866	Nov.	6·5	+0"41	+0"16
	„	21·5	+0·37	+0·17
	„	30·5	+0·37	+0·17
	Dec.	9·5	+0·27	+0·15
	„	21·5	+0·25	+0·17
	„	31·5	+0·35	+0·12
1867	Febr.	3·5	+0·26	+0·12

An sich sind diese Unterschiede nicht gross und man könnte sie auf sich beruhen lassen; da ich mir aber vorgesetzt habe, durch diese Arbeit ein Muster für ähnliche Untersuchungen zu schaffen, so konnte ich mich nicht durch dieses Resultat befriedigt erklären und ich habe eine zweite Ausgleichung vorgenommen, ganz nach dem einmal bereits durchgeführten Vorgange; die hieraus entstehende Arbeit ist nicht gross, da die hauptsächlichsten Rechnungen fast unverändert bleiben, nur die mit den Fehlern im Zusammenhang stehenden Coëfficienten bedürfen einer Neurechnung. Man erhält zunächst für die Normalgleichungen unter Benützung der allgemein bekannten Gauss'schen Bezeichnung

$$[an] = -0 \cdot 00910 \qquad [dn] = -0 \cdot 39936$$
$$[bn] = -0 \cdot 10194 \qquad [en] = -0 \cdot 38215$$
$$[cn] = -0 \cdot 38977 \qquad [fn] = -0 \cdot 34604$$

und die Summe der Fehlerquadrate ist 0·4820.

Die Berechnung der Coëfficienten $[en]$ und $[fn]$ wäre bei der Form der hier gewählten Auflösung nicht nöhtig gewesen, ich habe aber dieselbe doch durchgeführt, um von den bekannten Summenprüfungen, die ich stets anwende, unverändert wie bei der ersten Auflösung, Gebrauch machen zu können. Setzt man wieder e und f der Null gleich, so bestimmt sich zunächst

$$\log d = 9 \cdot 02149 \qquad \log b = 5_n 86949$$
$$\log c = 9_n 25188 \qquad \log a = 7_n 32946$$

und die Summe der Fehlerquadrate soll auf 0·4544 herabsinken; in der That finden sich jetzt die Fehler in den

Rectascensionen	Declinationen
+0·0354	−0·1361
+0·0670	−0·1645
+0·0549	+0 0415
−0·2780	+0·2377
+0·2432	+0·1826
−0·2037	+0·1393
+0·1164	−0·3125

und die Summe der Fehlerquadrate ist 0·4545. Jetzt habe ich die

Bestimmung von e vorgenommen und gefunden, wenn man wieder f der Null gleich setzt

$$\log e = 9 \cdot 17207,$$

wodurch die Summe der Fehlerquadrate nicht mehr merkbar herabgemindert wird; es werden die Fehler in den

Rectascensionen	Declinationen
+0·0375	—0·1353
+0·0675	—0·1643
+0·0544	+0·0413
—0·2792	+0·2373
+0·2418	+0·1821
—0·2054	+0·1386
+0·1182	—0·3119,

welche Fehler in Verbindung mit den f-Coëfficienten der Gleichungen V die Bestimmung von f ermöglichen. Es findet sich

$$\log f = 9 \cdot 1515,$$

welche Bestimmung ebenfalls die Summe der Fehlerquadrate nicht merkbar vermindert; es werden also die nicht weiter verminderbaren Fehler sein in den

Rectascensionen	Declinationen
+0·0396	—0·1346
+0·0660	—0·1648
+0·0526	+0·0407
—0·2800	+0·2371
+0·2426	+0·1824
—0·2034	+0·1394
+0·1177	—0·3122.

Bestimmt man sich nun e der Relation entsprechend

$$e = [9 \cdot 17207] + [0_n 77002] f$$

und dann nach I die Correctionen der übrigen Elemente, so findet sich

$$\Delta\mu = -0\text{''}0091 \qquad \Delta L' = +1\text{''}27$$
$$\Delta\Phi' = +1\text{''}41 \qquad \Delta\Omega' = -0\text{''}03$$
$$\Delta\Psi' = +0\text{''}21 \qquad di' = -0\text{''}02.$$

Man sieht, dass die bei der ersten Auflösung nothwendig vernachlässigten Glieder zweiter Ordnung nicht sehr merkbar sind, denn die hier gefundenen Correctionen sind in der That nicht sehr beträchtlich und es lässt sich mit Sicherheit erwarten, dass nun die Glieder zweiter Ordnung ohne nachtheilige Wirkung sein müssen. Bringt man diese Correctionen an die Elemente *B* an, so findet sich das neue definitive System ·

C.

$$L' = 50°58'50\text{''}01$$
$$\Phi' = +21933\text{''}89$$
$$\Psi' = +3491\text{''}25$$
$$\Omega' = 0°56'43\text{''}29$$
$$i' = 25°33'23\text{''}67$$
$$\mu = 851\text{''}6305$$
$$\pi' = 80°57'21\text{''}65$$
$$\varphi = 6\ 10\ 53{\cdot}15.$$

Ich habe auch dieses System derselben durchgreifenden Proberechnung unterzogen, wie das System *B*, und finde nun in der That die Darstellung der Orte durch die *f*-Coëfficienten (V), durch die Substitution in die Bedingungsgleichungen und durch die directe Rechnung in der befriedigendsten Übereinstimmung; das Resultat dieser Prüfung ist in folgender Zusammenstellung enthalten:

Die Fehler in den Normalorten

	nach den *f*-Coëffic. (V)		nach den Bedinggsglchgen		nach directer Rechnung	
	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
1866 Nov. 6·5	+0''23	−0''78	+0''23	−0''78	+0''22	−0''76
„ 21·5	+0·38	−0·95	+0·37	−0·95	+0·38	−0·97
„ 30·5	+0·26	+0·20	+0·26	+0·19	+0·28	+0·20
Dec. 9·5	−1·62	+1·37	−1·62	+1·37	−1·66	+1·35
„ 21·5	+1·72	+1·29	+1·71	+1·29	+1·70	+1·28
„ 31·5	−1·18	+0·80	−1·18	+0·81	−1·15	+0·77
1867 Febr. 3·5	+0·68	−1·80	+0·68	−1·80	+0·68	−1·82

Die schöne Übereinstimmung zwischen diesen Zahlenreihen beweist, dass mit dem System *C* das wahrscheinlichste Elementensystem erreicht ist und welche Genauigkeit man bei sorgfältiger siebenstelliger Rechnung erlangen kann. Es erübrigt nur noch, die obigen Elemente auf die Ekliptik zu übertragen, thut man dies und kürzt die Hunderttheile der Bogensekunde ab, so erhält man als die wahrscheinlichsten Elemente aus den Beobachtungen der ersten Opposition

(91) Ägina.

Osculation und Epoche 1866 Dec. 8·0 m. Berl. Zeit.
mittl. Äquinoct.: 1866·0

$$L = 50°53'44''0$$
$$M = 330\ 1\ 28·4$$
$$\pi = 80\ 52\ 15·6$$
$$\Omega = 11\ 0\ 30·1$$
$$i = 2\ 8\ 10·2$$
$$\varphi = 6\ 10\ 53·1$$
$$\mu = 851''6305$$
$$\log a = 0·4131703$$

und die Darstellung der Orte

			$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
1866	Nov.	6·5	+0''2	−0''8
	„	21·5	+0·4	−1·0
	„	30·5	+0·3	+0·2
	Dec.	9·5	−1·7	+1·4
	„	21·5	+1·7	+1·3
	„	31·5	−1·2	+0·8
1867	Febr.	3·5	+0·7	−1·8

Die Summe der Fehlerquadrate ist in Rücksicht auf die Gewichte

$$[nn] = 45''45.$$

Diese gute Darstellung lässt auf eine grosse Genauigkeit in den Beobachtungen schliessen, wie dies besonders bei der Güte der Vergleichssternpositionen erwartet werden durfte, und man könnte daraus den Schluss ziehen, dass die Unsicherheit der obigen Elemente demnach nur eine sehr mässige sein kann,

da sonst sofort die gute Übereinstimmung leiden möchte. Wenn auch das Berechtigte dieser Schlussfolgerung im allgemeinen zugegeben werden muss, so werden die Untersuchungen des dritten Abschnittes sofort zeigen, dass in der That die Elemente in verhältnissmässig weiten Grenzen geändert werden können, ohne den Beobachtungen geradezu zu widersprechen.

III. Ermittlung der Unsicherheit in den Elementen. Die ganz beträchtliche Unsicherheit, die den Elementen anhaftet, kann mit grosser Bestimmtheit aus den oben angeführten Bestimmungsgleichungen erkannt werden, wenn man die Kleinheit der Coëfficienten $[ee4]$ und insbesondere von $[ff5]$ beachtet. Die Unsicherheit der Elemente selbst aber auf die bekannte Weise nach der Methode der kleinsten Quadrate zu ermitteln scheint mir hier nicht ganz sachgemäss; die Methode der kleinsten Quadrate bewahrt in der Möglichkeit, selbst ein Mass zu geben für die Unsicherheit der durch dieselbe bestimmten Unbekannten, einen ihrer Hauptvorzüge, aber man wird nur dann berechtigt sein, den auf diesem Wege gewonnenen Resultaten Vertrauen zu schenken, wenn die Zahl der Bedingungsgleichungen eine grosse und man sicher ist, dass keine constanten Fehlerquellen wirksam sind; letzterer Nachtheil ist zwar im gegenwärtigen Falle gewiss nicht sehr hervortretend, wohl aber der erstere. Ich meine daher, dass man sich in diesen Fällen auf eine andere Weise ein Mass der Unsicherheit der Elemente zu schaffen hat, und dies erhält man, wenn man untersucht, in wie weit die Elemente abgeändert werden dürfen, ohne den Beobachtungen zu widersprechen; zur Entscheidung dieser letzteren Bedingung geben aber die zahlreichen anderweitigen Beobachtungen der kleinen Planeten ein sicheres Mass und es ist in der That keine grosse Erfahrung nöthig, um aus einem vorgelegten Fehlersysteme schliessen zu können, ob dasselbe mit den Beobachtungen vereinbar ist oder nicht; ja man wird sogar meist in der Lage sein, engere Grenzen anzugeben, für welche die übrig bleibenden Fehler wohl möglich aber nicht wahrscheinlich sind. Diesem Principe entsprechend werde ich die Untersuchung durchführen.

Es ist schon oben bemerkt worden, dass die quadratischen Coëfficienten in den Bestimmungsgleichungen der Grössen $\Delta\Phi'$

und $\Delta\mu$ die Unsicherheit in den Elementen anzeigen; hiermit aber ist nicht gesagt, dass nur diese Elemente Φ' und μ unsicher zu bestimmen sind, da Änderungen in diesen Elementen nöthwendig Änderungen von gleicher Ordnung in den übrigen Elementen veranlassen; nur die Elemente Ω' und i' sind gewissermassen ausgenommen und hiebei weniger unbestimmt, da in der That die dieselben hauptsächlich bestimmenden Bedingungen (die Breiten) wesentlich andere sind; es würde demnach gewiss nicht angemessen sein, eines dieser letzteren Elemente dazu benützen zu wollen, um die übrigen Elemente als Functionen dieses einen darzustellen. Am besten eignet sich wohl hiezu $\Delta\mu$, und ich habe deshalb diese Unbekannte in den Normalgleichungen schon mit Absicht als die letzte angesetzt; die Unsicherheit in $\Delta\mu$ hat aber noch den für die Vorausberechnung der Planetenorte sehr nachtheiligen Einfluss, dass diese im allgemeinen fortwährend mit der Zeit anwächst, während die Unsicherheit in den übrigen Elementen zwar grosse aber nur während eines Umlaufes periodisch wiederkehrende Fehler veranlassen kann. Es sollen demnach jetzt im allgemeinen die weitesten Grenzen gesucht werden, innerhalb deren alle sechs Elemente variabel sind ohne den Beobachtungen zu widersprechen. Die Gleichungen V des vorausgehenden Abschnittes lassen sich, wenn man dieselben durch das zugehörige Mass der Präcision dividirt und links vom Gleichheitszeichen der daselbst gewählten Einheit (10^s) entsprechend mit 10 multiplicirt, dazu verwerthen, um die Fehler in den Normalorten als Functionen von f oder $\Delta\mu$ darzustellen. Ferner gibt die in demselben Abschnitte gefundene Relation

$$e = [0_n77002] f$$

die Möglichkeit an die Hand, in Verbindung mit den Gleichungen I die übrigen Elemente als Function von $\Delta\mu$ darzustellen. Führt man die Rechnungen diesen Andeutungen gemäss durch, so findet man die Elemente, für welche das Äquinoctium, Epoche und Osculation wie oben gilt,

$$L' = 50°58'50"01 - 285"86\,\Delta\mu$$
$$\Phi' = +21933"89 \quad -189"26\,\Delta\mu$$
$$\Psi' = +3491"25 \quad +\ 36"07\,\Delta\mu$$

$$
\begin{aligned}
\Omega' &= 0°56'43"29 \;+4"12\,\Delta\mu \\
i' &= 25°33'23"67+1"17\,\Delta\mu \\
\mu &= 851"6305 \quad +\Delta\mu
\end{aligned}
$$

und die Darstellung der Orte durch diese Elemente, vorläufig die völlige Linearität der Änderungen vorausgesetzt, wird:

	$d\alpha\cos\delta$		$d\delta$	
1866 Nov. 6·9	+0"22	−1"40 $\Delta\mu$;	−0"76	−0"40 $\Delta\mu$
„ 21·5	+0·38	+0·94 $\Delta\mu$	−0·97	+0·32 $\Delta\mu$
„ 30·5	+0·28	+0·98 $\Delta\mu$	+0·20	+0·31 $\Delta\mu$
Dec. 9·5	−1·66	+0·46 $\Delta\mu$	+1·35	+0·13 $\Delta\mu$
„ 21·5	+1·70	−0·56 $\Delta\mu$	+1·28	−0·26 $\Delta\mu$
„ 31·5	−1·15	−1·26 $\Delta\mu$	+0·77	−0·48 $\Delta\mu$
1867 Febr. 3·5	+0·68	+0·34 $\Delta\mu$	−1·82	+0·20 $\Delta\mu$

Nennt man das Minimum der Fehlerquadrate $[vv]$, die Summe der Fehlerquadrate, die durch eine bestimmte Annahme über $\Delta\mu$ erhalten wird $[\varphi\varphi]$, so findet sich die letztere Grösse nach der Relation

$$[\varphi\varphi] = [vv] + 20''90(\Delta\mu)^2,$$

wobei natürlich auf die Gewichte der obigen Normalorte Rücksicht genommen ist. $[vv]$ ist aber oben gefunden worden 45″45, man hat also

$$[\varphi\varphi] = 45''45 + 20''90\,(\Delta\mu)^2.$$

Nimmt man daher $\Delta\mu$ vorerst mit $\pm 2''5$ und dann mit $\pm 5''0$ an, so erhält man für die Summe der Fehlerquadrate resp. 176″ und 568″, welche letztere Grösse mehr als 12mal grösser ist als das Minimum, und wenig Wahrscheinlichkeit mehr für sich hat; durchsichtiger werden die Verhältnisse aber, wenn man unmittelbar mit Hilfe der obigen Relationen die Darstellung der Orte sucht, man findet dann die folgende Übersichtstabelle:

	$\Delta\mu = -5·0$		$\Delta\mu = -2·5$		$\Delta\mu = 0·0$		$\Delta\mu = +2·5$		$\Delta\mu = +5·0$	
	$d\alpha\cos\delta$	$d\delta$	$d\alpha\cos\delta$	$d\delta$	$d\alpha\cos\delta$	$d\delta$	$d\alpha\cos\delta$	$d\delta$	$d\alpha\cos\delta$	$d\delta$
1866 Nov. 6·5	+7·2	+1·2	+3·7	+0·2	+0·2	−0·8	−3·3	−1·8	−6·8	−2·8
„ 21·5	−4·3	−2·6	−2·0	−1·8	+0·4	−1·0	+2·7	−0·2	+5·1	+0·6
„ 30·5	−4·6	−1·4	−2·2	−0·6	+0·3	+0·2	+2·7	+1·0	+5·2	+1·8
Dec. 9·5	−4·0	+0·7	−2·8	+1·0	−1·7	+1·4	−0·5	+1·7	+0·6	+2·0
„ 21·5	+4·5	+2·6	+3·1	+1·9	+1·7	+1·3	+0·3	+0·6	−1·1	0·0
„ 31·5	+5·2	+3·2	+3·0	+2·0	−1·2	+0·8	−4·3	−0·4	−7·5	−1·6
1867 Febr. 3·5	−1·0	−2·8	−0·2	−2·3	+0·7	−1·[illegible]	+1·5	−1·3	+2·4	−0·8

Der blosse Anblick zeigt, dass es bei der Güte der Beobachtungen unmöglich ist, $\Delta\mu$ gleich oder grösser als fünf Bogensekunden anzunehmen, man wird deshalb mit Gewissheit die Behauptung aufstellen können, dass die Unsicherheit der Elemente mit dieser Annahme über $\Delta\mu$ begrenzt erscheint, es ist sogar mehr als wahrscheinlich, dass $\Delta\mu$ kleiner ist als 2″5. Möchte ich mir aus dem Gang der Fehler, wie in der Eratoabhandlung, einen Schluss auf die wahren Elemente erlauben, so möchte ich glauben, dass dieselben innerhalb der Grenzen $\Delta\mu = 0$ und $\Delta\mu = +1''$ liegen. Mit dieser Tabelle hat man auch ein Urtheil über die oben gefundenen Quadratsummen erhalten, es wird nämlich sehr wahrscheinlich sein, dass die Summe der Fehlerquadrate kleiner als 176″ ist, gewiss ist dieselbe kleiner als 568″; diese Werthe werden später noch mit Vortheil benützt werden, bei der Grenzbestimmung von $\Delta\Phi'$.

Ein Bedenken kann aber gegen das obige Tableau erhoben werden; es frägt sich, ob die Linearität in den Änderungen innerhalb so weiter Grenzen hinreichend nahe eingehalten wird und ob nicht etwa die Darstellung der Orte für die äussersten Grenzwerthe völlig illusorisch ist. Dieses Bedenken ist um so mehr gerechtfertigt, da bei der obigen Prüfung der Differentialformeln bei nahe gleichwerthigen Änderungen der Einfluss der zweiten Differentialquotienten ganz merklich war. Dagegen kann erwähnt werden, dass der Einfluss der zweiten Differentialquotienten gering und nahe constant ist für alle Orte, dass demnach zwar die durch die Einführung von $\Delta\mu$ gefundenen Elemente nicht die Darstellung der Orte dem Fehlertableau gemäss geben, dass aber ganz geringe Änderungen derselben ausreichend sein werden, eine mit letzteren nahe übereinstimmende Fehlerreihe finden zu lassen. Diese Bemerkung könnte im allgemeinen genügen, da es in der That für die Grenzsysteme ohne Bedeutung ist, wenn dieselben mit Fehlern zweiter Ordnung behaftet erscheinen; ich werde aber in dieser Abhandlung mit Rücksicht auf das mir gesteckte Ziel diese Behauptung direct nachweisen.

Es sollen zunächst die wahrscheinlichsten Elemente unter der unveränderlichen Annahme $\Delta\mu = -5''$ gefunden werden; hiebei werden wir sofort auf grössere Unterschiede zweiter Ordnung gefasst sein müssen, als bei dem nächstfolgend zu unter-

suchenden Grenzwerthe $\Delta\mu = +5''$, weil die Differentialformeln dem Anfangs angeführten Systeme entsprechend nahe mit $\Delta\mu = +1''8$ berechnet sind. Es sind die Elemente nach Einführung $\Delta\mu = -5$

$$L' = 51°22'39\cdot31$$
$$\Phi' = +22880\cdot19$$
$$\Psi' = +\ 3310\cdot90$$
$$\Omega' = \ 0°56'22\cdot69$$
$$i' = 25°33'17\cdot82$$
$$\mu = 846\cdot6305$$
$$\pi' = 81°45'58\cdot01$$
$$\varphi = \ 6\ 26\ \ 7\cdot18.$$

Die directe Nachrechnung der Orte durch dieses System lässt die Fehler finden:

	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
1866 Nov. 6·5	+ 0·75	—1·65
„ 21·5	—10·21	—5·29
„ 30·5	—10·26	—3·98
Dec. 9·5	— 9·23	—1·69
„ 21·5	— 0·38	+0·26
„ 31·5	+ 0·36	+0·99
1867 Febr. 3·5	— 5·47	—4·65.

Die Summe der Fehlerquadrate ist mit Rücksicht auf das Gewicht und die Fehlereinheit von 10″

$$[nn] = 13\cdot1322.$$

Diese Fehler weichen beträchtlich, aber in continuirlicher Reihe von den Werthen des Fehlertableau's ab; man wird aber bald die Überzeugung gewinnen, dass ganz geringe Änderungen zweiter Ordnung in den Elementen nur nöthig sein werden, um einen befriedigenden Anschluss zu erhalten; zu diesem Ende wird man von den im zweiten Abschnitte mitgetheilten Differentialquotienten, den Normal- und Bestimmungsgleichungen Gebrauch machen unter der festen Annahme, $f = 0$, in Bezug auf das eben angeführte Elementensystem. Man hatte zu diesem Ende zu berechnen

$$[an] = -0\cdot12922 \qquad [cn] = -6\cdot46530$$
$$[bn] = -1\cdot67841 \qquad [dn] = -6\cdot69838$$

und zunächst, um der Unsicherheit der Auswerthung von e aus den Bestimmungsgleichungen zu entgehen, vorerst $e=0$ zu setzen. Die Summe der Fehlerquadrate lässt sich durch Änderung der vier ersten Unbekannten auf 5·6339 herabbringen und die hiefür nöthigen Änderungen sind bestimmt durch

$$\log d = 9_n 23768$$
$$\log c = 9\cdot 98935$$
$$\log b = 8_n 28107$$
$$\log a = 7\cdot 40727.$$

Benützt man nun die im zweiten Abschnitte in den Gleichungen III angeführten Coëfficienten der Grösse e, so werden sich aus den jetzt gefundenen Fehlern die folgenden Bedingungsgleichungen zur Bestimmung von e ergeben:

Rectascensionen	Declinationen	
$+1\cdot 2639 = [8_n 1421]e$	$+0\cdot 2186 = [7_n 7292]e$	
$-0\cdot 7152 = [7_n 5263]e$	$-0\cdot 4338 = [7_n 1239]e$	
$-0\cdot 9043 = [7\cdot 5416]e$	$-0\cdot 2650 = [7\cdot 1303]e$	
$-0\cdot 6648 = [7\cdot 9042]e$	$+0\cdot 1412 = [7\cdot 4955]e$	VII.
$+0\cdot 6491 = [7\cdot 9745]e$	$+0\cdot 3618 = [7\cdot 5705]e$	
$+0\cdot 8723 = [8\cdot 0538]e$	$+0\cdot 5409 = [7\cdot 6464]e$	
$-0\cdot 2506 = [8_n 0860]e$	$-0\cdot 5200 = [7_n 6021]e$	

es findet sich damit

$$\log e = 0\cdot 0084$$

und damit nach den Gleichungen I die durch diese Annahme über e in den übrigen vier Elementen entstehenden Änderungen. Dieselben sind in Verbindung mit den oben mitgetheilten von e unabhängigen Correctionen:

$$d\Phi' = -2\cdot 09$$
$$d\Psi' = +1\cdot 20$$
$$d\Omega' = +0\cdot 23$$
$$di' = +0\cdot 05$$
$$dL' = -8\cdot 27$$

und hiemit ist die oben aufgestellte Behauptung gerechtfertigt, dass die erforderlichen Änderungen zweiter Ordnung sehr gering sind. Die Elemente selbst werden

$$L' = 51^\circ 22' 31''04$$
$$\Phi' = +22878''10$$
$$\Psi' = +3312''10$$
$$\Omega' = 0^\circ 56' 22''92$$
$$i' = 25^\circ 33' 17\cdot 87$$
$$\mu = 846''6305$$
$$\log a = 0\cdot 4148751$$
$$\pi' = 81^\circ 45' 44''75$$
$$\varphi = 6\ 26\ \ 5\cdot 28$$

und die Darstellung der Orte

			$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
1866	Nov.	6·5	+7"4	+1"3
	„	21·5	−4·1	−2·5
	„	30·5	−4·5	−1·3
	[illegible]	9·5	−3·9	+0·8
	„	21·5	+4·5	+2·5
	„	31·5	+5·0	+3·1
1867	Febr.	3·5	−1·4	−3·0

welche Fehler fast identisch sind mit jenem des oben abgeleiteten Fehlertableau's und hiermit ist auch der zweite Theil meiner Behauptung, dass der Einfluss der Glieder zweiter Ordnung ein nahe constanter ist, gerechtfertigt.

Ganz in derselben Weise habe ich die Untersuchung für $\Delta\mu = +5''0$ durchgeführt. Als Ausgangselemente erhält man

$$L' = 50^\circ 35' 0''71$$
$$\Phi' = +20987''59$$
$$\Psi' = +3671''60$$
$$\Omega' = 0^\circ 57' 3''89$$
$$i' = 25^\circ 33' 29''52$$
$$\mu = 856''6305$$
$$\pi' = 80^\circ\ 4' 37''23$$
$$\varphi = 5\ 55\ 44\cdot 40.$$

Die Darstellung wird wieder nicht ganz in Übereinstimmung mit dem Fehlertableau, wie folgt, gefunden.

			$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
1866	Nov.	6·5	—8"04	—3"37
	„	21·5	+3·79	+0·08
	„	30·5	+4·00	+1·26
	Dec.	9·5	—0·58	+1·42
	„	21·5	—2·23	—0·45
	„	31·5	—8·53	—2·09
1867	Febr.	3·5	+1·28	—1·20

Lässt man wieder keine Abänderung in μ zu, so sind die wahrscheinlichsten Correctionen der übrigen Elemente

$$d\Phi' = +0"19 \qquad d\Omega' = +0"01$$
$$d\Psi' = -2"24 \qquad di' = +0\cdot03$$
$$dL' = +2"12$$

und hiemit die Elemente

$$L' = 50°35'2"83$$
$$\Phi' = +20987"78$$
$$\Psi' = +3669"36$$
$$\Omega' = 0°57'3"90$$
$$i' = 25°33'29"55$$
$$\mu = 856"6305$$
$$\log a = 0\cdot4114754$$
$$\pi' = 80°\ 4'58"91$$
$$\varphi = 5\ 55\ 44\cdot20$$

und die Darstellung der Orte in naher Übereinstimmung mit dem Fehlertableau

			$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
1866	Nov.	6·5	—6"9	—2"9
	„	21·5	+4·9	+0·6
	„	30·5	+5·1	+1·8
	Dec.	9·5	+0·5	+1·9
	„	21·5	—1·1	+0·1
	„	31·5	—7·3	—1·5
1867	Febr.	3·5	+2·7	—0·6

Beide Grenzsysteme geben die Summe der Fehlerquadrate etwas kleiner als die obigen Formeln, für das erstere ($\Delta\mu = -5"$) finde ich 563"3, für das letztere ($\Delta\mu = +5"$) 564"0. Ich werde daher die oben gefundene Zahl dahin modificiren, dass eine

Summe der Fehlerquadrate von 564'' nach den Beobachtungen unzulässig ist, und annehmen

$$[\varphi\varphi] = 45'' + 20''8(\Delta\mu)^2.$$

Die Systeme für $\Delta\mu = \pm 2''5$ habe ich nicht direct gesucht, sondern einfach durch Interpolation mit zweiten Differenzen zwischen den Systemen $\Delta\mu = -5''$, $\Delta\mu = 0$ und $\Delta\mu = +5''$ bestimmt und dazu mich der Elemente Φ' und Ψ' bedient; es hat sich hiebei abermals gezeigt, dass diese Elemente einen weit lineareren Charakter an sich haben, als die sonst üblichen Elemente π' und φ; dies gibt ein Zeugniss, dass es in der That vortheilhaft ist, bei Benützung der obigen Differentialformeln, wenn grosse Änderungen zu erwarten stehen, die früher genannten Elemente zu benützen.

Die Untersuchung ist bisher so geführt worden, dass nur $\Delta\mu$ als unsicher zu bestimmende Grösse betrachtet wurde, die Kleinheit des Coëfficienten $[ee4]$ macht es jedoch wünschenswerth, auch auf die aus demselben entstehenden Unsicherheiten Rücksicht zu nehmen; hiezu bieten aber die übrig bleibenden Summen der Fehlerquadrate geeignete Anhaltspunkte. Berücksichtigt man die e-Coëfficienten in den Gleichungen VII, so findet man, dass man jene darstellen kann durch

$$[\varphi\varphi] = [vv] + 0''01748(\Delta\Phi')^2$$

oder in Verbindung mit der früher für $\Delta\mu$ gefundenen Gleichung,

$$[\varphi\varphi] = 45'' + 20''8(\Delta\mu)^2 + 0''01748(\Delta\Phi')^2,$$

wofür man, um die Coëfficienten homogener zu machen, auch schreiben kann

$$[\varphi\varphi] = 45'' + 20''8[(\Delta\mu^2 + (\frac{d\Phi'}{34\cdot 5})^2].$$

Daraus kann man zunächst schliessen, dass eine Änderung in $\Delta\Phi'$ von 34''5 gleichwerthig ist einer Änderung von 1'' in $\Delta\mu$, es daher wahrscheinlich ist, dass $\Delta\Phi'$ wohl innerhalb der Grenzen $\pm 86''2$ steht, sicher aber innerhalb $\pm 172''5$ angenommen werden muss, um nicht den Beobachtungen zu widersprechen, da ja für $\Delta\mu$ $\pm 2''5$ und $\pm 5''0$ dieselben Schlüsse gezogen wurden. Stellt man nun die Elemente selbst als Functionen von $\Delta\mu$ und

$d\Phi'$ dar, wobei unter $d\Phi'$ die von $\Delta\mu$ unabhängige Veränderung von $d\Phi'$ vorgestellt ist, so findet sich

$$L' = 50°58'50"01 + 2"458\Delta\Phi' - 285"86\Delta\mu$$
$$\Phi' = +21933"89 + \Delta\Phi' - 189"26\Delta\mu$$
$$\Psi' = +3491"25 - 0"893\Delta\Phi' + 36"07\Delta\mu$$
$$\Omega' = 0°56'43"29 - 0"024\Delta\Phi' + 4"12\Delta\mu$$
$$i' = 25°33'23"67 - 0"019\Delta\Phi' + 1"17\Delta\mu$$
$$\mu = 851"6305 + \Delta\mu$$

und die Darstellung der Orte

		$d\alpha \cos\delta$		
1866 Nov.	6·5	+0"2	−1"40$\Delta\mu$	−1"34$(\Delta\Phi':34·5)$
„	21·5	+0·4	+0·94 „	−0·33 „
„	30·5	+0·3	+0·98 „	+0·29 „
Dec.	9·5	−1·7	+0·46 „	+0·78 „
„	21·5	+1·7	−0·56 „	+1·12 „
„	31·5	−1·2	−1·26 „	+1·10 „
1867 Febr.	3·5	+0·7	+0·34 „	−1·18 „

		$d\delta$		
1866 Nov.	6·5	−0"8	−0"40$\Delta\mu$	−0"52$(\Delta\Phi':34·5)$
„	21·5	−1·0	+0·32 „	−0·13 „
„	30·5	+0·2	+0·31 „	+0·11 „
Dec.	9·5	+1·4	+0·13 „	+0·30 „
„	21·5	+1·3	−0·26 „	+0·44 „
„	31·5	+0·8	−0·48 „	+0·43 „
1867 Febr.	3·5	+1·8	+0·20 „	−0·39 „

und man wird stets dieselbe Summe der Fehlerquadrate erhalten, so oft man den Ausdruck

$$\Delta\mu^2 + (\Delta\Phi' : 34·5)^2$$

gleich macht, was auf sehr verschiedene Arten erlangt werden kann, doch mit jeder Zunahme der Unsicherheit in $\Delta\mu$ muss die Unsicherheit in $\Delta\Phi'$ abnehmen oder umgekehrt, was an sich klar ist, da für die Grenzsysteme $\Delta\mu = 5''$ keine Änderung in Φ' gestattet ist, ohne die ohnehin unerträglich grosse Summe der Fehlerquadrate zu vergrössern. $\Delta\mu$ steht zu $\frac{d\Phi'}{34·5}$ im Verhältnisse des Sinus zum Cosinus eines Winkels für eine gegebene Summe der Fehlerquadrate. Man wird zu beachten haben, dass für

$\Delta\Phi'$: 34·5 der Einfluss auf die Elemente beträchtlich geringer ist als der durch $\Delta\mu$ veranlasste, was a priori zu erwarten war, und dass durch die erstere Untersuchung schon die weitesten Grenzen für die Elemente erreicht sind. Man ist aber hieraus nicht zu dem Schlusse berechtigt, dass z. B. die heliocentrische Länge, welche die Grenzsysteme von $\Delta\mu$ angeben, nothwendig die heliocentrischen Längen einschliessen, welche die Grenzsysteme für $\Delta\Phi'$ anweisen. Ich werde dies hier nachweisen. Lässt man die Bahnlage ungeändert, so wird jede kleine Änderung der Länge in der Bahn mit Benützung der allgemein üblichen Bezeichnung dargestellt sein durch

$$dv = \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi dM + (\frac{2}{\cos\varphi} + \operatorname{tg}\varphi\cos v)\sin v d\varphi + d\pi'$$

ersetzt man nun aber

$$M = L' - \pi',$$

so wird man auch haben

$$dv = \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi dL' + (\frac{2}{\cos\varphi} + \operatorname{tg}\varphi\cos v)\sin v d\varphi + (1 - \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi)d\pi'.$$

Um nun den Übergang auf die oben benützten Elemente machen zu können, wird man zu beachten haben, dass ist

$$\begin{aligned}\cos\varphi d\varphi &= \sin\pi' d\Phi' + \cos\pi' d\Psi' \\ \sin\varphi d\pi' &= \cos\pi' d\Phi' - \sin\pi' d\Psi';\end{aligned}$$

vernachlässigt man nun, was bei einer solchen Überschlagsrechnung gestattet ist, die ersten Potenzen der Excentricität, so hat man zunächst

$$dv = dL' + 2\sin v d\varphi - 2\cos v(\sin\varphi d\pi')$$

und durch Einführung der neuen Elemente wird erhalten

$$dv = dL' - 2\cos(v+\pi')d\Phi' + 2\sin(v+\pi')d\Psi'.$$

Dieser Ausdruck gibt nun das geeignetste Hilfsmittel ab, dv die Unsicherheit in der heliocentrischen Länge in der Bahn genähert berechnen zu können, so weit dieselbe von der Unsicherheit der Elemente abhängig ist. Ich will vorerst $\Delta\mu$ vornehmen. dL', $d\Phi'$ und $d\Psi'$ lassen sich nun mit Hilfe der obigen Zahlen leicht als Functionen von $\Delta\mu$ hinschreiben, es fand sich nämlich oben:

$$\Delta L' = -285\cdot9\Delta\mu = \alpha\,\Delta\mu$$
$$\Delta\Phi' = -189\cdot3\Delta\mu = \beta\,\Delta\mu$$
$$\Delta\Psi' = +\;36\cdot1\Delta\mu = \gamma\,\Delta\mu.$$

Man wird daher setzen dürfen, wenn man mit t die seit der Epoche verflossene Zeit in Tagen bezeichnet,

$$dv = \{\alpha + t - 2\beta(L' + t\mu) + 2\gamma(L' + t\mu)\}\,\Delta\mu.$$

Schreibt man überdies

$$s \sin S = -2\beta$$
$$s \cos S = 2\gamma$$
$$Q = L' + S,$$

so hat man zur Berechnung der Unsicherheit in dv, so weit dieselbe von $\Delta\mu$ abhängig ist, genähert

$$dv = [\alpha + t + s \sin(Q + t\mu)]\Delta\mu$$

oder numerisch dem Beispiele hier entsprechend

$$dv = [-286 + t + 385 \sin(130°2 + t\mu)]\Delta\mu,$$

mit welcher Formel man sofort die aus $\Delta\mu$ entstehende Unsicherheit für ein gegebenes Zeitmoment abschätzen kann.

Ganz ähnlich werden sich die Formeln für $\Delta\Phi'$ ableiten lassen, man hat wieder mit Benützung der oben gefundenen Coëfficienten

$$\Delta L' = +2\cdot46\Delta\Phi' = a\,\Delta\Phi'$$
$$\Delta\Psi' = -0\cdot89\Delta\Phi' = b\,\Delta\Phi',$$

es wird also genähert

$$dv = [a - 2\cos(v + \pi') + 2b \sin(v + \pi')]\Delta\Phi'$$

und setzt man

$$\sigma \sin \Sigma = -2$$
$$\sigma \cos \Sigma = 2b$$
$$\pi' + \Sigma = q$$

so wird auch

$$dv = [a + \sigma \sin(q + v)]\Delta\Phi'$$

oder numerisch

$$dv = [+2\cdot5 + 2\cdot7 \sin(309°3 + v)]\Delta\Phi',$$

mit welcher Formel es möglich ist, sofort für einen gegebenen Punkt in der Bahn den Einfluss der Unsicherheit in $\Delta\Phi'$ abzuschätzen. Man sieht sofort, dass dieser Fehler nur periodisch ist, während der aus $\Delta\mu$ entstehende mit der Zeit anwächst.

Ich habe mir nun die Hilfsmittel geschafft, um meine obige Behauptung über die Grenzen der Unsicherheit in der heliocentrischen Bahnlänge zu erweisen; es wird sofort der oben erwähnte Fall eintreten, wenn

$$[a+\sigma\sin(q+v)]\Delta\Phi' > [\alpha+t+s\sin(Q+t\mu)]\Delta\mu$$

und in der That kann sogar der Coëfficient von $\Delta\mu$ der Null gleich werden, sobald durch t der Bedingung genügt wird, dass

$$-t = \alpha+s\sin(Q+t\mu)$$

wird. Man hat zu diesem Ende diese transcendente Gleichung aufzulösen. Sofort ist es klar, dass für $t=0$ eine genäherte Lösung stattfinden muss, und dass, wenn t positiv gedacht wird, nothwendig

$$-t < \alpha - s$$

sein muss, wenn eine Lösung möglich sein soll. Für den vorliegenden Fall wird man aber t nicht grösser als 671 annehmen dürfen und in der That findet die einzig brauchbare Lösung für $t=658$ statt. Ich werde dieses Resultat direct prüfen. Rechnet man mit den drei Elementensystemen $\Delta\mu = -5''$, $\Delta\mu = 0$, $\Delta\mu = +5''$ die Länge in der Bahn für die äquatorealen Elemente für einen Zeitpunkt, der 658 Tage nach der Epoche liegt, so findet sich:

$\Delta\mu =$	-5	$0''$	$+5''$
$M =$	124°21′	125°41′	127° 5′
$E =$	129 19	130 23	131 31
$v =$	134 8	134 56	135 50
$L' =$	215 54	215 53	215 54

also so nahe identisch als es nur immer bei einer so rohen Näherung erwartet werden darf. Die Grenzen für L', so weit dieselben von der Unsicherheit des Elementes Φ' abhängen, werden aber für diesen Punkt nach der obigen Formel gefunden, wenn man $\Delta\Phi' = \pm 170$ annimmt,

$$dv = \pm 884^s$$

und diese Unsicherheit ist für den gegebenen Punkt zufällig nahe ein Maximum. Beachtet man, dass für den gegebenen Zeitpunkt stets dv, so weit es von $\Delta\mu$ abhängig, der Null gleich ist, gleichgiltig welche Annahme über $\Delta\mu$ gemacht ist, dass ferner $\Delta\Phi'$ offenbar viel grösser angenommen wurde, als man dies nach der Güte der Beobachtungen erwarten kann, ferner dass an den anderen Punkten in der Bahn der Einfluss eines Fehlers in $\Delta\mu$ weit überwiegend ist gegen den aus $\Delta\Phi'$ folgenden, so wird man zugeben müssen, dass für diesen Zeitpunkt alle Elementensysteme, die sich den Beobachtungen nur halbwegs anschliessen, dem Planeten nahehin denselben Ort anweisen werden. Hiemit habe ich die Richtigkeit der Bemerkung des Hr. L. Schulhof, die derselbe bei seiner mit einem so schönen Erfolg gekrönten Hecuba-Abhandlung (Sitzungsberichte LXIII. Band, Februar-Heft) über das Zusammentreffen verschiedener Elementensysteme für eine bestimmte Zeit gemacht hat, nachgewiesen und muss hier erwähnen, dass mich diese interessante Bemerkung zu der vorstehenden Abweichung von dem nächsten Zwecke der Abhandlung veranlasst hat.

Ich kehre nun zu den obigen Formeln zurück, um dieselben für den vorliegenden Zweck zu verwerthen, nämlich zu untersuchen, wie weit die Grenzen durch die Unsicherheit von $\Delta\mu$ und $\Delta\Phi'$ für die kommende Opposition (Febr. 1872), in der ich den Planeten auf Grundlage vorstehender Rechnungen zu finden hoffe, gesteckt werden müssen. Am 31. Jänner 1872 wird $t = 1880$ und $v = 66°$ sein, damit wird man, wenn ich wieder $\Delta\mu = \pm 5^s$, $\Delta\Phi = \pm 170$ annehme, die Unsicherheit in der Bahnlänge genähert finden,

$$\text{aus } \Delta\mu \doteq \pm 1°9$$
$$\text{aus } \Delta\Phi' \doteq \pm 0\cdot 2$$

also der erstere Einfluss ist bei weitem, wie es zu erwarten war, überwiegend, so dass man für die Einhaltung der Ephemeridenorte mit den durch $\Delta\mu$ bestimmten Grenzen sich mit Sicherheit verbürgen kann. Schliesslich muss ich nochmals darauf hinweisen, dass man die hier gefundenen Zahlen wegen den ziemlich beträchtlichen Vernachlässigungen doch wohl nur als rohe An-

näherungen auffassen darf, und welche nur eine beiläufige Abschätzung der Unsicherheitsgrenzen vermitteln sollen.

IV. **Ableitung der Aufsuchungsephemeriden.** Vor allem war es nöthig, die Jupiterstörungen in Rechnung zu ziehen, da dieselben gemeinhin so bedeutend sind, dass dieselben einem ganz wesentlichen Bruchtheil der Unsicherheit des vorausberechneten Ortes gleichkommen. Ich habe die Rechnung nach der Methode der Variation der Constanten durchgeführt, aber als Elemente ausser der Länge in der Bahn (L) und der täglichen mittleren siderischen Bewegung (μ) gewählt

$$\Omega = \sin i \sin \Omega \qquad \Psi = \sin\varphi \cos\pi$$
$$\Xi = \sin i \cos \Omega \qquad \Phi = \sin\varphi \sin\pi.$$

Diese Elemente haben den Vortheil, dass man dieselben länger als die gewöhnlich üblichen Elemente constant beibehalten darf. Ich habe aber die Rechnung nicht ganz streng durchgeführt, sondern, wenn man mit R_o, S_o und W_o die bekannten Störungscomponenten bezeichnet, angenommen:

$$\frac{d\Omega}{dt} = r W_o \sin(v+\pi)$$

$$\frac{d\Xi}{dt} = r W_o \cos(v+\pi)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -p\cos(v+\pi) R_o + r\left\{\left(\frac{p}{r}+1\right)\sin(v+\pi) + \sin\varphi\sin\pi\right\}$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = p\sin(v+\pi) R_o + r\left\{\left(\frac{p}{r}+1\right)\cos(v+\pi) + \sin\varphi\cos\pi\right\}.$$

Hiebei sind nur Glieder von der zweiten Potenz der Neigung in die Störungen und Glieder des Productes Neigung und Excentricität in die Störungen übergangen, welche Grössen fast unmerklich sind bei der kleinen Neigung und Excentricität.

Als Intervall habe ich 80 Tage, für die Jupitermasse $\frac{1}{1049}$ und als fixe Ebene die Ekliptik 1870,0 angenommen und die Störungen einmal (6. Mai 1869) auf die Elemente übertragen. Die gefundenen Differentialquotienten waren:

			$80\frac{d\Omega}{dt}$	$80\frac{d\Xi}{dt}$	$80\frac{d\Phi}{dt}$	$80\frac{d\Psi}{dt}$	$6400\frac{d\mu}{dt}$	$80\frac{dL}{dt}$
1866	Aug.	10	+0"01	+0"04	+ 7"3	− 4"8	+ 0"89	+16"1
	Oct.	29	−0·04	−0·06	+ 9·3	+ 2·1	− 4·18	+11·8
1867	Jän.	17	−0·10	−0·07	+12·9	+ 4·7	− 7·44	+ 5·6
	April	7	−0·11	−0·02	+15·3	+ 3·6	− 8·76	− 1·3
	Juni	26	−0·08	+0·02	+15·3	+ 1·3	− 8·29	− 7·8
	Sept.	14	−0·03	+0·02	+13·4	− 0·2	− 6·67	−13·2
	Dec.	3	+0·01	−0·02	+11·1	0·0	− 4·05	−17·1
1868	Febr.	21	+0·02	−0·09	+ 9·8	+ 1·5	− 1·39	−19·4
	Mai	11	−0·02	−0·16	+10·0	+ 3·4	+ 1·14	−20·1
	Juli	30	−0·10	−0·22	+11·5	+ 4·6	+ 3·35	−19·4
	Oct.	18	−0·20	−0·24	+13·8	+ 4·6	+ 5·19	−17·5
1869	Jän.	6	−0·31	−0·20	+16·2	+ 3·3	+ 6·65	−14·6
	März	27	−0·39	−0·13	+17·9	+ 1·0	+ 7·71	−10·8
	Juni	15	−0·44	−0·02	+18·7	− 2·3	+ 8·34	− 6·4
	Sept.	3	−0·43	+0·10	+17·9	− 5·3	+ 8·49	− 1·3
	Nov.	22	−0·36	+0·19	+16·0	− 7·6	+ 8·01	+ 3·9
1870	Febr.	10	−0·24	+0·24	+12·9	− 8·2	+ 6·66	+ 9·2
	Mai	1	−0·10	+0·19	+ 9·8	− 6·0	+ 4·11	+13·8
	Juli	20	−0·01	+0·03	+ 8·4	− 0·3	− 0·13	+16·7
	Oct.	8	−0·05	−0·25	+11·0	+ 8·9	− 6·57	+15·9
	Dec.	27	−0·38	−0·59	+19·6	+20·0	−15·10	+ 7·6
1871	März	17	−1·15	−0·78	+31·3	+28·5	−22·79	−13·5
	Juni	5	−2·17	−0·42	+32·2	+31·8	−20·80	−46·8
	Aug.	24	−2·51	+0·55	+ 8·4	+35·6	− 1·82	−67·9
	Nov.	12	−1·66	+1·19	−15·3	+42·1	+17·95	−51·7
1872	Jän.	31	−0·64	+1·00	−17·7	+40·5	+21·99	−19·7
	April	20	−0·12	+0·53	−11·1	+29·1	+15·87	+ 4·1

Zu vorstehenden Zahlen wäre zu bemerken, dass dieselben nicht mit dem wahrscheinlichsten Elementensysteme berechnet sind, sondern mit den ersten, Eingangs angeführten, nur angenähert richtigen Werthen, da mir zur Zeit, als ich die Störungsrechnungen ausführte, die Vergleichssternpositionen nicht vollständig zur Verfügung standen, also das definitive System noch nicht zu ermitteln war. Integrirt man diese Werthe zwischen den Grenzen 1866 Dec. 8·0 und 1872 Jän. 31·0, so finden sich die Störungen

$$\Delta\Omega = -11''1$$
$$\Delta\Xi = -0\cdot1$$
$$\Delta\Phi = +309\cdot1$$
$$\Delta\Psi = +185\cdot1$$

Beilage zu pag. 788.

12ʰ Berl. Zeit	$\Delta\mu = -5''0$			… $= +5''0$		
	α	δ	$\log \Delta$		δ	$\log \Delta$
1871 Dec. 16	10ʰ 30ᵐ 52ˢ	+11°50'8	0·2735	10ʰ	+ 9°52'0	0·2936
17	10 30 22	+11 48·4		10	+ 9 48·7	
18	10 31 50	+11 46·2		10	+ 9 45·6	
19	10 32 17	+11 44·1		10	+ 9 42·6	
20	10 32 42	+11 42·1	0·2633	10	+ 9 39·7	0·2834

$$\Delta L = -5'13"0 - 4'27"9 = -9'40"9$$
$$\Delta\mu = -0"188.$$

Über die Helligkeit des Planeten, eine Angabe, die für die Nachforschungen von Bedeutung ist, konnte ich nur eine Bemerkung auffinden; der Leipziger Beobachter schätzt am 10. November 1866, den Planeten 11. Grösse; man hat daher zur Berechnung seiner jeweiligen Grösse (m) die Formel

$$m = 8 \cdot 4 + 5 \log (r\Delta).$$

Seine mittlere Oppositionsgrösse ist demnach etwa 11·5.

Indem somit alle Hilfsmittel für die Vorausberechnung geschafft sind, kann nun an dieselbe unmittelbar geschritten werden; ich habe die für die verschiedenen Annahmen über $\Delta\mu$ geltenden Elemente auf die Ekliptik 1870·0 übertragen, hierauf die obigen Störungen angebracht, und indem ich als mittleres Äquinoctium das des Jahresanfanges 1870·0 beliess, die Osculation und Epoche aber auf 1872 Jänner 31·0 mittlere Berliner Zeit übertrug, erhielt ich für die Berechnung der Ephemeriden die folgenden Elemente und Äquatorconstanten:

$\Delta\mu$	—5"0	—2"5	0"0	+2"5	+5"0
L	133°18'52"	134°25'21"	135°31'49"	136°38'16"	137°44'40"
M	51 55 11	53 25 28	54 56 39	56 28 47	58 1 56
π	81 23 41	80 59 53	80 35 10	80 9 29	79 42 44
☊	10 55 50	10 57 31	10 59 16	11 1 0	11 2 44
i	2 8 2	2 8 6	2 8 10	2 8 13	2 8 17
φ	6 31 40	6 24 5	6 16 30	6 8 56	6 1 23
μ	846"442	848"942	851"442	853"942	856"442
log a	0·41494	0·41409	0·41324	0·41239	0·41154
A'	171°23'14"	170°59'27"	170°34'43"	170° 9' 2"	169°42'17"
B'	81 34 50	81 11 5	80 46 24	80 20 44	79 54 1
C'	80 32 28	80 8 32	79 43 39	79 17 48	78 50 54
sin a	9·99999	9·99999	9·99999	9·99999	9·99999
sin b	9·95530	9·95530	9·95530	9·95530	9·95529
sin c	9·63485	9·63486	9·63488	9·63489	9·63490

Daraus leitet man die beiliegenden Ephemeriden ab. (Siehe Beilage.)

Die vorstehenden Ephemeriden geben den Ort des Planeten bezogen auf das zugehörige wahre Äquinoctium und ich habe zu denselben zu bemerken, dass es mir am empfehlenswerthesten

erscheint, vorerst die Zone zwischen $\Delta\mu = 0$ und $\Delta\mu = +2'5$ zur Nachforschung vorzunehmen, indem mir diese die meiste Wahrscheinlichkeit auf Erfolg zu versprechen scheint; sollten die Nachforschungen in derselben erfolglos sein, so wäre die Zone zwischen $\Delta\mu = -2'5$ und $\Delta\mu = 0{\cdot}0$ vorzunehmen, und erst dann, wenn wider Erwarten auch hier die Nachforschungen sich vergebens erweisen sollten, die äusseren Zonen zu durchmustern, aber wieder der positiven Richtung von $\Delta\mu$ den Vorzug gebend; innerhalb dieser äussersten Zonen muss der Planet gefunden werden und ich wage nach meinen Erfahrungen über diesen Gegenstand die Behauptung auszusprechen, dass die Zone der Unsicherheit wohl kaum die Grenzen von 20' in Bezug auf Breite überschreiten wird. Sternchen also, die sich bei der Eintragung in die Karte ausserhalb dieser Zone befinden, sind gewiss nicht der vorliegende Planet; so habe ich in der That bei Erato nur vier Sterne in die Karte eingetragen, die mir in der durch die Rechnung bestimmten Zone zu liegen schienen, und in der That war einer, und der dem errechneten Orte zunächst gelegene Stern der verlorene, nunmehr gesicherte Planet; dadurch, dass man sich die Anzahl der zu untersuchenden Sterne durch dieses Verfahren so beschränkt, ist man in der Lage, dieselben sofort mikrometrisch zu bestimmen, und wenn die Bewegung nicht allzu klein ist, schon in derselben Nacht über den Charakter des Objectes die Entscheidung zu treffen.

Schliesslich hätte ich zu erwähnen, dass die Grösse des Planeten beim Beginne der Ephemeride nahe 12·0 sein wird, zur Zeit der Opposition (1872 Febr. 22 nach dem wahrscheinlichsten Systeme) wird der Planet unbedeutend schwächer als eilfter Grösse sein; die Aufsuchungsephemeriden bis über die Opposition hin auszudehnen, schien mir nicht nöthig, da die Auffindung bis zu diesem Zeitpunkte wohl gelungen sein dürfte.

Nachschrift.

Während des Druckes dieser Abhandlung ist mir die Wiederauffindung des Planeten (91) Ägina am 20. December 1871 geglückt; die Correction der obigen wahrscheinlichsten Ephemeride ($\Delta\mu = 0$) war nur

$$d\alpha = +5^s$$
$$d\delta = -0'5$$

Die näheren Angaben über diese Auffindung enthält der akademische Anzeiger vom 4. Jänner 1872.

XXIX. SITZUNG VOM 20. DECEMBER 1871.

Herr Prof. Dr. A. Winckler legt eine Abhandlung: „Über die Entwicklung und Summation einiger Reihen“ vor.

Herr Director Dr. J. Stefan überreicht eine Abhandlung: „Über die diamagnetische Induction“.

Derselbe theilt ferner mit, dass er die von ihm früher entwickelte Theorie der Bewegung von Gasgemengen dadurch vervollständigt habe, dass er aus den Grundsätzen der dynamischen Theorie des gasförmigen Aggregatzustandes den Widerstand berechnete, welchen ein Gas bei der Bewegung durch ein zweites von diesem erfährt.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg: Mémoires. VII. Série. Tome XV, Nrs. 5—8; Tome XVI, Nrs. 1—8. St. Pétersbourg, 1870; 4⁰. — Bulletin. Tome XV, Nrs. 1—5; Tome XVI, Nr. 1. St. Pétersbourg, 1871; 4⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei: Atti. Anno XXII, Sess. 1ª—7ª (1868—69); Anno XXIV, Sess. 4ª e 6ª (1871). Roma; 4⁰.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1870 (Bd. 78. 22). Altona, 1871; 4⁰.

Bureau pour la recherche géologique de la Suède: Sveriges geologiska Undersökning. 10. & 11. Häftet. Bladen 31—41. Folio. Nebst Text in 8⁰.

Génootschap, Bataviaasch, van Kunsten en Wetenschappen: Verhandelingen. Deel XXXIII. Batavia 1868; 4⁰. — Tijdschrift. Deel XVI (V. Serie, Deel II.), Aflev. 2—6 (1866—

1867); Deel XVII (V. Serie, Deel III), Aflev. 1—6. (1868—1869); Deel XVIII (V. Serie, Deel IV), Aflev. 1 (1868). Batavia; 8°. — Notulen. Deel IV, Afl. 2. (1867); Deel V (1867); Deel VI (1868); Deel VII (1869), Nr. 1. Batavia; 8°. — Catalogus der ethnologische afdeeling van het Museum. (1868); Catalogus der numismatische afdeeling van het Museum. (1869) Batavia; 8°.

Gesellschaft, Naturforschende, in Basel: Verhandlungen. V. Theil, 3. Heft. Basel, 1871; 8°.

Göttingen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1869/70. 4° & 8°.

Institution, The Royal, of Great Britain: Proceedings. Vol. VI. Parts I & II (Nrs. 52—53). London, 1870; 8°. — List of the Members etc. 1870. 8°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band IV, 8. Heft. Leipzig, 1871; 8°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1871, Nr. 23. Wien; 8°.

Marburg, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1869/70. 4° & 8°.

Mittheilungen des k. k. technischen und administrativen Militär-Comité. Jahrgang 1871, 12. Heft. Wien; 8°.

Nature. Nr. 111, Vol. V. London, 1871; 4°.

Observatoire physique central de Russie: Annales. Années 1866, 1867 & 1868. St. Pétersbourg, 1870 & 1871; 4°. — Repertorium für Meteorologie. Band I, Heft 2 (1870); Bd. II, Heft 1 (1871). St. Petersburg; 4°. — Jahresbericht für 1870. St. Petersburg, 1871; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1871, Nr. 15. Wien; 8°.

Society, The Chemical, of London: Journal. Ser. 2, Vol. VIII, May—December 1870; Vol. IX, January—July 1871. London; 8°.

Society, The Linnean, of London: Transactions. Vol. XXVII, Parts 1—4. London, 1869—1870; 4°. — Journal. Botany. Vol. XI, Nrs. 52—56; Vol. XIII, Nr. 65 (1869—1871); 8°. Zoology. Vol. X, Nrs. 47—48; Vol. XI, Nrs. 49—52. London, 1870—71; 8°. — Proceedings. Sessions 1869—70, and 1870—71. 8°. — Lists, 1869 & 1870. 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXI Jahrgang, Nr. 50. Wien, 1871; 4°.

Über die diamagnetische Induction.

Von dem w. M. J. **Stefan.**

Die vorliegende Abhandlung bildet eine Ergänzung zu der „über die Gesetze der elektrodynamischen Induction" [1]. In dieser wurden die Verschiedenheiten auseinandergesetzt, welche die Erscheinungen der elektrodynamischen, elektromagnetischen und magnetischen Induction in ihren Beziehungen zum Princip der Erhaltung der Energie darbieten. Es ist nachgewiesen worden, dass der Aufwand an chemischer Energie in den Ketten der in den Strombahnen entwickelten Wärme und der gleichzeitig geleisteten mechanischen Arbeit, wenn zwei elektrische Ströme auf einander wirken, nicht, wie in dem Fall der Wechselwirkung eines Stromes und eines Magnetes, äquivalent ist, sondern dass den chemischen Kräften im ersteren Falle noch eine andere Leistung obliegt, deren Arbeitswerth durch das Potential der beiden Ströme auf einander bestimmt ist. Diese Leistung kann als zur Hervorrufung eines eigenthümlichen Zustandes im umgebenden Medium verwendete betrachtet werden, jede Schwächung dieses Zustandes ist wieder von einer äquivalenten Wärmeentwicklung in den Strombahnen begleitet.

Auf Grundlage dieses Satzes sind Gleichungen für die Bewegung der Elektricität in zwei wechselseitig aufeinander wirkenden Strombahnen aufgestellt und aus ihnen die Gesetze der elektrodynamischen Induction abgeleitet worden.

Es ist ferner gezeigt worden, dass auch die Gesetze der elektromagnetischen Induction aus diesen Gleichungen sich ableiten lassen, obwohl diese Gesetze von vorneherein die Noth-

---

[1] Sitzungsberichte LXIV.

wendigkeit der Betrachtung anderer Vorgänge, als der Wärmeentwicklung und der Arbeitsleistung auszuschliessen scheinen. Ebenso sind die Gesetze der magnetischen Induction aus denselben Gleichungen entwickelt worden und in der vorliegenden Abhandlung sollen in analoger Weise auch die Gesetze der diamagnetischen Induction aus ihnen gefolgert werden.

Die Gleichungen für die Bewegung der Elektricität in zwei geschlossenen Stromleitungen sind

$$e = wi + \frac{d}{dt}(2iU + i'V) \qquad (1)$$

$$e' = w'i' + \frac{d}{dt}(2i'U' + iV) \qquad (2)$$

Darin bedeuten e und e' die elektromotorischen Kräfte, w und w' die Widerstände, i und i' die Stromintensitäten in den zwei Bahnen. Ferner bedeutet U das Potential der ersten, U' das der zweiten Leitung auf sich selbst, V das Potential der beiden Leitungen auf einander unter der Voraussetzung von Stromstärken, welche der Einheit gleich sind.

Zu diesen zwei Gleichungen kommt noch eine dritte für den Zuwachs dL der lebendigen Kraft, welchen die beiden Leiter in der Zeit dt durch die Wirkung äusserer und der elektrodynamischen Kräfte erfahren.

$$dL = dA + i^2 dU + i'^2 dU' + ii' dV \qquad (3)$$

worin dA die Arbeit, welche die äusseren Kräfte in der Zeit dt leisten, bedeutet.

Zur Erklärung des Verhaltens diamagnetischer Körper aus den vorstehenden Gleichungen genügt es, mit Weber anzunehmen, „dass ein Wismuthstab aus Molecülen besteht, welche in sich zurücklaufende Bahnen (oder Canäle) enthalten, in denen die elektrischen Fluida ohne Widerstand beweglich sind, während sie in allen anderen Bahnen nur mit Überwindung eines ihrer Geschwindigkeit proportionalen Widerstands beweglich sind. Die Entstehung eines reinen, mit Magnetismus nicht vermischten Diamagnetismus setzt ausserdem voraus, dass die Molecüle mit jenen Bahnen oder Canälen

nicht drehbar sind; denn sonst würden drehbare Molecularströme entstehen, die, wie Ampère bewiesen hat, einen magnetischen Zustand zur Folge haben, wenn sich bei der Drehung ihre Intensität nicht ändert".

An Stelle des zweiten Stromleiters, auf den sich die mit Strichen versehenen Grössen in den Gleichungen (1, 2, 3) beziehen, soll nun ein solches Wismuthmolecül, dessen Strombahn keinen Widerstand und auch keine eigenthümliche elektromotorische Kraft besitzt, gesetzt werden. Es ist also in Gleichung (2)

$$e' = 0 \text{ und } w' = 0$$

einzuführen und bleibt

$$\frac{d}{dt}(2i'U' + iV) = 0$$

Ferner setze ich voraus, dass die Strombahn des Wismuthmolecüls, wenn kein inducirender Strom auf dieselbe wirkt, stromlos ist, dass also

$$i' = 0 \text{ wenn } iV = 0$$

dann verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$2i'U' + iV = 0 \tag{4}$$

welche jetzt an die Stelle der Gleichung (2) zu treten hat.

Die Grössen U, U', V sind an sich positiv. Diese Gleichung lehrt demnach, dass i' immer das entgegengesetzte Zeichen von i hat.

Der Einfachheit wegen setze ich ferner voraus, dass die Strombahn des Wismuthmolecüls von unveränderlicher Gestalt ist. Dann ist i' dem i proportional und der Proportionalfactor nur abhängig von der relativen Lage des inducirenden Stromes gegen das Wismuthmolecül.

Aus der Gleichung (4) folgt ferner

$$i'^2 U' = -\frac{ii'V}{2} \tag{5}$$

das Potential des im Wismuthmolecül inducirten Stromes auf sich selbst ist immer halb so gross, als

das Potential des inducirenden Stromes auf den inducirten.

Es sollen nun folgende specielle Fälle betrachtet werden:

1. Schliessung und Unterbrechung eines Stromes in der Nähe eines Wismuthmolecüls.

Bleibt die Gestalt des Stromleiters unverändert, ebenso die relative Lage desselben gegen das Wismuthmolecül, so sind U und V ebenso wie U' constante Grössen. Die Gleichung (1) verwandelt sich in

$$e = wi + 2U\frac{di}{dt} + V\frac{di'}{dt}$$

oder wenn man für i' den Werth aus (4) einsetzt

$$e = wi + 2U\frac{di}{dt} - \frac{V^2}{2U'}\frac{di}{dt} \qquad (6)$$

In dieser Formel stellt $2U\frac{di}{dt}$ die der elektromotorischen Kraft e entgegenwirkende Induction, welche der Leiter auf sich selbst ausübf, dar. Das letzte Glied stellt die elektromotorische Kraft des durch die Anwesenheit des Wismuthmolecüls verursachten Inductionsstromes dar, dieser ist also mit dem Strom i gleich gerichtet. Durch die Anwesenheit des Wismuthmolecüls wird das Ansteigen des Stromes i beschleunigt.

Das Integral der Gleichung (6) ist leicht herzustellen. Zur Bestimmung der Integrationsconstante dient die Bedingung $i = 0$ für $t = 0$.

Die von den chemischen Kräften in der Kette geleistete Arbeit ist gegeben durch

$$\int eidt = \int wi^2dt + i^2U - \frac{V^2}{4U'}i^2 \qquad (7)$$

oder mit Benützung der Gleichungen (4) und (5) durch

$$\int eidt = \int wi^2dt + i^2U + i'^2U' + ii'V$$

Diese Gleichung macht die Verwandlung der Energie der chemischen Kräfte ($\int eidt$) in die in der Leitung auftretende

Wärme ($\int wi^2dt$), in das Potential des Stromes i auf sich selbst (i^2U), in das Potential des Stromes i' auf sich selbst (i'^2U') und in das Potential dieser beiden Ströme auf einander ($ii'V$) ersichtlich. Da letzteres Potential aber negativ und dem absoluten Werthe nach doppelt so gross als i'^2U', so ist, wie die Gleichung (7) auch unmittelbar zeigt, die auf Potentialerzeugung aufgewendete Energie kleiner, wenn die Kette in der Nähe eines Wismuthmolecüls geschlossen wird, als wenn dies bei Abwesenheit eines solchen geschieht, und zwar kleiner um

$$\frac{V^2}{4U'}i^2 = -\frac{ii'V}{2} = i'^2U'$$

Die Umwandlung der während der Schliessung einer Kette auf Potentialerzeugung verwendeten Energie in Wärme geht bei der Öffnung der Kette vor sich, sie bildet den Extrastrom.

Es muss also umgekehrt die durch den Extrastrom in der Leitung entwickelte Wärme kleiner sein, wenn die Kette in der Nähe eines Wismuthmolecüls geöffnet wird, als wenn dies bei Abwesenheit eines solchen Molecüls geschieht, und zwar ist die entwickelte Wärme kleiner um

$$\frac{V^2}{4U'}i^2.$$

Es gibt dies auch die Gleichung (6), in welcher für den Fall der Öffnung der Kette $e = 0$ gesetzt und bei der Integration $i = \frac{e}{w}$ für $t = 0$ genommen werden muss. Es folgt

$$\int wi^2dt = i^2U - \frac{V^2}{4U'}i^2.$$

2. Bewegung eines Wismuthmolecüls durch einen Strom.

Wird vorausgesetzt, dass die Leitung des Stromes i ihre Gestalt unverändert beibehält, so kommt die Gleichung (1) jetzt in der Form

$$e = wi + 2U\frac{di}{dt} + \frac{d}{dt}(i'V) \tag{8}$$

zur Anwendung. Dazu kommt noch die Gleichung (3), welche wenn keine anderen als die elektrodynamischen Kräfte thätig sind, sich zusammenzieht auf

$$dL = ii'dV.$$

Da i' negativ ist, so ist eine Bewegung des Wismuthmolecüls durch den Strom nur in der Richtung des abnehmenden V möglich. Die dem Molecül während der Abstossung desselben in unendliche Entfernung ertheilte lebendige Kraft ist bestimmt durch

$$L = \int ii'dV = -\frac{1}{2U'}\int i^2 VdV.$$

Hat i einen so grossen Werth, dass die Änderung desselben während der Fortschiebung des Wismuthmolecüls vernachlässigt werden kann, so hat man

$$L = -\frac{i^2}{2U'}\int VdV = \frac{i^2V^2}{4U'} = -\frac{ii'V}{2}$$

da der Endwerth von V für unendliche Entfernung $= 0$ ist.

Die gewonnene lebendige Kraft ist also gleich dem halben Anfangswerthe des Potentials des Stromes i auf den Strom im Wismuthmolecül.

Die gleichzeitig von den chemischen Kräften entwickelte Energie ist nach Gleichung (8)

$$\int eidt = \int wi^2dt + \int id(i'V).$$

Das Glied Ui^2 fällt weg, da Anfangs- und Endwerth von i gleich sind.

Die nicht in Wärme innerhalb der Strombahn verwandelte Energie ist

$$\int id(i'V) = i\int d(i'V) = -ii'V$$

unter Vernachlässigung der Veränderlichkeit von i. Die von den chemischen Kräften während der Fortschie-

bung des Wismuthmolecüls verrichtete Arbeit ist also doppelt so gross, als die von dem Molecül gewonnene lebendige Kraft. Es muss nämlich die eine Hälfte dieser Arbeit nun jenen Betrag an Potential erzeugen, um welchen bei Schliessung des Stromes wegen der Nähe des Wismuthmolecüls weniger erzeugt worden ist, und dieser Betrag ist, wie vorhin gezeigt wurde $-\frac{ii'V}{2}$. Um eben diesen Betrag wird auch bei der Unterbrechung des Stromes nach Entfernung des Wismuthmolecüls der Extrastrom mehr Wärme in der Leitung entwickeln, als er bei Unterbrechung in der Nähe des Wismuthmolecüls entwickeln würde.

3. Bewegung eines Wismuthmolecüls durch einen Magnet.

Ein Magnet kann als ein System von Strömen, welche mit gleicher und unveränderlicher Intensität in widerstandslosen, gegen einander verschiebbaren Bahnen fliessen, betrachtet werden. Wird statt des einen vom Strom i durchflossenen Leiters ein Magnet angenommen, so ist die Gleichung (1) zu ersetzen durch so viele Gleichungen als Ströme im Magnete existiren. In jeder solchen Gleichung ist die elektromotorische Kraft und der Widerstand Null zu setzen und enthält dieselbe ausser dem Potential eines Stromes auf sich selbst die Potentiale dieses auf alle übrigen im Magnete und auf den Strom im Wismuthmolecül. Die Summe aller dieser Gleichungen nimmt jedoch wieder die Form

$$0 = \frac{d}{dt}(2iU + i'V)$$

an. Darin bedeutet jetzt U das Gesammtpotential des den Magnet bildenden Stromsystems, V das Potential dieses Systemes auf den Strom im Wismuthmolecül, alle diese Ströme von der Einheit der Intensität vorausgesetzt.

Da i eine constante Grösse, so ist auch

$$0 = \frac{d}{dt}(2i^2U + ii'V).$$

Wird wieder, wie in der früheren Abhandlung,

$$i^2 U = P,\ iV = W$$

gesetzt, so treten an die Stelle der Gleichungen (1), (4) und (3) die folgenden

$$\frac{d}{dt}(2P + iW) = 0 \tag{9}$$

$$2i'U' + W = 0 \tag{10}$$

$$dL = dA + dP + i'dW. \tag{11}$$

Zu den äusseren, d. h. nicht elektrodynamischen Kräften, deren Arbeitselement mit dA bezeichnet ist, sind nun auch die in Magneten thätigen Coërcitivkräfte zu rechnen. Sind ausser diesen keine anderen äusseren Kräfte vorhanden, so bedeutet dA das Element der Arbeit, welche die Coërcitivkräfte bei einer gegenseitigen Verschiebung der Elementarströme im Magnete leisten und kann man, wie auch in der früheren Abhandlung geschehen, für Stahlmagnete

$$dA + dP = 0 \tag{12}$$

setzen, so dass die Gleichung (11) sich zu

$$dL = i'dW \tag{13}$$

vereinfacht.

Die Gleichung (10) gibt die Stärke des durch den Magnet im Wismuthmolecül inducirten Stromes.

$$i' = -\frac{W}{2U'} \tag{14}$$

Es folgt aus ihr ferner nach Multiplication mit i'

$$i'^2 U' = -\frac{i'W}{2} \tag{15}$$

der Satz, dass das Potential des Stromes im Wismuthmolecül auf sich selbst gleich ist dem halben Potential des Magnetes auf diesen Strom, letzteres Potential dem absoluten Werthe nach genommen.

Die Gleichung (9) gibt die Beziehung zwischen dem Potential des Magnetes auf sich selbst und seinem Potential auf den Strom im Wismuthmolecül oder dem Potential dieses auf sich selbst. Da $i'W$ negativ ist, so lehrt diese Gleichung, dass die Annäherung eines Wismuthmolecüls an einen Magnet, mit welcher $i'W$ dem absoluten Werthe nach wächst, auch ein Wachsthum von P verbunden ist, d. h. bei Annäherung eines Wismuthmolecüls an einen Magnet wird dieser schwächer, umgekehrt bei Entfernung des Molecüls stärker.

Eine Bewegung des Wismuthmolecüls durch die magnetischen Kräfte ist, da i' negativ, nur in der Richtung der abnehmenden W möglich. Die während der Abstossung in unendliche Entfernung dem Wismuthmolecül ertheilte lebendige Kraft ist nach (13)

$$L = \int i' d W'$$

oder mit Benützung der Gleichung (14)

$$L = -\frac{1}{2U'}\int W d W = \frac{W^2}{4U'} = -\frac{i'W}{2}.$$

Die dem Wismuthmolecül ertheilte lebendige Kraft ist gleich dem halben Anfangswerthe des Potentials des Magnetes auf den Strom im Wismuthmolecül.

Während dieser Abstossung verschwindet das Potential des Stromes im Wismuthmolecül auf sich selbst $\left(i'^2 U' = -\frac{i'W}{2}\right)$ und das Potential dieses Stromes auf den Magnet ($i'W$). In Wirklichkeit tritt also eine Potentialvermehrung um $-\frac{i'W}{2}$ ein. Das Äquivalent derselben bildet die Verminderung des Potentials des Magnetes auf sich selbst, welche nach Gleichung (9)

$$\int dP = -\int d\left(\frac{i'W}{2}\right) = \frac{i'W}{2}$$

beträgt.

Als Äquivalent der vom Wismuthmolecül gewonnenen lebendigen Kraft bleibt nun nach Gleichung (12)

die Arbeit der gleichzeitg thätigen Coërcitivkräfte im Magnete übrig, die durch

$$A = -\int dP = -\frac{i'W}{2} = L$$

bestimmt ist.

In ähnlicher Weise wie für ein einzelnes magnetisches Molecül lassen sich auch für ein System von solchen Molecülen die analogen Sätze gewinnen.

Über die Entwicklung und Summation einiger Reihen.

Von dem w. M. Dr. A. Winckler.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. December 1871.)

Die Gegenstände, auf welche die nachfolgenden Bemerkungen sich beziehen, sind drei nicht in näherm Zusammenhange stehende Arten theils endlicher, theils unendlicher Reihen.

Zuerst wird die Entwicklung bestimmter Integrale in einer Form, welche bei Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ihre Anwendung findet, betrachtet und dann in verschiedenen anderen wesentlich allgemeineren Formen dargestellt.

Zu einer zweiten Bemerkung hat mir der Aufsatz von Jacobi: „Zur combinatorischen Analysis" (Journal von Crelle, B. 22) Veranlassung gegeben, welcher eine merkwürdige Summenformel zum Gegenstand hat, die, wie hier gezeigt wird, als einfachster Fall einer den Elementen der Differentialrechnung angehörigen Formel betrachtet werden kann. Aus dieser letztern Formel ergeben sich mit Leichtigkeit eine Anzahl nicht minder bemerkenswerther theils bekannter, theils neuer Summenformeln derselben Art.

Der Schluss dieses Aufsatzes beschäftigt sich mit der Summirung von Reihen, welche, soviel mir bekannt, bis jetzt nicht betrachtet worden sind und welche im einfachsten Fall die Form

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(b_1^{\lambda+n}-a_1^{\lambda+n})(b_2^{\lambda+n-1}-a_2^{\lambda+n-1})\,.\,.(b_n^{\lambda+1}-a_n^{\lambda+1})\,.\,\frac{x^{\lambda+n}\overset{(\lambda+n)}{f}(0)}{(\lambda+n)!}$$

haben. Es ergibt sich, dass die Summe dieser Reihen immer und auch dann noch, wenn Gruppen von Zwischengliedern in einer bestimmten Anzahl und Ordnung weggelassen werden, durch eine lineare Zusammensetzung von Werthen der Function

$f(z)$ mit verschiedenen Werthen des Arguments z sich ausdrücken lässt.

Den allgemeinen Formeln einige specielle Anwendungen beizufügen, habe ich nicht unterlassen, und die meines Wissens bereits bekannten Resultate in jedem einzelnen Falle als solche bezeichnet.

1.

In der Théorie analyt. des probabilités (Livre prem., sec. Partie, Chap. prem.) von Laplace findet man die Herleitung einer Formel, welche zur näherungsweisen Berechnung des Integrals einer von grossen Zahlen abhängigen Function dient und die, abgesehen von dieser speciellen Anwendung, auch ihrer Allgemeinheit wegen von Interesse ist. Jene Herleitung aber bewegt sich, indem sie von einer durch die Sache selbst nicht bedingten Transformation des Differentialausdrucks Gebrauch macht, auf einem Umwege und lässt den viel kürzern Weg, der nicht blos zu der bezeichneten Formel, sondern zu noch allgemeineren Entwicklungen direct hinführt, nicht erkennen; auch lässt sie den Rest unberücksichtigt, welcher der betreffenden, auf eine endliche Anzahl von Gliedern beschränkten Reihe beizufügen ist.

Die durch diesen Rest vervollständigte Formel ergibt sich nun unmittelbar aus der wiederholten in gewisser Weise modificirten Anwendung der theilweisen Integration, und obgleich diese Art der Herleitung (welche ich übrigens schon in meinen an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe 1849—50 gehaltenen Vorlesungen befolgte) sehr elementar ist, so nehme ich doch umso weniger Anstand, sie hier anzudeuten, als mir bisher, ausser jener von Laplace, keine andere bekannt worden ist.

Es sei

$$\int_a^b f(x)dx$$

das zu entwickelnde Integral. Betrachtet man dasselbe zunächst ohne Rücksicht auf die Grenzen, so ist offenbar

$$\int f(x)dx = f(x) \cdot \frac{f(x)}{f'(x)} - \int f(x) \cdot d \cdot \frac{f(x)}{f'(x)}$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$u = f(x), \quad z_1 = \frac{d\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{dx}$$

gesetzt wird:

$$\int u dx = \frac{u^2}{u'} - \int u z_1 \, dx.$$

Das Integral rechter Hand unterziehe man ebenfalls der theilweisen Integration und setze zu dem Ende:

$$u z_1 = \frac{du}{dx} \cdot z_1 \frac{u}{u'},$$

dann folgt:

$$\int u z_1 \, dx = \frac{u^2}{u'} z_1 - \int u \, d\left(\frac{u}{u'} z_1\right)$$

oder, wenn

$$z_2 = \frac{d\left(\frac{u}{u'} z_1\right)}{dx}$$

gesetzt wird:

$$\int u z_1 \, dx = \frac{u^2}{u'} z_1 - \int u z_2 \, dx.$$

Auf diese Weise kann weiter verfahren werden und man überzeugt sich, dass, wenn nacheinander

$$z_1 = \frac{d\left(\frac{u}{u'}\right)}{dx}$$

$$z_2 = \frac{d\left(\frac{u}{u'} z_1\right)}{dx}$$

$$\cdots\cdots$$

$$z_n = \frac{d\left(\frac{u}{u'} z_{n-1}\right)}{dx}$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$\int u dx = \frac{u^2}{u'}\,[1 - z_1 + z_2 - \ldots + (-1)^{n-1} z_{n-1}] + (-1)^n \int u z_n dx$$

sich ergibt. Hieraus erhält man, abgesehen vom Restintegral, die Laplace'sche Formel, wenn beide Seiten zwischen den Grenzen a und b von x genommen werden. Wird nämlich

$$\frac{u}{u'} = \frac{f(x)}{f'(x)} = y$$

gesetzt, so folgt unmittelbar:

$$\int_a^b f(x)dx =$$

$$\frac{f(b)^2}{f'(b)}\left[1 - \frac{dy}{dx} + \frac{d.ydy}{dx^2} - \ldots + (-1)^{n-1}.\frac{d.yd.y..dy}{dx^{n-1}}\right]_{x=b}$$

$$-\frac{f(a)^2}{f'(a)}\left[1 - \frac{dy}{dx} + \frac{d.ydy}{dx^2} - \ldots + (-1)^{n-1}.\frac{d.yd.y..dy}{dx^{n-1}}\right]_{x=a}$$

$$+ (-1)^n \int_a^b f(x)\,\frac{d.yd.y..dy}{dx^n}\,dx,$$

wofür man übrigens, da $f(x) = e^{\int\frac{dx}{y}}$ ist, auch

$$\int_a^b e^{\int\frac{dx}{y}}.dx =$$

$$\left[\left(1 - \frac{dy}{dx} + \frac{d.ydy}{dx} - \ldots + (-1)^{n-1}.\frac{d.yd.y..dy}{dx^{n-1}}\right) y\, e^{\int\frac{dx}{y}}\right]_{x=a}^{x=b}$$

$$+ (-1)^n \int_a^b e^{\int\frac{dx}{y}}.\frac{d.yd.y..dy}{dx^n}\,dx \quad \ldots (I)$$

schreiben kann.

2.

Es ist leicht, verschiedene andere Entwicklungen für das gegebene Integral dadurch zu erhalten, dass man in den aufeinanderfolgenden theilweisen Integrationen verschiedene Anordnungen eintreten lässt. Um dies zu zeigen, werde angenommen, es seien $U_1, U_2, \ldots U_n$ im Allgemeinen beliebig zu wählende Functionen von x und

$$\int u dx$$

das zu entwickelnde Integral. Ferner sei der Abkürzung wegen

$$X_1 = \int \frac{u'}{U_1} dx, \quad X_2 = \int \frac{u'}{U_2} X_1 dx, \quad \ldots X_n = \int \frac{u'}{U_n} X_{n-1} dx \quad \ldots (1)$$

und

$$z_1 = \frac{d\left(\frac{u}{u'} U_1\right)}{dx}, \quad z_2 = \frac{d\left(\frac{z_1}{u'} U_2\right)}{dx}, \quad \ldots z_n = \frac{d\left(\frac{z_{n-1}}{u'} U_n\right)}{dx} \quad \ldots (2)$$

wobei wieder $\frac{du}{dx} = u'$ gesetzt worden ist.

Dann hat man:

$$u dx = \frac{u'}{U_1} dx . \left(u U_1 \frac{dx}{du} \right),$$

folglich

$$\int u dx = X_1 U_1 \frac{dx}{du} - \int X_1 \, d \left(u U_1 \frac{dx}{du} \right)$$

oder also:

$$\int u dx = X_1 U_1 \frac{dx}{du} - \int X_1 z_1 dx .$$

In dem Integral rechter Hand schreibe man

$$X_1 z_1 = \frac{u'}{U_2} X_1 . \left(z_1 U_2 \frac{dx}{du} \right),$$

so ergibt sich durch theilweise Integration

$$\int X_1 z_1 dx = X_2 U_2 z_1 \frac{dx}{du} - \int X_2 z_2 dx$$

und nach einem analogen Vorgange:

$$\int X_2 z_2 dx = X_3 U_3 z_2 \frac{dx}{du} - \int X_3 z_3 dx.$$

Fährt man auf diesem Wege fort, so ergibt sich zuletzt die folgende Gleichung:

$$\int u dx =$$

$$\frac{dx}{du}[X_1 U_1 u - X_2 U_2 z_1 + X_3 U_3 z_2 - \ldots + (-1)^{n-1} X_n U_n z_{n-1}]$$
$$+ (-1)^n \int X_n z_n dx$$

worin $X_1, X_2, \ldots X_n$ und $z_1, z_2, \ldots z_n$ die in (1) und (2) festgestellte Bedeutung haben.

Hieraus erhält man für das bestimmte Integral die Formel:

$$\int_a^b u dx =$$

$$\left[\frac{1}{u'}(X_1 U_1 u - X_2 U_2 z_1 + X_3 U_3 z_2 - \ldots + (-1)^{n-1} X_n U_n z_{n-1})\right]_{x=a}^{x=b}$$
$$+ (-1)^n \int_a^b X_n z_n dx. \quad \ldots (\mathrm{II})$$

Die Laplace'sche Formel (I) ergibt sich hieraus wieder, wenn man

$$U_1 = 1, \quad U_2 = U_3 = \ldots = U_n = u$$

also

$$X_1 = X_2 = X_3 = \ldots = X_n = u$$

setzt.

Wird allgemeiner angenommen, es sei

$$U_1 = \frac{1}{u^r}, \quad U_2 = U_3 = \ldots = U_n = \frac{1}{u^{r-1}}$$

wofür

$$X_1=\frac{u^{r+1}}{r+1},\quad X_2=\frac{u^{2r+1}}{(r+1)(2r+1)},\quad X_3=\frac{u^{3r+1}}{(r+1)(2r+1)(3r+1)},$$

$$\ldots\ldots\quad X_n=\frac{u^{nr+1}}{(r+1)(2r+1)\ldots(nr+1)}$$

erhalten wird, und daher

$$z_1=\frac{d\left(\frac{1}{u'u^{r-1}}\right)}{dx},\quad z_2=\frac{d\left(\frac{z_1}{u'u^{r-1}}\right)}{dx},\quad \ldots z_n=\frac{d\left(\frac{z_{n-1}}{u'u^{r-1}}\right)}{dx}$$

ist, so gelangt man zu der Gleichung

$$\int_a^b u\,dx=\left[\frac{u^2}{u'}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{u^r z_1}{(r+1)(2r+1)}+\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.+(-1)^{n-1}.\frac{u^{(n-1)r}z_{n-1}}{(r+1)(2r+1)\ldots(nr+1)}\right)\right]_a^b$$

$$+\frac{(-1)^n}{(r+1)(2r+1)\ldots(nr+1)}\int_a^b u^{nr+1}.z_n dx$$

Für $r=2$, und wenn man

$$u=f(x),\qquad y=\frac{1}{f(x)f'(x)}$$

setzt, geht diese Gleichung über in die folgende:

$$\int_a^b f(x)dx=$$

$$\frac{f(b^2)}{f'(b)}\left[\frac{1}{3}-\frac{f(x)^2}{3.5}.\frac{dy}{dx}+\ldots+(-1)^{n-1}.\frac{f(x)^{2n-2}}{3.5\ldots(2n+1)}.\frac{d.yd.y\ldots d.y}{dx^{n-1}}\right]_{x=b}$$

$$-\frac{f(a)^2}{f'(a)}\left[\frac{1}{3}-\frac{f(x)^2}{3.5}.\frac{dy}{dx}+\ldots+(-1)^{n-1}.\frac{f(x)^{2n-2}}{3.5\ldots(2n+1)}.\frac{d.yd.y\ldots d.y}{dx^{n-1}}\right]_{x=a}$$

$$+\frac{(-1)^n}{3.5\ldots(2n+1)}.\int_a^b f(x)^{2n+1}.\frac{d.yd.y\ldots d.y}{dx^n}dx,$$

worin, wie man leicht bemerkt, auch

$$f(x)=2\sqrt{\int\frac{dx}{y}}$$

gesetzt werden kann.

Um noch einen besondern Fall der Gleichung (II) zu betrachten, werde angenommen, es sei

$$U_1=U_2=\ldots=U_n=\frac{u'}{s'},$$

wobei s eine gegebene Function von x bezeichnet. Man hat dann

$$X_1=s,\quad X_2=\frac{s^2}{2!},\quad \ldots X_n=\frac{s^n}{n!}$$

und

$$z_1=\frac{d\left(\frac{u}{s'}\right)}{dx},\quad z_2=\frac{d\left(\frac{z_1}{s'}\right)}{dx},\quad \ldots z_n=\frac{d\left(\frac{z_{n-1}}{s'}\right)}{dx},$$

folglich die Gleichung:

$$\int u\,dx=$$

$$\frac{s}{s'}\left[u-\frac{s}{2!}z_1+\frac{s^2}{3!}z_2-\ldots+(-1)^{n-1}.\frac{s^{n-1}}{n!}z_{n-1}\right]$$
$$+\frac{(-1)^n}{n!}\int s^n z_n\,dx.$$

Wenn in einer dieser Formeln das Restintegral für $n=\infty$ verschwindet, so wird die entsprechende, ins Unendliche fortgesetzte Reihe convergiren und den Werth des entwickelten Integrals wirklich darstellen.

3.

Die schon lang bekannte, in den Lehrbüchern jedoch meist vergeblich gesuchte Formel für den n. Differentialquotienten einer Function von einer Function lässt sich zur Ermittlung der Summe

gewisser endlicher Reihen benutzen, deren Bildungsweise keineswegs so einfach, wie bei gewöhnlichen Reihen, sondern combinatorischer Natur ist und von welchen meines Wissens bis jetzt nur wenige Beispiele betrachtet worden sind. Die Sache liegt übrigens so nahe, dass die folgenden kurzen Bemerkungen genügen mögen.

Der in Rede stehende Differentialquotient lässt sich auf zwei verschiedenen Wegen finden. Ist nämlich

$$y = f(u), \qquad u = \varphi(x),$$

so ergeben sich nacheinander die Gleichungen:

$$\frac{y'}{u'} = f'(u)$$

$$\frac{1}{u'} D \frac{y'}{u'} = f''(u)$$

$$\frac{1}{u'} D \frac{1}{u'} D \frac{y'}{u'} = f'''(u)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{u'} D \frac{1}{u'} D \frac{1}{u'} \ldots D \frac{y'}{u'} = f^{(n)}(u),$$

wobei die Anzahl der durch D angedeuteten Differentiationen $n-1$ beträgt.

Werden aus diesen n Gleichungen $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ successive eliminirt, so ergibt sich eine Gleichung für die gesuchte Grösse $y^{(n)}$

Ein zweiter Weg führt direct zu einem Ausdruck für $y^{(n)}$, dessen Herstellung in gegebenen Fällen manchmal leichter ist. Lässt man nämlich in den Gleichungen

$$y = f(u), \qquad u = \varphi(x), \qquad y = f[\varphi(x)] = \psi(x)$$

die ursprüngliche Veränderliche x um h wachsen, wodurch u in $u+k$ übergeht, und substituirt man in der Entwicklung von $f(u+k)$ die nach Potenzen von h entwickelte Änderung k, so lässt sich daraus mittelst des Polynomialsatzes der Coëfficient von h^n finden. Dieser Coëfficient mit $n!$ multiplicirt, stellt dann den Ausdruck für $\psi^{(n)}(x)$ dar, welcher, wie sich von selbst versteht, für endliche Werthe von n immer nur eine endliche Anzahl von Gliedern liefert. Auf diese Weise ergibt sich die bekannte Formel:

$$\sum\left(\frac{\varphi'(x)}{1!}\right)^{i_1}\left(\frac{\varphi''(x)}{2!}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}\right)^{i_n}\cdot\frac{f^{(i_1+i_2+\cdots+i_n)}(u)}{i_1!\,i_2!\cdots i_n!}=\frac{\psi^{(n)}(x)}{n!}\quad\ldots(\mathrm{I})$$

worin für i_1, i_2, $\ldots i_n$ alle positiven ganzen Zahlen, die Null mit eingeschlossen, zu setzen sind, welche der Bedingung

$$i_1+2i_2+3i_3+\ldots+ni_n=n\quad\ldots(p)$$

Genüge leisten.

Es ist für sich klar, dass in dem besondern Fall, wenn $\varphi^{(m+1)}(x)$, $\varphi^{(m+2)}(x)\ldots$ verschwinden und dabei m unter n liegt, nur m Zahlen i vorkommen können, und die vorige Gleichung durch die folgende:

$$\sum\left(\frac{\varphi'(x)}{1!}\right)^{i_1}\left(\frac{\varphi''(x)}{2!}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!}\right)^{i_m}\cdot\frac{f^{(i_1+i_2+\cdots+i_m)}(u)}{i_1!\,i_2!\cdots i_m!}=\frac{\psi^{(n)}(x)}{n!}\quad\ldots(\mathrm{II})$$

mit der Bedingung

$$i_1+2i_2+3i_3+\ldots+mi_m=n\quad\ldots(q)$$

ersetzt werden kann. Uebrigens behält die letztere Gleichung ihre Giltigkeit auch noch für $m\geq n$, weil dann vermöge (q) ohnehin für i_{n+1}, i_{n+2}, $\ldots$ i_m Null zu setzen ist und (II) mit (I) zusammenfällt.

4.

Die Anwendung dieser Formeln auf besondere Fälle ist sehr einfach, führt aber, namentlich für specielle Werthe von x zu manchen Resultaten, welche auf andere Weise nicht eben so einfach gefunden werden können.

Die Eingangs erwähnte Formel von Jacobi ist ein sehr bemerkenswerthes Beispiel der Formel (I) des vorigen Art. und ergibt sich unmittelbar daraus, wenn man

$$f(u)=e^u,\qquad u=-\log(1-x),$$

also

$$\psi(x)=\frac{1}{1-x}$$

setzt, wofür

$$f^{(r)}(u) = \frac{1}{1-x}, \qquad \psi^{(r)}(x) = \frac{(r-1)!}{(1-x)^r}, \qquad \psi^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

erhalten wird. Da nämlich in Folge der Bedingung (p) die Grösse x aus der Gleichung herausfällt, so ergibt sich:

$$\sum \frac{1}{1^{i_1} 2^{i_2} \ldots n^{i_n} . i_1! \, i_2! \ldots i_n!} = 1,$$

wobei für irgend ein angenommenes n die Zahlen i auf alle der Bedingung (p) genügenden Arten zu nehmen sind. Jacobi hat diese Formel in dem a. a. O. darüber veröffentlichten Aufsatz auch aus Gründen der combinatorischen Analysis abgeleitet.

Einem Seitenstück derselben entsprechen die Ausdrücke

$$f(u) = \log(1+u), \qquad u = e^x - 1,$$

also

$$\psi(x) = x.$$

Da nämlich auch hier die Veränderliche x sich weghebt, so erhält man:

$$\sum \frac{(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_n}}{i_1! \, i_2! \ldots i_n!} \cdot \frac{(i_1+i_2+\ldots+i_n-1)!}{(1!)^{i_1}(2!)^{i_2}\ldots(n!)^{i_n}} = 0, \quad n > 1,$$

wobei, wie vorhin, die i der Bedingung (p) genügen müssen.

Die Gleichung (II) des vorigen Art. führt, wenn

$$u = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m$$

und einmal

$$f(u) = e^u,$$

dann

$$f(u) = \log(u+\alpha),$$

in beiden Fällen aber zuletzt $x = 0$ gesetzt wird, zu den Formeln

$$\sum \frac{\alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \ldots \alpha_m^{i_m}}{i_1! \, i_2! \ldots i_m!} = \frac{1}{n!} \left[D^{(n)} e^{\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m} \right]_{x=0}$$

und

$$\sum \frac{(i_1+i_2+..+i_m-1)!}{i_1!\,i_2!\ldots i_m!} \cdot \frac{\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}\ldots\alpha_m^{i_m}}{(-\alpha)^{i_1+i_2+..+i_m}} =$$

$$-\frac{1}{n!}\left[D^{(n)}\log(\alpha+\alpha_1 x+..+\alpha^m x^m\right]_{x=0}$$

beide mit der Bedingung (q).

Aus der Gleichung (I) ergibt sich, wenn darin

$$f(u)=u^{\frac{b}{a}}, \qquad u=\frac{1}{(1-x)^a},$$

also

$$\psi(x)=\frac{1}{(1-x)^b}$$

gesetzt wird, die ebenfalls von x freie Gleichung:

$$\sum\left(\frac{a+1}{2!}\right)^{i_1}\left(\frac{(a+1)(a+2)}{3!}\right)^{i_2}\ldots\left(\frac{(a+1)(a+2)..(a+n-1)}{n!}\right)^{i_n}$$

$$\times\frac{(b-a)(b-2a)..(b-(\sigma-1)a)}{i_1!\,i_2!\ldots i_n!}=\frac{(b+1)(b+2)..(b+n-1)}{n!}$$

mit der Bedingung (p), wobei zur Abkürzung $\sigma=i_1+i_2+..+i_n$ gesetzt wurde.

In der Gleichung (I) sei ferner

$$f(u)=\frac{u^2}{1-(1-c)u^2}, \qquad u=\frac{x}{\sqrt{x^2-2ax+1}},$$

also

$$\psi(x)=\frac{x^2}{cx^2-2ax+1}$$

und es werde zuletzt $x=0$ gesetzt. Man erhält dann

$$\overset{(2r)}{f}(0)=(2r)!(1-c)^{r-1}, \qquad \overset{(2r-1)}{f}(0)=0$$

und wenn die Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-2ax+1}} =$$

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_r x^r + \ldots$$

angenommen wird, die A also Kugelfunctionen einer Veränderlichen bezeichnen, so hat man auch $\varphi^{(r)}(0) = r!\, A_{r-1}$.

Da weiter

$$\psi(x) =$$

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{2c\sqrt{a^2-c}}\left[\frac{2a(a+\sqrt{a^2-c})-c}{cx-a-\sqrt{a^2-c}} - \frac{2a(a-\sqrt{a^2-c})-c}{cx-a+\sqrt{a^2-c}}\right]$$

also

$$\psi^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\sqrt{a^2-c}}\left[(a+\sqrt{a^2-c})^{n-1} - (a-\sqrt{a^2-c})^{n-1}\right]$$

so ergibt sich, wenn wieder $\sigma = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$ gesetzt wird, die Formel:

$$\sum \frac{\sigma!\,(1-c)^{\frac{\sigma}{2}}}{i_1!\,i_2!\ldots i_n!} \cdot A_0^{i_1} A_1^{i_2} \ldots A_{n-1}^{i_n} =$$

$$\frac{1-c}{2\sqrt{a^2-c}} \cdot \left[(a+\sqrt{a^2-c})^{n-1} - (a-\sqrt{a^2-c})^{n-1}\right]$$

worin von den der Bedingung

$$i_1 + 2i_2 + \ldots + ni_n = n$$

entsprechenden Werthen der i nur diejenigen zu berücksichtigen sind, wofür σ eine **g e r a d e** Zahl ist.

Für $c = 0$ reducirt sich die Gleichung auf die folgende:

$$\sum \frac{(i_1+i_2+\ldots+i_n)!}{i_1!\,i_2!\ldots i_n!} \cdot A_0^{i_1} A_1^{i_2} \ldots A_{n-1}^{i_n} = (2a)^{n-2}, \quad n > 1.$$

Für $c = 1$ kommen in dem Summenausdruck nur diejenigen Glieder vor, für welche die Werthe der i den beiden Gleichungen

$$i_1 + 2i_2 + \ldots + ni_n = n, \qquad i_1 + i_2 + \ldots + i_n = 2$$

entsprechend bestimmt werden, da in diesem Fall nur $f''(0) = 2$ einen von Null verschiedenen Werth hat.

Wird in der Gleichung (I)

$$f(u) = e^{bu}, \qquad u = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2ax + 1}},$$

also

$$\psi(x) = e^{\frac{b}{\sqrt{x^2-2ax+1}}}$$

und zuletzt wieder $x = 0$ gesetzt, wofür sich

$$\varphi^{(r)}(0) = r!\,A_r \text{ und } f^{(r)}(u) = b^r . e^b \text{ (für } x = 0,\ u = 1)$$

ergibt, so findet man die Formel

$$\sum \frac{b^{i_1+i_2+\cdots+i_n}}{i_1!\,i_2!\ldots i_n!} . A_1^{i_1} A_2^{i_2} \ldots A_n^{i_n} = \frac{e^{-b}}{n!}\left[D^{(n)} e^{\frac{b}{\sqrt{x^2-2ax+1}}}\right]_{x=0}$$

mit der Bedingung (p).

Die Anwendung der Formeln (I) und (II) des vorigen Art. ist, wie man sieht, so einfach, dass ich diese Beispiele, deren Zahl sich übrigens leicht vermehren liesse, nicht um jene Anwendung zu erläutern, sondern desshalb angeführt habe, weil sie einige an sich bemerkenswerthe Resultate enthalten. Aber auch manche bekannte Relationen lassen sich aus jenen Formeln mit grösster Leichtigkeit ableiten, wie z. B. diejenigen, durch welche die Summe der Potenzen und der Combinationen einer Anzahl gegebener Grössen aufeinander zurückgeführt werden.

Die eine dieser Relationen folgt aus der Annahme

$$f(u) = e^u, \qquad u = \log(1 + a_1 x)(1 + a_2 x)\ldots(1 + a_m x),$$

wofür

$$\psi(x) = (1 + a_1 x)(1 + a_2 x)\ldots(1 + a_m x)$$

ist. Wird zuletzt wieder $x = 0$ gesetzt und bemerkt man, dass

$$f^{(r)}(0) = 1, \qquad \varphi^{(r)}(0) = (-1)^{r-1} . (r-1)!\,(a_1^r + a_2^r + \ldots + a_m^r)$$

und dass, wenn

$$\psi(x) = 1 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_m x^m$$

gesetzt wird:

$$\psi^{(n)}(0) = n!\,\alpha_n$$

folgt, so ergibt sich aus (II) unmittelbar die bekannte Gleichung

$$\alpha_n = \sum \frac{(-1)^{n-(i_1+i_2+\cdots+i_n)}}{i!\,i!\ldots i_n!} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{i_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{s_n}{n}\right)^{i_n}$$

mit der Bedingung (q).

Hierin ist

$$s_r = a_1^r + a_2^r + \ldots + a_m^r$$

gesetzt worden und können die α aus der Gleichung

$$(1+a_1 x)(1+a_2 x)\ldots(1+a_m x) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m$$

erhalten werden.

Die zweite der in Rede stehenden Gleichungen ergibt sich, wenn von den Ausdrücken

$$f(u) = \log(1+u), \quad u = (1+a_1 x)(1+a_2 x)\ldots(1+a_m x) - 1$$

ausgegangen wird, wozu

$$\psi(x) = (1+a_1 x)(1+a_2 x)\ldots(1+a_m x)$$

gehört und für welche man, wenn wieder $x = 0$ gesetzt wird:

$$f^{(r)}(0) = (-1)^{r-1}.(r-1)!, \qquad \varphi^{(r)}(0) = r!\,\alpha_r$$

ferner

$$\psi^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}.(n-1)!\,s_n$$

erhält. Darin haben α_r und s_n die vorige Bedeutung. Da in dem vorliegenden Fall $\varphi(x)$ eine ganze rationale Function m. Grades ist, so kann die Gleichung (II) benutzt werden, aus welcher unmittelbar die verlangte Relation

$$s_n = n \cdot \sum (-1)^{n-(i_1+i_2+\cdots+i_m)} . \frac{(i_1+i_2+\cdots+i_m-1)!}{i_1!\,i_2!\ldots i_m!} . \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \ldots \alpha_m^{i_m}$$

mit der Bedingung (q) hervorgeht.

Zu ähnlichen, jedoch allgemeineren Resultaten gelangt man, wenn für $\mu < \nu$ einmal

$$f(u) = e^u, \qquad u = \log \frac{(1+a_1x)(1+a_2x)\ldots(1+a_\mu x)}{(1+b_1x)(1+b_2x)\ldots(1+b_\nu x)}$$

und dann

$$f(u) = \log(1+u), \qquad u = \frac{(1+a_1x)(1+a_2x)\ldots(1+a_\mu x)}{(1+b_1x)(1+b_2x)\ldots(1+b_\nu x)} - 1$$

gesetzt und im erstern Falle $\psi(x)$, im letztern dagegen $\varphi(x)$ in Partialbrüche zerlegt wird.

5.

Auch die Summation der Reihen, von welchen nunmehr die Rede sein wird, erfolgt nach einem gewissen combinatorischen Gesetz, wozu eine ebenfalls sehr einfache Bemerkung führt.

Bezeichnen x, x_1, x_2, $\ldots x_n$ von einander unabhängige veränderliche Grössen und wird der Kürze wegen

$$u_n = xx_1x_2\ldots x_n$$

daher

$$u_0 = x, \qquad u_{n-1} = \frac{du_n}{dx_n}$$

gesetzt, so lässt sich offenbar das Integral

$$\int_{a_1}^{b_1} u_0\,dx_1 \int_{a_2}^{b_2} u_1\,dx_2 \ldots \int_{a_n}^{b_n} u_{n-1} f^{(n)}(u_n)\,dx_n,$$

worin alle a und b als von Null verschieden vorausgesetzt werden, unbestimmt ausführen; denn sowie man durch Integration nach x_n zu dem Ausdruck

$$\int_{a_1}^{b_1} u_0\,dx_1 \int_{a_2}^{b_2} u_1\,dx_2 \ldots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} u_{n-2} \left[f^{(n-1)}(b_n u_{n-1}) - f^{(n-1)}(a_n u_{n-1})\right] dx_{n-1}$$

gelangt, so lassen sich analog auch alle folgenden Integrationen effectuiren, welche zuletzt ein Aggregat von 2^n Gliedern liefern. Rücksichtlich der Bildung dieser Glieder lässt sich Folgendes bemerken:

Jedes Glied enthält einen Werth der Function f mit anderm Argument; jedes Argument ist, abgesehen vom Zeichen, ein mit x multiplicirtes Glied der Entwicklung des Products

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n)$$

und jeder Functionswerth ist mit demselben Zeichen versehen, wie das Glied dieser Entwicklung, welches das entsprechende Argument bildet.

Bezeichnet $c_1 c_2 \ldots c_n$ irgend eines dieser Glieder, wobei sowohl a_ν als b_ν durch c_ν dargestellt sein soll, so enthält ferner noch jeder Functionswerth den Divisor $c_1^0 c_2^1 c_3^2 \ldots c_n^{n-1}$.

Dies vorausgesetzt, überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Gleichung:

$$\int_{a_1}^{b_1} u_0\, dx_1 \int_{a_2}^{b_2} u_1\, dx_2 \ldots \int_{a_n}^{b_n} u_{n-1} f^{(n)}(u_n)\, dx_n$$

$$= \sum \varepsilon \,.\, \frac{f(c_1 c_2 \ldots c_n \,.\, x)}{c_1^0 c_2^1 c_3^2 \ldots c_n^{n-1}}$$

wobei für ε entweder $+1$ oder -1 zu setzen ist, je nachdem das Glied $c_1 c_2 \ldots c_n$ aus der Entwicklung des Products

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n)$$

mit dem positiven oder negativen Zeichen versehen erhalten wird, und wobei die Summation auf alle 2^n Fälle zu erstrecken ist, welche den verschiedenen Werthen des Products $c_1 c_2 \ldots c_n$ entsprechen.

Nun kann im Allgemeinen das vielfache Integral auch in eine unendliche Reihe entwickelt werden. Wird nämlich angenommen, es sei die Entwicklung

$$f^{(n)}(u_n) = f^{(n)}(0) + u_n f^{(n+1)}(0) + \ldots + \frac{u_n^\lambda}{\lambda!} f^{(n+\lambda)}(0) + \ldots$$

giltig, und bemerkt man, dass:

$$u_0 u_1 u_2 \ldots u_{n-1} \cdot u_n^\lambda = x^{\lambda+n} \cdot x_1^{\lambda+n-1} \cdot x_2^{\lambda+n-2} \ldots x_{n-1}^{\lambda+1} \cdot x_n^\lambda ,$$

so folgt

$$\int_{a_1}^{b_1} u_0\, dx_1 \int_{a_2}^{b_2} u_1\, dx_2 \ldots \int_{a_n}^{b_n} u_{n-1} f^{(n)}(u_n) dx_n =$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (b_1^{\lambda+n} - a_1^{\lambda+n})(b_2^{\lambda+n-1} - a_2^{\lambda+n-1}) \ldots (b_n^{\lambda+1} - a_n^{\lambda+1}) \cdot \frac{x^{\lambda+n} f^{(\lambda+n)}(0)}{(\lambda+n)!}$$

und man hat daher für das Integral zwei verschiedene Darstellungen, zwischen welchen die Gleichung

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (b_1^{\lambda+n} - a_1^{\lambda+n})(b_2^{\lambda+n-1} - a_2^{\lambda+n-1}) \ldots (b_n^{\lambda+1} - a_n^{\lambda+1}) \cdot \frac{x^{\lambda+n} f^{(\lambda+n)}(0)}{(\lambda+n)!}$$

$$= \sum \varepsilon \cdot \frac{f(c_1 c_2 \ldots c_n x)}{c_1^0 c_2^1 c_3^2 \ldots c_n^{n-1}} \qquad \ldots (A)$$

stattfindet.

Aus derselben lässt sich eine andere dadurch ableiten, dass man auf beiden Seiten m mal nach x differentiirt und $f(z)$ statt $f^{(m)}(z)$ schreibt. Auf der linken Seite tritt alsdann

$$\frac{x^{\lambda-m+n} f^{(\lambda-m+n)}(0)}{(\lambda-m+n)!}$$

an die Stelle von

$$\frac{x^{\lambda+n} f^{(\lambda+n)}(0)}{(\lambda+n)!}$$

und rechts erhält der Ausdruck hinter dem Summenzeichen noch den Factor $(c_1 c_2 \ldots c_n)^m$, so dass man nunmehr die folgende Gleichung erhält:

$$\sum_{\lambda=\lambda_0}^{\lambda=\infty} (b_1^{\lambda+n} - a_1^{\lambda+n})(b_2^{\lambda+n-1} - a_2^{\lambda+n-1}) \ldots (b_n^{\lambda+1} - a_n^{\lambda+1}) \cdot \frac{x^{\lambda-m+n}}{(\lambda-m+n)!} f^{(\lambda-m+n)}(0)$$

$$= \sum \varepsilon \cdot c_1^m c_2^{m-1} c_3^{m-2} \ldots c_n^{m-n+1} \cdot f(c_1 c_2 c_3 \ldots c_n x) , \qquad \ldots (B)$$

worin $\lambda_0 = 0$ zu setzen ist, wenn $n - m$ positiv oder Null, dagegen $\lambda_0 = m - n$, wenn $n - m$ negativ ist, weil x in keiner negativen Potenz vorkommen kann.

Hieraus geht nun hervor, dass die Summen der beiden unendlichen Reihen der Gleichungen (A) und (B), welche in gewisser Hinsicht allgemeiner als die Maclaurin'sche Reihe sind, immer in endlicher Form gefunden werden können.

Uebrigens kann (A) als ein dem Werthe $m = 0$ entsprechender specieller Fall von (B) betrachtet werden.

Wie leicht sich diese Summen ergeben, wird die Anführung einiger besonderen Fälle hinlänglich erkennen lassen.

6.

Aus der Gleichung (A) der vorigen Art erhält man für $n = 2$ die Formel:

$$(b_1^2 - a_1^2)(b_2 - a_2)\frac{x^2}{2!}f''(0) + (b_1^3 - a_1^3)(b_2^2 - a_2^2)\frac{x^3}{3!}f'''(0)$$
$$+ (b_1^4 - a_1^4)(b_2^3 - a_2^3)\frac{x^4}{4!}f^{IV}(0) + \ldots$$
$$= \frac{f(b_1 b_2 x) - f(a_1 b_2 x)}{b_2} + \frac{f(a_1 a_2 x) - f(a_2 b_1 x)}{a_2}$$

und für $n = 3$ ergibt sich:

$$(b_1^3 - a_1^3)(b_2^2 - a_2^2)(b_3 - a_3)\frac{x^3}{3!}f'''(0)$$
$$+ (b_1^4 - a_1^4)(b_2^3 - a_2^3)(b_3^2 - a_3^2)\frac{x^4}{4!}f^{IV}(0)$$
$$+ (b_1^5 - a_1^5)(b_2^4 - a_2^4)(b_3^3 - a_3^3)\frac{x^5}{5!}f^{V}(0) + \ldots$$
$$= \frac{f(b_1 b_2 b_3 x) - f(a_1 b_2 b_3 x)}{b_2 b_3^2} + \frac{f(a_1 a_2 b_3 x) - f(a_2 b_1 b_3 x)}{a_2 b_3^2}$$
$$+ \frac{f(a_1 a_3 b_2 x) - f(a_3 b_1 b_2 x)}{b_2 a_3^2} + \frac{f(a_2 a_3 b_1 x) - f(a_1 a_2 a_3 x)}{a_2 a_3^2}$$

U. s. w. In dem besondern Fall, wenn $a_1 = a_2 = a_3 = a$ und $b_1 = b_2 = b_3 = b$, ferner $f(x) = e^x$ ist, folgt hieraus:

$$(b-a)(b^2-a^2)\cdot\frac{x^2}{2!}+(b^2-a^2)(b^3-a^3)\cdot\frac{x^3}{3!}+(b^3-a^3)(b^4-a^4)\cdot\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$=\frac{1}{ab}\left[ae^{b^2x}-(a+b)e^{abx}+be^{a^2x}\right] \qquad \ldots(1)$$

und

$$(b-a)(b^2-a^2)(b^3-a^3)\cdot\frac{x^3}{3!}+(b^2-a^2)(b^3-a^3)(b^4-a^4)\cdot\frac{x^4}{4!}$$

$$+(b^3-a^3)(b^4-a^4)(b^5-a^5)\cdot\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$$\ldots(2)$$

$$=\frac{1}{a^3b^3}\left[a^3e^{b^3x}+(a^2+ab+b^2)\left(be^{a^2bx}-ae^{ab^2x}\right)-b^3e^{a^3x}\right].$$

Für imaginäre Werthe von a und b ergeben sich daraus einige bemerkenswerthe trigonometrische Entwicklungen.

Setzt man nämlich

$$a=e^{(\beta-\alpha)\sqrt{-1}}, \qquad b=e^{(\beta+\alpha)\sqrt{-1}},$$

so findet man aus (1) die beiden Gleichungen:

$$\sin\alpha\sin2\alpha\cos3\beta\cdot\frac{x^2}{2!}+\sin2\alpha\sin3\alpha\cos5\beta\cdot\frac{x^3}{3!}$$

$$+\sin3\alpha\sin4\alpha\cos7\beta\cdot\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^{x\cos2\beta}\cdot\cos(\beta-x\sin2\beta)\cdot\cos\alpha$$

$$-\frac{1}{4}\cdot e^{x\cos2(\alpha+\beta)}\cdot\cos(\alpha+\beta-x\sin2(\alpha+\beta))$$

$$-\frac{1}{4}\cdot e^{x\cos2(\alpha-\beta)}\cdot\cos(\alpha-\beta-x\sin2(\alpha-\beta))$$

und

$$\sin\alpha\sin2\alpha\sin3\beta\cdot\frac{x^2}{2!}+\sin2\alpha\sin3\alpha\sin5\beta\cdot\frac{x^3}{3!}$$

$$+\sin3\alpha\sin4\alpha\sin7\beta\cdot\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$= \frac{1}{4} \cdot e^{x \cos 2(\alpha+\beta)} . \sin(\alpha + \beta - x \sin 2(\alpha + \beta))$$

$$- \frac{1}{4} \cdot e^{x \cos 2(\alpha-\beta)} . \sin(\alpha - \beta - x \sin 2(\alpha - \beta))$$

Daraus folgt z. B. für $\beta = 0$

$$\sin\alpha \sin 2\alpha . \frac{x^2}{2!} + \sin 2\alpha \sin 3\alpha . \frac{x^3}{3!} + \sin 3\alpha \sin 4\alpha . \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^x \cos\alpha - e^{x \cos 2\alpha} . \cos(\alpha - x \sin 2\alpha) \right]$$

Ebenfalls für $\beta = 0$ findet man aus (2) die Gleichung

$$\sin\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha . \frac{x^3}{3!} + \sin 2\alpha \sin 3\alpha \sin 4\alpha . \frac{x^4}{4!}$$

$$+ \sin 3\alpha \sin 4\alpha \sin 5\alpha . \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$= \frac{1}{4} \left[e^{x \cos 3a} . \sin(3a - x \sin 3a) - e^{x \cos a}(1 + 2 \cos 2a) \sin(a - x \sin a) \right].$$

7.

Aus der Gleichung (B) des Art. 5 ergibt sich, wenn $m = n$ gesetzt wird, für $n = 2$ die folgende:

$$(b_1^2 - a_1^2)(b_2 - a_2) f(0) + (b_1^3 - a_1^3)(b_2^2 - a_2^2) . x f'(0)$$

$$+ (b_1^4 - a_1^4)(b_2^3 - a_2^3) . \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

$$= b_1^2 [b_2 f(b_1 b_2 x) - a_2 f(b_1 a_2 x)] + a_1^2 [a_2 f(a_1 a_2 x) - b_2 f(a_1 b_2 x)]$$

und für $n = 3$ findet man:

$$(b_1^3 - a_1^3)(b_2^2 - a_2^2)(b_3 - a_3) f(0) + (b_1^4 - a_1^4)(b_2^3 - a_2^3)(b_3^2 - a_3^2) . x f'(0)$$

$$+ (b_1^5 - a_1^5)(b_2^4 - a_2^4)(b_3^3 - a_3^3) \cdot \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots ,$$

$$= b_1^3 b_2^2 [b_3 f(b_1 b_2 b_3 x) - a_3 f(b_1 b_2 a_3 x)]$$
$$+ b_1^3 a_2^2 [a_3 f(b_1 a_2 a_3 x) - b_3 f(b_1 a_2 b_3 x)]$$
$$+ a_1^3 a_2^2 [b_3 f(a_1 a_2 b_3 x) - a_3 f(a_1 a_2 a_3 x)]$$
$$+ a_1^3 b_2^2 [a_3 f(a_1 b_2 a_3 x) - b_3 f(a_1 b_2 b_3 x)]$$

U. s. w. Daraus folgt, wenn beispielsweise $a_1 = a_2 = a_3 = a$, dann $b_1 = b_2 = b_3 = b$ und $f(x) = e^x$ gesetzt wird:

$$(b-a)(b^2-a^2) + (b^2-a^2)(b^3-a^3) \cdot x + (b^3-a^3)(b^4-a^4) \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots$$
$$= b^3 e^{b^2 x} - ab(b+a) e^{abx} + a^3 e^{a^2 x}$$

und

$$(b-a)(b^2-a^2)(b^3-a^3) + (b^2-a^2)(b^3-a^3)(b^4-a^4) \cdot x$$
$$+ (b^3-a^3)(b^4-a^4)(b^5-a^5) \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots$$
$$= b^6 e^{b^3 x} + ab(a^2+ab+b^2)[a^2 e^{a^2 bx} - b^2 e^{b^2 ax}] - a^6 e^{a^3 x}.$$

Für die Werthe $a = e^{-\alpha\sqrt{-1}}$, $b = e^{+\alpha\sqrt{-1}}$ gehen diese beiden Gleichungen über in die folgenden:

$$\sin\alpha \sin 2\alpha + \sin 2\alpha \sin 3\alpha \,.\, x + \sin 3\alpha \sin 4\alpha \,.\, \frac{x^2}{2!} + \dots$$
$$= \frac{1}{2} [e^x \cos\alpha - e^{x\cos\alpha} \,.\, \cos(3\alpha + x \sin 2\alpha)]$$

und

$$\sin\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha + \sin 2\alpha \sin 3\alpha \sin 4\alpha \,.\,.\, x$$
$$+ \sin 3\alpha \sin 4\alpha \sin 5\alpha \,.\, \frac{x^2}{2!} + \dots$$
$$= \frac{1}{4} [e^{x\cos\alpha} \,.\, (1+2\cos 2\alpha) \sin(2\alpha + x \sin\alpha) - e^{x\cos 3\alpha} \,.\, \sin(6\alpha + x \sin 3\alpha]$$

Es versteht sich von selbst, dass, wie (B) aus (A), die soeben angeführten Gleichungen aus den entsprechenden des vorigen Art. durch deren Differentiation, wenn auch weniger einfach, erhalten werden können.

8.

An die Gleichung (B) lassen sich einige naheliegende Bemerkungen anknüpfen.

Dieselbe verwandelt sich, wenn man darin tz für x, ferner $f(x+y)$ für $f(y)$ setzt, und, nachdem durchgehend mit $e^{-t}dt$ multiplicirt worden, nach t von 0 bis ∞ integrirt, in die folgende:

$$\sum_{\lambda=\lambda_0}^{\lambda=\infty}(b_1^{\lambda+n}-a_1^{\lambda+n})(b_2^{\lambda+n-1}-a_2^{\lambda+n-1})\,.\,.\,(b_n^{\lambda+1}-a_n^{\lambda+1})\,.\,z^{\lambda-m+n}f^{(\lambda-m+n)}(x)$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-t}\,dt\,\Sigma\,\varepsilon\,.\,c_1^m c_2^{m-1}\,.\,.\,c_n^{m-n+1}\,.\,f(x+c_1c_2\,.\,.\,c_n tz) \qquad \ldots(C)$$

Beispielsweise ergibt sich hieraus für $m=n$, $z<1$, $f(y)=e^{-y}$ und wenn die a und b als zwischen 0 und 1 liegend vorausgesetzt werden, die Formel:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^{\lambda}(b_1^{\lambda+n}-a_1^{\lambda+n})(b_2^{\lambda+n-1}-a_2^{\lambda+n-1})\,.\,.\,(b_n^{\lambda+1}-a_n^{\lambda+1})\,.\,z^{\lambda}$$

$$=\sum\varepsilon\,.\,\frac{c_1^n c_2^{n-1}\ldots c_n^1}{1+c_1c_2c_3\,.\,.\,c_n z}$$

woraus für $n=2$ und $n=3$, sodann $b_1=b_2=b_3=1$ und $a_1=\alpha$, $a_2=\beta$, $a_3=\gamma$ die folgenden Gleichungen erhalten werden:

$$1+\alpha-(1+\beta)(1+\alpha+\alpha^2)z+(1+\beta+\beta^2)(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)z^2-\ldots$$

$$=\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)}\left[\frac{1}{1+z}-\frac{\beta}{1+\beta z}-\frac{\alpha^2}{1+\alpha z}+\frac{\alpha^2\beta}{1+\alpha\beta z}\right]$$

und

$$(1+\beta)(1+\alpha+\alpha^2)-(1+\gamma)(1+\beta+\beta^2)(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)z$$

$$+(1+\gamma+\gamma^2)(1+\beta+\beta^2+\beta^3)(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)z^2-\ldots$$

$$=\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{1+z}-\frac{\gamma}{1+\gamma z}-\frac{\beta^2}{1+\beta z}-\frac{\alpha^3}{1+\alpha z}\\+\frac{\beta^2\gamma}{1+\beta\gamma z}+\frac{\alpha^3\beta^2}{1+\alpha\beta z}+\frac{\alpha^3\gamma}{1+\alpha\gamma z}-\frac{\alpha^3\beta^2\gamma}{1+\alpha\beta\gamma z}\end{array}\right]$$

Andere Resultate dieser Art liessen sich aus (C) erhalten, wenn man für $f(y)$ einen der Ausdrücke $\sin y$, $\cos y$, $e^{-y}\sin y, \ldots$ setzen würde.

Durch eine weitere Umgestaltung der Gleichung lässt sich bewirken, dass aus der darin vorkommenden unendlichen Reihe Gruppen von je $r-1$ Zwischengliedern verschwinden. Beschränkt man sich dabei auf den Fall $m=n$ und setzt kz für x und $f(x+y)$ für $f(y)$, so erhält jene Gleichung die folgende Form:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(b_1^{\lambda+n}-a_1^{\lambda+n})(b_2^{\lambda+n-1}-a_2^{\lambda+n-1})\ldots(b_n^{\lambda+1}-a_n^{\lambda+1})\cdot\frac{k^\lambda z^\lambda}{\lambda!}\cdot f^{(\lambda)}(x)$$

$$+\sum \varepsilon\,.\,c_1^n c_2^{n-1} c_3^{n-2}\ldots c_n^1\,.\,f(x+c_1c_2c_3\ldots c_n\,.\,kz)$$

in welcher nunmehr $\varkappa$, $\varkappa^2$, $\ldots\varkappa^r$ der Reihe nach für k, wobei

$$\varkappa=e^{\frac{2\pi}{r}\sqrt{-1}},\qquad \varkappa^r=1$$

ist, gesetzt werden soll. Bildet man hierauf die Summe der hierdurch entstehenden r Gleichungen, so kommt linker Hand der Factor

$$\varkappa^\lambda+\varkappa^{2\lambda}+\ldots+\varkappa^{r\lambda}=\varkappa^\lambda\cdot\frac{1-\varkappa^{r\lambda}}{1-\varkappa^\lambda}$$

vor, welcher immer verschwindet, wenn λ kein Vielfaches von r ist, weil dann $\varkappa^{r\lambda}=1$, dagegen $\varkappa^\lambda$ nicht $=1$ ist. Nur in den Fällen, wofür $\lambda=0$, r, $2r,\ldots$ erhält jener Factor einen von Null verschiedenen Werth, welcher $=r$ ist, weil dann jedes Glied der geometrischen Reihe den Werth 1 hat.

Wird daher der Kürze wegen

$$Z_r=$$

$$f(x+c_1c_2\ldots c_n\varkappa z)+f(x+c_1c_2\ldots c_n\varkappa^2 z)+\ldots+f(x+c_1c_2\ldots c_n\varkappa^r z)$$

gesetzt, so kann die neu entstandene Gleichung, wie leicht zu sehen, wie folgt geschrieben werden:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(b_1^{r\lambda+n}-a_1^{r\lambda+n})(b_2^{r\lambda+n-1}-a_2^{r\lambda+n-1})\ldots(b_n^{r\lambda+1}-a_n^{r\lambda+1}).\frac{z^{r\lambda}}{(r\lambda)!}f^{(r\lambda)}(x)$$

$$=\frac{1}{r}.\sum\varepsilon.c_1^n c_2^{n-1}c_3^{n-2}..c_n^1.Z_r \qquad \ldots(B')$$

Offenbar erfüllt diese Gleichung die vorhin bezeichnete Bedingung.

Um ihre Anwendung in einem besondern Fall zu zeigen, sei $n=2$, wofür der Ausdruck rechter Hand in

$$\frac{1}{r}.\sum\varepsilon.c_1^2c_2[f(x+c_1c_2\varkappa z)+f(x+c_1c_2\varkappa^2z)+..+f(x+c_1c_2\varkappa^rz)]$$

übergeht.

Da das Product $(b_1-a_1)(b_2-a_2)$ vier Glieder gibt, so besteht jener Ausdruck aus $4r$ Gliedern, die sich leicht aufstellen lassen und die der Uebersicht wegen vollständig angeführt werden mögen. Dem vorausgesetzten Fall entspricht nämlich die folgende Gleichung:

$$(b_1^2-a_1^2)(b_2-a_2)f(x)+(b_1^{r+2}-a_1^{r+2})(b_2^{r+1}-a_2^{r+1}).\frac{z^r}{r!}f^{(r)}(x)$$

$$+(b_1^{2r+2}-a_1^{2r+2})(b_2^{2r+1}-a_2^{2r+1}).\frac{z^{2r}}{(2r)!}f^{(2r)}(x)+..$$

$$=\frac{1}{r}.b_1^2b_2[f(x+b_1b_2\varkappa z)+f(x+b_1b_2\varkappa^2z)+..+f(x+b_1b_2\varkappa^rz)]$$

$$-\frac{1}{r}.b_1^2a_2[f(x+b_1a_2\varkappa z)+f(x+b_1a_2\varkappa^2z)+..+f(x+b_1a_2\varkappa^rz)]$$

$$-\frac{1}{r}.a_1^2b_2[f(x+a_1b_2\varkappa z)+f(x+a_1b_2\varkappa^2z)+..+f(x+a_1b_2\varkappa^rz)]$$

$$+\frac{1}{r}.a_1^2a_2[f(x+a_1a_2\varkappa z)+f(x+a_1a_2\varkappa^2z)+..+f(x+a_1a_2\varkappa^rz)]$$

worin unter $\varkappa$ der angegebene Werth zu verstehen ist.

Für $b_1=b_2=1$, $a_1=a_2=0$ erhält man die Formel

$$f(x)+\frac{z^r}{r!}.f^{(r)}(x)+\frac{z^{2r}}{(2r)!}.f^{(2r)}(x)+\frac{z^{3r}}{(3r)!}.f^{(3r)}(x)+..$$
$$=\frac{1}{r}.[f(x+\varkappa z)+f(x+\varkappa^2 z)+\ldots+f(x+\varkappa^r z]$$

welche wohl bekannt ist.

9.

Analog wie früher (B) lässt auch die Gleichung (B') dadurch in eine andere sich verwandeln, dass man tz für z setzt, mit $e^{-t}dt$ durchgehend multiplicirt und dann auf beiden Seiten nach t zwischen den Grenzen 0 und ∞ integrirt. Man erhält dann:

$$\sum_{\lambda=0}^{=\infty}(b_1^{r\lambda+n}-a_1^{r\lambda+n})(b_2^{r\lambda+n-1}-a_2^{r\lambda+n-1})\ldots(b_n^{r\lambda+1}-a_n^{r\lambda+1}).z^{r\lambda}.f^{(r\lambda)}(x)$$
$$=\frac{1}{r}\int_0^\infty e^{-t}dt\sum\varepsilon.c_1^n c_2^{n-1}c_3^{x-2}..c_n^1.T_r \qquad \ldots(C')$$

wobei nunmehr zur Abkürzung

$$T_r=$$
$$f(x+c_1c_2..c_n\varkappa tz)+f(x+c_1c_2..c_n\varkappa^2 tz)+\ldots+f(x+c_1c_2..c_n\varkappa^r tz)$$

gesetzt wurde.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass die Giltigkeit aller hier angeführten Gleichungen durch die Convergenz der darin vorkommenden unendlichen Reihen bedingt ist und vor Allem von der im Art. 5 als zulässig vorausgesetzten Taylorschen Entwicklung abhängt, auf welche sich alle jene Gleichungen gründen. In gegebenen Fällen werden die bekannten Regeln entscheiden, ob diese Bedingungen erfüllt sind oder nicht.

Um wenigstens einen solchen Fall zu berühren, werde in (C')

$$n=1, \qquad b_1=1, \qquad a_1=0$$

gesetzt, wofür man findet:

$$f(x)+z^r f^{(r)}(x)+z^{2r}f^{(2r)}(x)+\,.\,.+z^{mr}f^{(mr)}(x)+\,.\,.\,.$$

$$=\frac{1}{r}\int_0^\infty e^{-t}[f(x+\kappa zt)+f(x+\kappa^2 zt)+\,.\,.+f(x+\kappa^r zt)]\,dt \quad ..(1)$$

Diese Gleichung stellt, was gelegentlich bemerkt werden mag, für $z=1$ die Summe der Differentialquotienten $0, r, 2r, \ldots$ Ordnung einer Function in einfacherer Form dar, als dies bei der von Herrn Haton (Journ. de l'école polytéchn. 37. cah.) hierfür aufgestellten Gleichung der Fall ist. — Ob nun die angegebene Gleichung für eine bestimmte Function $f(x)$ giltig sei, lässt sich beurtheilen, wenn man die Reihe bei ihrem $mr+1$ ersten Gliede abbricht und den Rest, was hier leicht geschehen kann, wieder durch ein bestimmtes Integral ersetzt. Es ist nämlich:

$$f(x)+z^r f^{(r)}(x)+z^{2r}f^{(2r)}(x)+\,.\,.+z^{mr}f^{(mr)}(x)$$

$$=\frac{1}{r}\int_0^\infty e^{-t}[f(x+\kappa zt)+f(x+\kappa^2 zt)+\,.\,.+f(x+\kappa^r zt)]\,dt$$

$$-\frac{z^{mr+1}}{r}\int_0^\infty e^{-t}[f^{(mr+1)}(x+\kappa zt)+f^{(mr+1)}(x+\kappa^2 zt)$$

$$+\,.\,.+f^{(mr+1)}(x+\kappa^r zt)]\,dt \quad ..(2)$$

und die Giltigkeit der Gleichung (1) steht ausser Zweifel, wenn der zweite den Rest darstellende Theil rechts der Gleichung (2) für ein unendlich gross werdendes m verschwindet.

Es hat keine Schwierigkeit, die Betrachtung der Art. 5 etc. auf Functionen von zwei und mehreren Veränderlichen auszudehnen. An die Stelle von $f^{(n)}(u_n)$ würde z. B. bei zwei Veränderlichen der Ausdruck

$$\rho=\frac{d^{m+n}f(u_m, v_n)}{du_m^m\, dv_n^n}$$

treten, wobei

$$u_m = xx_1x_2\,.\,.x_m, \qquad v_n = yy_1y_2\,.\,.y_n$$

ist, und wäre das nach $x_1, x_2, .. x_m$ und $y_1, y_2, .. y_n$ unbestimmt ausführbare $m+n$ fache Integral von

$$u_0 u_1 .. u_{m-1} . v_0 v_1 .. v_{n-1} . \rho dx_1 dx_2 .. dx_m . dy_1 dy_2 .. dy_n$$

zwischen constanten Grenzen zu betrachten. Die weitere Ausführung wäre der frühern durchaus analog.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien

Die jedem Fachmanne bekannten, bei der raschen Entwickelung der Wissenschaft von Jahr zu Jahr sich steigernden Unzukömmlichkeiten, welche mit der cumulativen Herausgabe von Abhandlungen verbunden sind, die sich auf sämmtliche naturwissenschaftliche Fächer beziehen, haben die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften bestimmt, ihre Sitzungsberichte in zwei gesonderten Abtheilungen erscheinen zu lassen.

Die **erste Abtheilung** enthält die Abhandlungen aus der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Anatomie, Geologie und Paläontologie; die **zweite Abtheilung** die aus der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

Von jeder dieser Abtheilungen erscheint jeden Monat mit Ausnahme von August und September ein Heft, welches drei Sitzungen umfasst. Der Jahrgang enthält somit zehn Hefte.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine vollständige Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen voran, selbst wenn diese nicht zur Aufnahme in die Schriften der Akademie bestimmt werden.

Der Preis des Jahrganges beträgt für eine Abtheilung 12 Gulden ö. W.

Von allen grösseren Abhandlungen kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und sind durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn zu beziehen.



